

## Foro de debate “Las calculadoras en el aula”: a modo de conclusiones

**Mauricio Contreras del Rincón**

IES Benicalap, 46015-Valencia, mauriciocontre@gmail.com

**Ricard Peirò i Estruch**

IES Abastos, 46008-Valencia, ricardpe@gmail.com

### Resumen

En esta comunicación presentamos las primeras conclusiones del espacio de debate “Las calculadoras en el aula”, que viene desarrollándose desde enero con una alta participación. Los temas debatidos tratan sobre la incidencia de las calculadoras en el currículo, en la formación de profesores, en la resolución de problemas, innovaciones tecnológicas y otros aspectos.

**PALABRAS CLAVE:** Calculadoras, Currículo, Formación de profesores.

### 1. Introducción

Desde el mes de enero viene desarrollándose, como una actividad más de las XIV JAEM los denominados espacios de debate sobre diversos temas de interés. En el foro “Las calculadoras en el aula” han participado muchos profesores, que con un total de más de 150 mensajes hasta la fecha, han dado su opinión y sus aportaciones a cada uno de los temas de reflexión propuestos. Éstos se refieren a la incidencia de las calculadoras en el currículo, su uso en Primaria, Secundaria y Universidad, el papel de las calculadoras en la formación de profesores, en la resolución de problemas y en la alfabetización matemática, las calculadoras en selectividad, innovaciones tecnológicas etc. En este artículo presentamos las primeras conclusiones que serán debatidas en una sesión presencial del congreso.

### 2. Las calculadoras y el currículo de matemáticas

El actual desarrollo de las nuevas tecnologías, el proceso de convergencia de sistemas educativos europeos y el nuevo cambio que supone la LOE, hacen necesario reflexionar sobre la incidencia del uso de calculadoras tanto en el currículo como en la dinámica de las clases. A continuación se muestra un resumen de las propuestas del foro relativas a la incidencia del uso de calculadoras en el desarrollo del currículo.

- **¿Contribuyen las calculadoras a la adquisición de las competencias básicas? ¿Cómo?**

Las calculadoras contribuyen a crear el pensamiento matemático. Las matemáticas no consisten en hacer muchas operaciones, sino en saber que operaciones son las que hay que hacer. El alumno piensa qué operaciones son las que hay que hacer para llegar al resultado, y la calculadora las realiza. En el informe PISA se concretan un conjunto de competencias matemáticas básicas:

Pensar y razonar, argumentar, comunicar, modelar, plantear y resolver problemas, representar, utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones

¿En qué medida las calculadoras ayudan a pensar y razonar? ¿Se puede conseguir que los alumnos argumenten usando la calculadora? ¿Qué papel juega la calculadora como soporte para comunicar ideas matemáticas? ¿Se puede modelizar una situación real usando calculadoras? ¿Cómo? ¿Con una gráfica? ¿Con una tabla de datos? ¿Mediante simulaciones?

¿Qué tipo de problemas se pueden plantear los alumnos o surgen de modo natural cuando usan la calculadora? ¿Cómo se puede usar la calculadora para representar ideas matemáticas?

Parece claro que la calculadora permite hacer operaciones. Pero ¿en qué medida favorece la calculadora el uso del lenguaje simbólico y formal?

Además de la competencia en razonamiento matemático las calculadoras favorecen mucho más que los ordenadores la competencia social y ciudadana. Trabajar en un aula llena de mesas con ordenadores supone enfrentarse a barrera insalvables a la hora de agrupar a los alumnos, de fomentar el trabajo en grupo y la ayuda entre iguales. Con las calculadoras esto no ocurre, todo lo contrario.

La calculadora es un elemento investigador y motivador importantísimo, con la que los alumnos pueden estar continuamente verificando y desechando hipótesis.

La tecnología, especialmente la calculadora, permite anticipar contenidos o preparar el camino hacia otros contenidos posteriores, y, al mismo tiempo, hace que la visión de las matemáticas y de los contenidos matemáticos cambie de forma radical. La calculadora, favorece la exploración y la curiosidad por los números y sus relaciones, facilita la formulación y validación de conjeturas por parte de los estudiantes, favoreciendo así el pensamiento inductivo y reflexivo de modo natural.

- **Un ejemplo:**

En primer ciclo de la ESO, hay muchas actividades que se pueden desarrollar con calculadora sobre la estructura de las fracciones y de los decimales. Así:

- a) ¿Cómo puedes conseguir con la calculadora una fracción que sea "un poquito" más grande que  $\frac{2}{5}$ ? Acércate lo más que puedas.
- b) ¿Qué única operación debes hacer con la calculadora para que en pantalla aparezca 0.13131313? ¿Y para que aparezca 2.1313131?

En el transcurso de esta actividad, los alumnos descubren cuántos dígitos muestra en pantalla la calculadora, cómo expresa las fracciones impropias en forma de número mixto y algunos logran formular la regla para obtener la fracción generatriz de una expresión decimal.

- **Con el uso de calculadoras pueden tratarse en clase contenidos matemáticos nuevos. Por ejemplo, hoy es posible ajustar distintos modelos de regresión a una nube de puntos y no solo el lineal. ¿En qué medida el currículo debería adaptarse a las posibilidades que abren los nuevos modelos de calculadoras? ¿Cómo afectan las calculadoras a los contenidos matemáticas que se llevan al aula?**

Más que contenidos matemáticos nuevos, lo que podemos conseguir es enfoques nuevos a contenidos clásicos. Hay contenidos que solamente tienen sentido tratarse con la herramienta tecnológica adecuada. La calculadora es una buena herramienta que permite introducir conceptos nuevos (además de tratar de forma creativa conceptos clásicos).

