SOLUCIONS MARÇ 2017

Autor: Rafael Martínez Calafat. Professor jubilat de Matemàtiques

Març 1: Trobar els valors de k de manera que $5n^3+4n+k$ siga múltiple de 3 per a tot n natural

Nivell: Preparació Olimpíada Matemàtica Espanyola (OME).

Solució: Com es tracta de la divisibilitat per 3, considerem residus mòdul 3. Tenim:

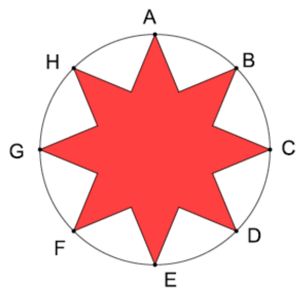
$$n = 0(3) \;\; \Rightarrow \;\; \left\{\begin{matrix} 5n^3 = 0(3) \\ 4n = 0(3) \\ k = k(3) \end{matrix}\right\} \;\; \Rightarrow 5n^3 + 4n + k = k(3)$$

$$n = 1(3) \;\; \Rightarrow \;\; \left\{\begin{matrix} 5n^3 = 2(3) \\ 4n = 1(3) \\ k = k(3) \end{matrix}\right\} \;\; \Rightarrow 5n^3 + 4n + k = k(3)$$

$$n = 2(3) \;\; \Rightarrow \;\; \left\{\begin{matrix} 5n^3 = 1(3) \\ 4n = 2(3) \\ k = k(3) \end{matrix}\right\} \;\; \Rightarrow 5n^3 + 4n + k = k(3)$$

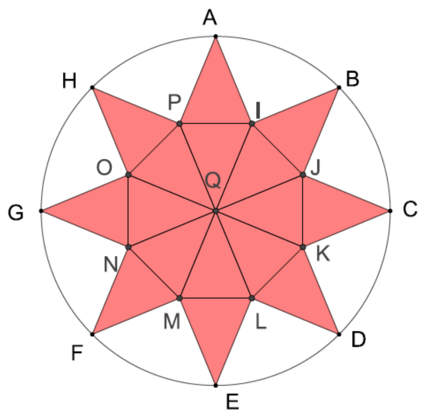
Per tant, $5n^3+4n+k$ és múltiple de 3 per a tot n natural sii k és múltiple de 3

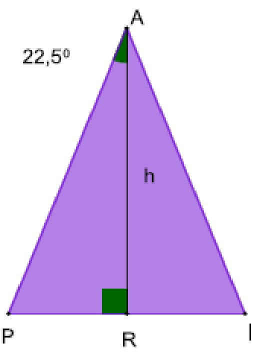
Març 2, 3: Calcular l'àrea i el perímetre d'una estrela regular de huit puntes inscrita en una circumferència de radi 1



Nivell: A partir de 4ESO.

Solució: L'estrela es descompon en 16 triangles isòsceles iguals amb alçaria sobre el costat desigual, igual a ½ (perquè dos alçaries coincideixen amb el radi de la circumferència inicial). Amés, l'angle desigual, per exemple, ∠A es igual al doble de l'angle inscrit ∠FAE, que és l'angle central ∠FQE (=360°/8) = 45°





Tindrem:

$$\mathrm{tg}(22{,}5^\circ) = \begin{cases} = \sqrt{\dfrac{1-\cos(45^\circ)}{1+\cos(45^\circ)}} = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{2}/_2}{1+\sqrt{2}/_2}} = \sqrt{3-2\sqrt{2}} \\ = \dfrac{\mathrm{PI}/_2}{1/_2} = \mathrm{PI} \end{cases}$$

$$\mathrm{A_e} = 16 \cdot \mathrm{A_t} = 16 \cdot \frac{\mathrm{PI} \cdot \mathrm{h}}{2} = 4\sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

Per al perímetre tenim:

$$\cos(22{,}5^\circ) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1+\cos(45^\circ)}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}/_2}{2}} = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}} \\ = \dfrac{\mathrm{h}}{\mathrm{AP}} = \dfrac{1}{2 \cdot \mathrm{AP}} \end{cases}$$

$$\mathrm{P_e} = 16 \cdot \mathrm{AP} = \frac{16}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

(*) Si per a calcular tg (22,5°) utilitzem:

$$\mathrm{tg}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = \frac{\mathrm{tg}(\mathrm{x})+\mathrm{tg}(\mathrm{y})}{1-\mathrm{tgx}\cdot\mathrm{tgy}} \;\Rightarrow\; 1 = \mathrm{tg}(45^\circ) = \frac{2\cdot\mathrm{tg}(22{,}5^\circ)}{1-\mathrm{tg}^2(22{,}5^\circ)} \;\Rightarrow\; 1 = \frac{2\mathrm{z}}{1-\mathrm{z}^2} \;\Rightarrow\; \mathrm{z}$$
$$= 1 \pm \sqrt{2} \;\Rightarrow\; \mathrm{tg}(22{,}5^\circ) = \sqrt{2}-1 \text{ (perquè } \mathrm{tg}(22{,}5^\circ) > 0)$$

es plega a:

$$\mathrm{A_e} = 16 \cdot \mathrm{A_t} = 16 \cdot \frac{\mathrm{PI}\cdot\mathrm{h}}{2} = 4\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Març 4: ¿Quins elements tenen en comú les successions: $a_n = 13n - 2$; $b_k = 11k - 7$?