- **Algunos ejemplos:**

- a) Una propuesta de unidad didáctica para afrontar la Estadística Bidimensional usando la metodología ClassPad se puede encontrar en la página web:

[http://www.aulamatematica.com/Congresos/ICME\\_10/Icme10.htm](http://www.aulamatematica.com/Congresos/ICME_10/Icme10.htm)

- b) Con una calculadora gráfica que permita realizar construcciones geométricas y que sea programable, sería posible analizar procesos iterativos o recursivos de crecimiento o decrecimiento, como se dan por ejemplo en los fractales.
- c) En 1º de Bach, en lugar de limitarnos a estudiar sistemas de inecuaciones lineales podemos extendernos a sistemas de inecuaciones no lineales.

- **Modelización y simulación con calculadoras: ¿una nueva forma de pensar en la clase de matemáticas?**

Las calculadoras son herramientas válidas para modelizar situaciones reales (o simularlas) y para hacer predicciones a partir del modelo matemático que mejor se ajuste a los datos reales. Permite también validar modelos matemáticos previamente contruidos a partir de un conjunto de datos.

- **Algunos ejemplos:**

- a) Utilizar un sensor de movimiento o de sonido conectado a una calculadora gráfica con sistema CAS permite obtener datos reales, en tiempo real, sobre magnitudes tales como: espacio, tiempo, velocidad, intensidad sonora, etc. Con la ventaja de que esos datos los puede representar gráficamente la calculadora.
- b) Mediante la simulación con números aleatorios es posible abordar problemas realmente muy difíciles que, hasta ahora, estaban fuera del alcance de una clase de Secundaria. Hay problemas de probabilidad que, si no se abordan mediante simulación, es imposible llevarlos a las aulas de ESO y Bachillerato.

- **Con las calculadoras gráficas y simbólicas ¿se favorecen las conexiones entre distintas partes de las matemáticas y entre las matemáticas y otras áreas?**

Las calculadoras favorecen el establecimiento de conexiones entre distintas partes de las matemáticas y entre las matemáticas y otras áreas. Y esto ocurre en cualquier nivel educativo, cuando la calculadora se usa como herramienta para modelizar procesos reales, para tratar de ajustar un modelo funcional a un conjunto de datos, para analizar la evolución de procesos naturales o sociales explorando la gráfica o la tabla de valores, para localizar tendencias y hacer predicciones en el contexto del proceso en estudio, para formularse preguntas sobre el propio fenómeno que se está estudiando: ¿qué pasaría si...? ¿cómo se podría conseguir que...?

• **Algunos ejemplos:**

- a) El uso de un programa de geometría dinámica, en particular el que lleva la Classpad, permite tratar contenidos geométricos. Se puede hacer un estudio geométrico de la parábola, relacionando la gráfica con los polinomios de segundo grado, por ejemplo, o hallando el foco y la directriz, o analizar la tabla de valores observando donde crece y donde decrece. Se puede analizar la velocidad de cambio añadiendo una nueva columna que calcule la diferencia entre las ordenadas de los puntos. Si la tabla está diseñada en intervalos regulares, se pueden apreciar regularidades. Incluso se puede calcular el valor de la pendiente de la recta tangente en cada punto, sin recurrir, por supuesto, a la derivada.
- b) Calcular el m.c.d. y el m.c.m de dos números cualesquiera usando la calculadora, tal como se señala en un artículo de Goyo Lekuona publicado en el número 2 de la revista Aula Matemática Digital (ver la siguiente página web)

<http://www.aulamatematica.com/AMD/AMD.htm>

- c) ¿Por qué al elevar al cuadrado los dos miembros de una ecuación se obtienen soluciones no válidas? Ver la siguiente página web, cuyo autor es Abel Martín:

[http://www.aulamatematica.com/Congresos/JAEM\\_12\\_Abacete/JAEM\\_Abacete.htm](http://www.aulamatematica.com/Congresos/JAEM_12_Abacete/JAEM_Abacete.htm)

- d) Las calculadoras gráficas favorecen la conexión entre el modelo algebraico, el gráfico y el de tabla numérica para una función, de una manera interactiva que va mucho más allá que la metodología tradicional de dibujar las gráficas con lápiz y papel partiendo de una tabla de valores (siempre números enteros).
- e) Investigar cuál es el significado de los parámetros que intervienen en un modelo funcional. Por ejemplo, en  $ax^2+bx+c$ , ¿qué hacen a, b y c?. Con una calculadora que tenga la opción de gráficos dinámicos es posible visualizar los efectos de las variaciones en a, b y c, y describirlos en términos de transformaciones geométricas. Esta conexión entre Álgebra, Análisis y Geometría no sería posible en una clase tradicional sin la calculadora gráfica apropiada. Ver el libro "El estudio de funciones con calculadora gráfica" (Jose Antonio Mora y otros, se puede encontrar el ejemplo en la página web <http://www.mauriciocontreras.es>).
- f) ¿Se comportarán igual, en todo su dominio, dos funciones a priori tan distintas como  $A(x)=x+3$  (claramente una recta) y  $B(x) = (x^2-9)/(x-3)$ ? (Propuesto por Abel Martín)

- g) Las experiencias de trabajo en los Programas de Diversificación Curricular con calculadoras gráficas, indican que, las calculadoras gráficas cumplen un papel muy importante en los casos con mayores dificultades de aprendizaje, al ser herramientas que favorecen el aprendizaje de una manera asombrosa.

### **3. Relación ordenador/calculadora**

Tanto el ordenador como la calculadora son herramientas válidas para modelizar situaciones reales (o simularlas) y para hacer predicciones a partir del modelo matemático que mejor se ajuste a los datos reales. Los ordenadores disponen de una pantalla mucho mejor, pero las calculadoras hacen lo mismo que los ordenadores y en un tamaño mucho más manejable.

Muchas actividades que antes se realizaban con hojas de cálculo se pueden hacer con calculadoras. Hay una razón adicional: mientras el aula de informática no siempre está disponible, las calculadoras están siempre a nuestro alcance. Hay modelos que disponen de todo lo que utilizamos en el aula de informática, cálculo simbólico, hoja de cálculo, representación de funciones, geometría dinámica.

Hay que señalar la experiencia de Noruega, pionera en dotar a cada estudiante de Secundaria con ordenadores portátiles. La valoración después de un par de años de trabajo es que al menos en las clases de matemáticas, el trabajo con ordenadores es más rígido, más compartimentado y menos susceptible de ser "socializado" que el trabajo con una calculadora gráfica...al parecer, también los alumnos con necesidades educativas especiales sacan más provecho de la calculadora

### **4. Calculadoras y formación del profesorado**

¿Hay que revisar la formación inicial y continua del profesorado respecto al uso de calculadoras y a la gestión de una clase con calculadoras?

La presencia de las calculadoras es cada vez mayor en los diseños curriculares, en los cuales se recomienda su uso para determinados procesos o por ejemplo, para el estudio y representación de funciones.

Sin embargo, al igual que ocurre con las TIC, su uso no se generaliza o al menos no se consigue la integración real en el aula. Aún hay bastantes profesores contrarios a su utilización en el aula, las siguen considerando perjudiciales para el aprendizaje de sus alumnos. Las razones son diversas, desde el desconocimiento de las posibilidades que ofrecen hasta el miedo a no conocer cómo utilizarlas, por lo que es conveniente facilitar distintos materiales a este profesorado de manera que se pueda encontrar seguro con un recurso que es de gran utilidad en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Los cursos de formación deben evitar convertirse en un resumen del manual de usuario. Aunque se requieren algunos conocimientos técnicos, el profesorado necesita propuestas didácticas, porque cuando se utiliza un recurso de este tipo hay que cambiar no solo los contenidos que se deben enseñar sino también la forma de hacerlo.

El problema no está en las herramientas que podamos utilizar sino en nuestra disposición a utilizarlas. Si nadie duda a la hora de alabar las ventajas de los programas de geometría dinámica, nadie debería dudar sobre la conveniencia del uso de una herramienta como la ClassPad para los mismos fines. Si en los CD de casi todos los libros en los que se tratan los conceptos de sucesión y progresión vienen actividades para trabajar con hojas de cálculo, se pueden realizar las mismas actividades con las calculadoras gráficas que traen incorporada la hoja de cálculo.

Faltan mecanismos de control en la formación del profesorado que, de alguna manera garanticen que los contenidos tratados en las actividades de formación van a tener su reflejo en la actuación del profesor en clase y en la realidad del aula. Una cuestión de capital importancia es la motivación del profesorado. Habría que diseñar cursos de formación en la propia aula del profesor, comentando con el profesor las situaciones de enseñanza-aprendizaje que se desarrollan en su clase y analizando las potencialidades de la calculadora para desarrollar capacidades y competencias de los alumnos.

Actualmente hay una creciente tendencia a realizar cursos "on line", pero existe el peligro de perder algo de la realidad de la clase. El desarrollo de la socialización de los alumnos en su educación obligatoria es un objetivo clave de la enseñanza. Mediante vídeos en la red o plataformas de Internet, es posible adquirir conocimientos teóricos sobre cómo interactuar con alumnos que presentan dificultades de aprendizaje, cómo presentar las actividades en el aula, etc Pero...¿aporta conocimiento práctico sobre cómo es o debe ser una clase con calculadoras? Deberían combinarse cursos presenciales en el aula, con cursos en centros de profesores y con enseñanza on line.

Debería haber una acción coordinada desde el Ministerio y los Centros de Profesores, y no limitar las acciones a cursos de profesores (realizadas con mucho esfuerzo por casas comerciales) en los que muchas veces el interés real es el "regalo" o los créditos.

Algunas otras reflexiones sobre las calculadoras y la formación del profesorado pueden encontrarse en el artículo "Las TIC y la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas" de Jordi Baldrich (ver la siguiente página web:

<http://www.educaweb.com/noticia/2008/12...13332.html>

## 5. Las calculadoras en Primaria

Todavía hay profesores que opinan que el uso de calculadoras en Primaria perjudica el cálculo mental y aún se prohíbe su uso en algún centro de Primaria y, a veces, en el primer ciclo de Secundaria. Sin embargo, hay experiencias del uso de la calculadora en Primaria de las que todos podemos aprender.

- **¿Qué experiencias hay en nuestro país? ¿Qué experiencias hay en otros países? ¿Se pueden usar las calculadoras gráficas con niños de 10 años?**

Hay una gran variedad de situaciones donde la calculadora es una herramienta visual importante, que permite modelizar situaciones reales, analizar procesos, hacer predicciones, visualizar parámetros, etc. La calculadora para modelizar, para buscar

modelos matemáticos, para proponer y plantear problemas,... todas estas son tareas que deberían ser foco de atención en la educación obligatoria, en concreto, en Primaria. Los niños también pueden buscar modelos, hacer generalizaciones, describir patrones y regularidades, construir tablas y reflexionar sobre la información contenida en ellas, construir gráficos y razonar si son adecuados o no a los datos de la situación en estudio. Y todas estas actividades se ven favorecidas gracias al uso de la calculadora.

En EEUU y otros países de nuestro entorno llevan muchos años explorando e investigando con el uso de calculadoras en los primeros años de escolarización. Aquí, sea por dejadez de la administración o del conjunto del profesorado, lo cierto es que llevamos un retraso importante.

Los investigadores se encuentran muchas veces solos ante el reto que se presenta. Los profesores, cada uno por su lado, algunas veces haciendo grupos... muy poco ayudados por la Administración. Las casas comerciales son las que tienen la iniciativa en este tema, pero en estos momentos, en el territorio español, la falta de competencia en Primaria y ESO hace que el tema esté estancado a nivel de formación.

Es urgente generalizar las experiencias que se vienen realizando por medio de investigaciones o proyectos de innovación. La administración debería divulgar las experiencias innovadoras, enviando publicaciones relevantes a todos los centros o potenciando el intercambio de experiencias en redes virtuales gratuitas.

• **Algunas experiencias:**

- a) En EEUU la introducción de la calculadora gráfica en el aula de Educación Primaria es muy temprana desde hace tres décadas. Los algoritmos en EEUU y en Inglaterra son diferentes a los de aquí. Sin embargo, nadie se atrevería a decir que los americanos o los ingleses tienen dificultades en el cálculo mental o que calculan "peor" que los españoles. Más bien al contrario. (Ver a este respecto los trabajos de NCTM y, en particular, los Estándares curriculares de 1995 y 2000. Ver también los trabajos de David Fielker con niños de 10 años, que aparecen en la bibliografía).
- b) El Grupo Capicúa 2002 (Tenerife), viene desarrollando en los últimos 14 años experiencias de aula, desde Infantil hasta 6º de Primaria, en las que se pone de manifiesto que las calculadoras favorecen el cálculo mental. Se han divulgado sus trabajos en distintas actividades (cursos, talleres, ponencias,..) en Canarias, Península y América Latina. Utilizan como lema la frase: "2020 Año de la desaparición total de los algoritmos tradicionales de la educación matemática". El grupo ha recogido sus trabajos en video-artículos elaborados en el CEIPAgumansa de La Orotava (Tenerife). Se puede conseguir un DVD-artículo enviando un mensaje a la dirección de correo electrónico [tonycapia@yahoo.es](mailto:tonycapia@yahoo.es)
- c) Hay que destacar los trabajos sobre cálculo mental y calculadora en el ciclo inicial de Maria Antonia Canals (Editorial EUMO) en los que se trata de integrar el uso de la calculadora en el aprendizaje global del cálculo y en particular en el entrenamiento del cálculo mental. Los temas tratan sobre el trabajo con el teclado, la escritura de números, adivinanzas numéricas, etc.

- **“Con la introducción de las calculadoras en el aula, mis alumnos no sabrán calcular...” ¿Son incompatibles las calculadoras con el cálculo mental y escrito?**

*“Las verdaderas matemáticas son las que te llevan a comprender el por qué del funcionamiento de la adición, de la división, etc. El hecho que sepamos dividir de manera rápida y precisa no tiene sentido desde el momento en que hay una máquina que lo hace. Lo que importa...es que los niños dominen el cálculo estimado para asegurarse que la calculadora les ha dado una respuesta razonable... Es trágico que gastemos tanto tiempo intentando que los niños calculen más deprisa. Qué importa que un niño que solía tardar 10 minutos en hacer un cálculo después de una semana de instrucción, tarde cinco, si con una calculadora lo puede hacer en 10 segs.” (Peter Hilton, “Crónica d’ensenyament”)*

En la enseñanza actual se da más importancia al cálculo escrito que al cálculo mental. Y más importancia al cálculo escrito usando los algoritmos tradicionales que al uso de algoritmos contruidos por los propios estudiantes. Precisamente por ello la calculadora suele estar relegada y/o olvidada y muchas veces prohibida en los primeros años de escolarización.

Sin embargo, en otros países se utiliza regularmente en Primaria e, incluso, en Infantil. Hay experiencias interesantes (ver, por ejemplo, el libro de Fielker, "Usando las calculadoras con niños de 10 años"), en las que se puede ver cómo los mismos niños se plantean y proponen problemas con la calculadora y se acostumbran a hacer estimaciones previas de los órdenes de magnitud de sus cálculos y a comprobarlos con la calculadora. Precisamente esto, hacer estimaciones y comprobarlas con la calculadora, es lo que favorece el cálculo mental.

Ver la calculadora como un enemigo del cálculo mental es un error de considerables proporciones. Gestionar una clase donde los alumnos hacen estimaciones antes de usar la calculadora es difícil. La formación del profesorado debería incidir en cómo gestionar la clase para conseguir que los alumnos se acostumbren a la dinámica de estimar, conjeturar, reflexionar y comprobar con la calculadora.

El debate no debe centrarse solamente en el cálculo mental y los algoritmos, sino también en el desarrollo de las competencias básicas que los niños deben adquirir para poder desenvolverse en la vida adulta. Por ejemplo: ¿en qué medida las calculadoras ayudan a que los niños construyan sus propios algoritmos de cálculo, sus propias estrategias de resolución de problemas, a que descubran, expresen y construyan patrones numéricos, a que aprecien las diferencias entre modelos distintos de crecimiento, a que describan, analicen y reflexionen sobre la información contenida en un conjunto de datos, a que descubran, expresen y comuniquen conjeturas sobre algunas propiedades numéricas?

"Desde hace décadas, y de manera significativa en los comienzos del siglo XXI, las estrategias elementales de cálculo en la escuela deben ir dirigidos a dotar a las niñas y niños (futuros ciudadanos) del mayor número de habilidades cognitivas posibles para el cálculo oral ( mental) con números pequeños, máximo tres cifras; y dentro de este para el cálculo aproximado (Estimación). El exacto lo dan las máquinas, que se equivocan menos que los seres humanos. Por lo tanto, todas las acciones a desarrollar en las aulas

deben tener como principal objetivo: "Fomentar el desarrollo del cálculo mental (Estimación, aproximación)" (Tony Ralston)

Hay que racionalizar la enseñanza, es decir, hacer que la enseñanza se base en el sentido común. Y, afortunadamente, las calculadoras permiten dedicar mucho más tiempo a la reflexión y al sentido común, que es de lo que se trata.

- **¿Por qué hay tendencia a considerar que las calculadoras son nocivas para el cálculo mental y, sin embargo, no se piensa lo mismo de los ordenadores?**

Suele haber miedo y pavor a la máquina por no conocer, en general, su manejo... por el hecho de que los alumnos empiezan a traer modelos diferentes e incluso anticuados (padres, abuelos...) y los profesores se sienten abrumados y no autorizan su utilización, aunque se suele hacer la vista gorda.

No hace mucho, los "deberes" de los alumnos solían estar repletos de cuentas cada vez más largas, sumas, restas, (llevando y sin llevar), multiplicaciones, divisiones, ... y que suponían un principio de rechazo a lo que se consideran "matemáticas" por parte de los alumnos, que llevan máquinas escondidas y que les sirve de "maestro corrector" y que incluso podía suponer un freno en el progreso del currículo...

Curiosamente, los ordenadores son vistos en otro plano, nadie pone en duda su utilidad, ni siquiera los profesores (otra cuestión es que los usen en sus clases). Sin embargo, la facilidad de manejo de la calculadora hace que se vea como la antítesis de las matemáticas. Claro, si las matemáticas consisten en "hacer cálculos" y ya hay una máquina que "hace cálculos", entonces las máquinas hacen lo mismo que los matemáticos, luego son enemigas de los matemáticos. (craso error).

- **¿Se puede usar la calculadora para plantear y resolver problemas en Primaria? ¿Cómo? ¿Qué experiencias hay?**

*"En un problema práctico, los alumnos tienen que decidir cuáles son las medidas que van a hacer, cómo van a obtenerlas, con cuánta exactitud las necesitan, y sobre todo qué es lo que van a hacer con ellas. Así que la calculadora hace los cálculos, pero con eso no han terminado. La respuesta que aparece en la pantalla tiene que ser considerada: resuelve el problema?, es correcta?, es suficientemente exacta o incluso demasiado exacta?, qué significa?, hace surgir otros problemas?. Qué diferente es todo esto de los cálculos rutinarios sobre el papel, donde todas las cifras ya vienen dadas y la única decisión que hay que tomar es qué hacer con ellas-es decir, qué esperamos usar-y la respuesta es calificada por el profesor. Los "problemas" de los libros de texto omiten la parte del león en la resolución de problemas." (David Fielker, )*

¿Es posible que en Educación Primaria los niños planteen y resuelvan problemas usando la calculadora? ¿Es posible que usen la calculadora gráfica para buscar modelos de situaciones reales? ¿Es posible que usen la calculadora para buscar regularidades y patrones numéricos? ¿Pueden los niños y niñas de Primaria usar la calculadora gráfica para construir tablas y gráficos y predecir resultados a partir de las tablas y gráficos construidos con la calculadora?

Hay que dejar tiempo en clase a los estudiantes para que exploren con la calculadora y busquen sus propias soluciones a los problemas. Lógicamente, hay que pensar en proponer a los estudiantes tareas que tengan cierto nivel de dificultad, que sean realmente un problema para el que está aprendiendo y que tengan sentido para los alumnos. Cuánto más tiempo puedan dedicar los estudiantes a la construcción de sus propios algoritmos con la calculadora, mejor será el desarrollo de actitudes positivas hacia las matemáticas y más posibilidades habrá para que los alumnos desarrollen su competencia matemática. El papel de la calculadora en este proceso es fundamental. La calculadora debería utilizarse desde Educación infantil.

Frente a la tendencia a no enseñar el uso de la calculadora hasta que los alumnos dominen los algoritmos de lápiz y papel, es preferible que se use la calculadora directamente desde el primer momento. La calculadora ayuda a construir algoritmos personales y a establecer conexiones entre distintas ideas. La construcción de algoritmos personales de los propios alumnos es una actividad que potencia el pensamiento matemático y la reflexión.

Con la calculadora se pueden descubrir muchas regularidades numéricas, patrones, tendencias, curiosidades de los números y propiedades sorprendentes. ¿Por qué, en lugar de proponer ese tipo de actividades seguimos insistiendo en que los estudiantes "se quemen" con tareas reiterativamente aburridas y repetitivas o con tareas que tienen un interés para el profesor pero que están a años-luz de los intereses de los alumnos o de lo que realmente es importante en las matemáticas de la vida adulta?

• **Algunos ejemplos:**

- a) Dos barcos parten del mismo puerto, uno cada 14 días y el otro cada 30, si hoy ambos han zarpado juntos del puerto, cuando volverán a coincidir? Es mejor y más rápido si se hace con calculadora.
- b) Juegos para calculadora en la página web <http://www.xtec.cat/~smargeli/calculad> (autora: Silvia Margeli)

## **6. Desarrollo tecnológico y calculadoras en la práctica**

Vivimos en un mundo en el que el desarrollo tecnológico corre a una velocidad que supera todas las previsiones. En la actualidad se dispone de ordenadores portátiles cada vez más pequeños. Los teléfonos móviles cada vez tienen más prestaciones, hasta el punto de ser, de hecho, ordenadores de bolsillo, algunos son PDAs, con Internet, correo electrónico, hoja de cálculo, procesador de texto, presentación de diapositivas, video-cámara, etc. ¿Cómo afectará esto a las calculadoras, en especial las gráficas y simbólicas? En un futuro ¿existirán diferencias entre ordenadores de bolsillo y calculadoras gráficas o simbólicas? ¿Será posible una calculadora gráfica con sistema CAS que tenga teléfono, Internet y correo electrónico incorporado? ¿Será posible escribir manualmente sobre la pantalla de una calculadora gráfica, sin necesidad de pulsar teclas?

¿Debe mejorar la interconexión calculadora/ordenador? ¿Es posible disponer de calculadoras con software portable? ¿Qué aspectos deberían mejorar las calculadoras para que se extendiera más su uso? ¿Qué mejoras hay que hacer en los modelos actuales para que las prestaciones favorezcan cada vez más el aprendizaje y la enseñanza? ¿Qué complementos deberían acompañar a las calculadoras actuales - sensores, pantallas para retroproyector, software conjunto calculadora-ordenador, etc?

¿Qué ventajas presentan las calculadoras actuales frente a los ordenadores? ¿Qué inconvenientes? ¿Los precios son excesivos? ¿La heterogeneidad de modelos es un problema? ¿Pueden coexistir el software específico de matemáticas de los ordenadores con las calculadoras gráficas? ¿Se podrían compatibilizar los programas para que fueran exportables a calculadoras gráficas y viceversa?

- **Algunas respuestas:**

El soporte gráfico es una ayuda importante, sobre todo para los que tienen más dificultades. Por ello, parece que debería potenciarse el uso de calculadoras gráficas en cualquier nivel educativo.

Es importante poder programar la calculadora o, en su defecto, poder tener una hoja de cálculo, ahora que tienen pantallas tan grandes, también ayuda al alumno a "crear" sus propias herramientas. La posibilidad de unir geometría y álgebra es también muy importante.

El historial de operaciones en una calculadora es muy importante, y es una lastima que en las serie ES se borre al apagarse.

Realmente los modelos mas novedosos de calculadoras tienen prestaciones espectaculares, desde integrar numérica y simbólicamente hasta hojas de cálculo, todo en la palma de la mano. Pero ¿no sería interesante abrir el sistema, es decir, que las calculadoras pudieran soportar applets java o algo similar?. Esto redundaría en beneficio de los que las usamos. Si la ClassPad tuviera una ranura para tarjetas SD mucho mejor.

La serie ES ofrece buenas posibilidades de aplicación, entre otras la posibilidad de hacer tablas de funciones. Si la calculadora no puede graficar al menos tendría que hacer tablas, esto no perjudica en nada la capacidades de los alumnos.

Parece cada vez mas necesario poder contar con un emulador de la calculadora para poder mostrar con el videoprojector a los alumnos lo que hay que ir pulsando y lo que les debería ir apareciendo en la pantalla

No sería de extrañar que en un futuro próximo la ClassPad de CASIO introduzca algunas novedades importantes, como, por ejemplo, que el emulador sea un software portable, que no necesite instalación previa en el ordenador, sino que se ejecute directamente desde el lápiz de memoria.

Lo que si estaría fenomenal es una mayor intercambiabilidad entre el software de la ClassPad (y en general de cualquier calculadora gráfica) con el software usual de un

ordenador de sobremesa. Actualmente ya es posible pasar hojas de cálculo de Microsoft Excel a la fx-9860.

Será posible muy pronto la escritura a mano en pantalla. El equipo de I+D de Casio en Oregón ya están trabajando en ello y es de suponer que otras marcas también.

Aunque están prohibidas en los exámenes de Selectividad, las calculadoras programables pueden servir para repasar y profundizar conocimientos (además de que se pueden resetear en el momento de iniciar el examen).

## 7. La resolución de problemas con calculadoras

Muchos profesores piensan que las calculadoras solamente son útiles para hacer cálculos. Sin embargo, muchas investigaciones muestran que, cuando los estudiantes usan calculadoras en clase, son capaces de proponer, plantear y resolver nuevos problemas que surgen de modo natural al usar calculadoras. El papel de la calculadora es doble: por una parte, genera nuevos retos, nuevas preguntas, nuevos problemas. Por otra parte, favorece el desarrollo de estrategias de resolución de problemas, tales como análisis de patrones, búsqueda de regularidades numéricas, elaboración y comprobación de modelos, generalizar y particularizar, conjeturar y poner a prueba la conjetura, etc.

¿Qué tipo de calculadora es más apropiada para favorecer el desarrollo de estrategias de resolución de problemas? ¿Hay diferencias entre calculadoras elementales, científicas, gráficas y simbólicas cuando se aborda la resolución de problemas? ¿Cuáles son estas diferencias?

¿Qué tipo de problemas sería posible y deseable abordar usando calculadoras? Por ejemplo, con la incorporación de programas de geometría dinámica a las calculadoras gráficas, es posible plantear y resolver problemas sobre construcciones y lugares geométricos. ¿Qué problemas pueden abordarse con los diferentes tipos de calculadora? ¿Cuáles son las estrategias de resolución que se favorecen con el uso de calculadoras?

Además de los problemas, el currículo recomienda que los estudiantes aborden pequeñas investigaciones sobre contenidos matemáticos. ¿Es ficticio, real o posible que los estudiantes investiguen con calculadoras en el aula? ¿Cómo se desarrollarían esas investigaciones con calculadora?

### • Algunos ejemplos de problemas:

- Cinco veces un número al que sumamos 8 veces otro nos da 35.5. Si a dos veces el primer número le quitas 4 veces el segundo obtenemos un número 3.8, pero negativo. Si al primer número le quitas la mitad del segundo obtienes 2.4 veces la suma de los dos. ¿De qué números estamos hablando?
- Problemas de Geometría del triángulo. En los textos actuales, la resolución de triángulos se resume en sólo 4 ejercicios repetitivos. En prácticamente ningún libro se empieza el problema dibujando, sino que se transforma en una rutina de aplicación de teoremas y resolución de ecuaciones. Las calculadoras gráficas no

sólo ayudan a la resolución algebraica del problema (resolución de sistemas de ecuaciones bastante pesados) sino que dan la posibilidad de ver gráficamente y con rapidez la solución del problema, algo más importante que la simple resolución algebraica.

- c) En la página web [www.mauriciocontreras.es](http://www.mauriciocontreras.es) se pueden encontrar ejemplos del uso del cuadro de medidas de la aplicación Geometría de la ClassPad, en particular para resolver problemas de Geometría analítica. La tecnología permite racionalizar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

## 8. Calculadoras gráficas y simbólicas en ESO y Bachillerato

La aparición de las calculadoras gráficas en los años 80 supuso una auténtica revolución, al hacer más accesible el tratamiento de algunos contenidos matemáticos relacionados con el análisis de funciones. Cuando se incorporaron las calculadoras con sistema CAS (también llamadas algebraicas) la revolución se incrementó, al ser posible resolver problemas algebraicos y de cálculo que hasta entonces estaban fuera del alcance de las aulas. Es decir, la incorporación de las nuevas calculadoras gráficas y simbólicas en Secundaria y Bachillerato supone, de hecho, un cambio en el currículo. Esto ha sido así hasta el punto de que muchos profesores (y administradores) incrementaron sus desconfianzas hacia el uso de calculadoras, ya que suponían un riesgo real a la supervivencia de unas clases basadas en la mera repetición de cálculos tediosos y monótonos. Todavía hoy esas reticencias perviven (al igual que las clases repletas de cálculos aburridos y eternos con lápiz y papel).

“Es que hoy la calculadora ya lo hace todo, hasta integrales... Entonces, ¿cómo van a aprender mis alumnos a resolver sistemas de ecuaciones, si basta que pulse unas teclas o use un lápiz táctil para tener resuelto el sistema?”. Sin embargo, investigaciones recientes señalan que la incorporación de calculadoras CAS en las aulas favorece un estudio diferente del Álgebra, ya que se puede dedicar más tiempo a lo que realmente interesa, la modelización, el planteamiento, reflexión, generalización y discusión de los problemas y menos tiempo a las técnicas de cálculo.

Al usar calculadoras gráficas, es posible también que la enseñanza del Álgebra se transforme radicalmente y deje de ser a base de ejercicios repetitivos. Por ejemplo, en EEUU, el álgebra no es solo el estudio de los polinomios o las fracciones algebraicas, sino el estudio de los patrones, las relaciones, las funciones, los modelos y el cambio en contextos diversos. Esta nueva visión del Álgebra, siempre ligada al estudio de las funciones, mejora el aprendizaje y ha sido posible gracias a la generalización del uso de la calculadora gráfica en todos los niveles educativos.

La nueva visión que aporta el uso de calculadoras gráficas o programas de ordenador, ayudan a comprender el significado de formas equivalentes de expresiones, ecuaciones, inecuaciones, etc. y con el uso de la utilidad de álgebra simbólica, esto se hace mucho más didáctico y pedagógico que el lápiz y papel.

Este tipo de actividades complementadas con herramientas TIC alertan para que al resolver por métodos algebraicos una ecuación, se compruebe siempre si la solución

pertenece al dominio de las funciones que determinan ambos miembros de dicha ecuación. Inculca al alumnado la idea de que muchos mecanismos matemáticos utilizados habitualmente en el aula dan lugar a soluciones no válidas. La introducción de métodos de resolución alternativos a los tradicionales es esencial para perfeccionar la capacidad de "comprensión" y reforzamiento de conceptos. Son un complemento ideal para la adquisición de las competencias básicas.

## 9. Las calculadoras gráficas y simbólicas en Selectividad

Las calculadoras gráficas y simbólicas se usan cada vez con más frecuencia en Secundaria, Bachillerato y Universidad, pero... ¿qué ocurre en Selectividad? La situación es bastante desigual, según diferentes comunidades autónomas, en algunas su uso está prohibido, mientras que en otras se tolera, aunque no oficialmente. Sin embargo, en muchos países de nuestro entorno (Alemania, Portugal, EEUU, ...), no existe ninguna prohibición y, de hecho, los exámenes de selectividad se adecuan al uso de calculadoras gráficas y simbólicas en el desarrollo de la prueba. La Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) emitió hace ya tiempo un comunicado a favor del uso de cualquier tipo de calculadora (en particular, las gráficas) en las pruebas de acceso a la Universidad.

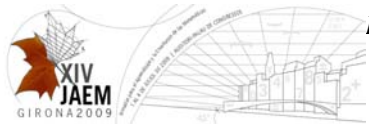
¿Qué ocurre en otros países de nuestro entorno y qué ocurre aquí? ¿Cómo deberían adecuarse los exámenes teniendo en cuenta que debería usarse en ellos la calculadora gráfica y/o simbólica? ¿Qué es lo que se debe evaluar y cómo debe evaluarse en una prueba de selectividad, cuando se dispone libremente de calculadoras gráficas y/o simbólicas?

El gasto de la administración en dotación TIC para los centros es muy considerable, el gasto en formación del profesorado en este ámbito es muy importante. Sin embargo, las PAU se hacen con lápiz y papel. Esto es contradictorio, por un lado se empuja a utilizar determinadas herramientas y por otro se presiona para que no se use. Con el uso de las calculadoras en las PAU pasa tres cuartos de lo mismo, si se recoge su uso en la normativa, ¿por qué se coarta su uso en el Bachillerato prohibiéndolas en las PAU?

El retraso que llevamos aquí es considerable, en relación con los países de nuestro entorno. Por ejemplo, en la Selectividad de Alemania está permitido todo tipo de calculadoras; de hecho hay dos tipos de exámenes: a) con calculadora gráfica, y b) con calculadora simbólica algebraica (CAS). Los contenidos matemáticos son prácticamente los mismos para ambos tipos de examen. La diferencia estriba en cómo se plantean los problemas, qué datos se facilitan y qué es lo que se pregunta. En la versión con calculadoras CAS, los problemas son abiertos, no se da la función, hay de modelizar de la manera más adecuada al contexto del problema.

La calculadora gráfica (sin CAS) es obligatoria en Portugal desde 1º de Secundaria. En la página web <http://edu.beltraocoelho.pt> se pueden descargar en pdf, exámenes nacionales portugueses resueltos con calculadoras gráficas.

Las administraciones educativas deberían preocuparse por generalizar cursos de formación sobre calculadoras gráficas y algebraicas, tanto para profesores de



Secundaria, como para profesores de Universidad. Y además, esto es urgente, porque si no se hace quedaremos a la cola de Europa. En este foro han salido los ejemplos de Portugal y Alemania. Pero si sacamos los ejemplos del resto de países europeos nos echaríamos a temblar.

## 10. Bibliografía

Fielker, D.S. (1986). *Usando las calculadoras con niños de 10 años*. Generalitat Valenciana. Conselleria d'Educació

Todd, Ph., Siebold, M. y Maguire, B. (2002). *Obtención del máximo rendimiento de la classpad*. Saltire software inc., beaverton or. [Www.saltire.com](http://www.saltire.com).

Gjon, G. y Andersen, T. (2003). *Shapes and numbers. Mathematical activities on classpad 300*. Casio Europe gmbh. [www.casio-europe.com](http://www.casio-europe.com). Germany.

Barrios, L, Camacho, A y otros. (2007). *Matemáticas con calculadora gráfica. Unidades didácticas*. Saem Thales. Granada.

Martín, A. (2000). *Cálculo 2000. Matemáticas con calculadora gráfica*. División didáctica Casio.

Martín, A. y Álvarez, R. (2000). *Selectividad y PAU con calculadora gráfica. Universidad de Oviedo*. Librería Cervantes. Oviedo.

Rodrigo, j, y otros. (2004). *El estudio de funciones con calculadora gráfica*. SEMCV. Valencia.

Contreras, M. (2006). *El currículo de matemáticas con la Classpad 300*. Valencia.

Paditz, L. (2008). Trad. Daniel Vila. *Modelos matemáticos y aplicaciones científico-técnicas*. División didáctica Casio.

Baldrich, J. (1990). *Aprendiendo a usar la calculadora / aplicaciones matemáticas*. División didáctica Casio.

Página web aulacasio: [www.aulacasio.com](http://www.aulacasio.com).

Página web de Abel Martín: <http://classpad.tk>

Página web de Jose Antonio Mora: <http://jmora7.com/>

Página web de Mauricio Contreras: [www.mauriciocontreras.es](http://www.mauriciocontreras.es)