Nivell: Preparació OME.

Solució: Vegem si ambdós col·leccions tenen algun element en comú. Si 13n – 2 = 11k – 7, tindrem que 13n + 5 = 11k

n	13n + 5	k = (13n + 5)/11
1	18	18/11
2	31	31/11
3	44	4

Es dir, en les dues col·leccions està el nombre 37 (per a n = 3 i k = 4). Els elements de les col·leccions poden reescriure's com:

$a_m = 13m + 37$, amb $m \in \{-2, -1, 0, 1, \ldots\}$ $(a_1 = 11 = 13m + 37 \Rightarrow m = -2)$

$b_q = 11q + 37$, amb $q \in \{-3, -2, -1, 0, \ldots\}$ $(b_1 = 4 = 11q + 37 \Rightarrow q = -3)$

Si hi ha més elements en comú deuen verificar: 13m + 37 = 11q + 37 $\Rightarrow$ 13m = 11q. I açò últim es verifica si: m = 11r i q = 113s. Es dir, els elements comuns a ambdós col·leccions són:

$$c_t = 11\cdot 13\cdot t + 37 = 143\cdot t + 37, \text{ per a } t\in N$$

Març 5: Calcular les tres últimes xifres de 2017^{2017}

Nivell: Preparació OME.

Solució: Tenim per el binomi de Newton:

$$(2017)^{2017} = (2000+17)^{2017} = \sum_{k=0}^{2017} \binom{2017}{k} \cdot 2^k \cdot 1000^k \cdot 17^{2017-k}$$

$$= \binom{2017}{0} 17^{2017} + \left(\sum_{k=1}^{2017} \binom{2017}{k} \cdot 2^k \cdot 1000^{k-1} \right) \cdot 1000$$

Per tant, les tres últimes xifres de 20017^{2017} són les tres últimes xifres de 17^{2017}.

Tenim per el binomi de Newton:

$$(17)^{2017} = (10+7)^{2017} = \sum_{k=0}^{2017} \binom{2017}{k} \cdot 10^k \cdot 7^{2017-k}$$

$$= 7^{2017} + 10 \cdot \binom{2017}{1} \cdot 7^{2016} + 100 \cdot \binom{2017}{2} \cdot 7^{2015} + 1000N$$

Per tant, las tres últimes xifres de 17^{2017} són las tres últimes xifres de 7^{2017} més las dues últimes xifres de ($7^{2016}\cdot 2017$) multiplicades per 10 més l'última xifra de ($2033136\cdot 7^{2015}$) multiplicada per 100. Busquem les tres últimes xifres de 7^n per càlcul directe:

n	7^n acaba en
0, 20, …..(n = 0(20)	001
1, 21, ….(n = 1(20))	007
2, 22, ….(n = 2(20))	049
3, 23, …(n = 3(20))	343
4, 24, ….(n = 4(20))	401
5, 25, … (n = 5(20))	807
6, 26, ….(n = 6(20))	649
7, 27, ….(n = 7(20))	543
8, 28, …(n = 8(20))	801
9, 29, ….(n = 9(20))	607
10, 30, ….(n = 10(20))	249
11, 31, …(n = 11(20))	743
12, 32, …(n = 12(20))	201

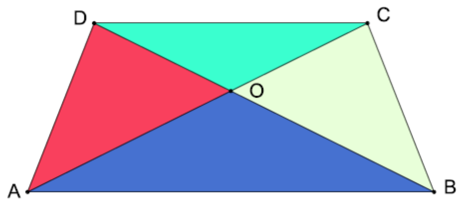
13, 33, ...(n = 13(20))	407
14, 34, ...(n = 14(20))	849
15, 35, ...(n = 15(20))	943
16, 36, ...(n = 16(20))	601
17, 37, ...(n = 17(20))	207
18, 38, ...(n = 18(20))	449
19, 39, ...(n = 19(20))	143

Com 2017 = 20·100 + 17 tenim que 2017 = 17(20); 2016 = 16(20); 2015=15(20). I amb això:

Les tres últimes xifres de 7^{2017} són 207. Les dues últimes xifres de $2017 \cdot 7^{2016}$, multiplicades per 10 són les dues últimes xifres de 2017 multiplicades per les últimes xifres de $7^{20º6}$, multiplicades per 10, es a dir (....601·2017·10 =) 170. L'última xifra de $2033136 \cdot 7^{2015}$, multiplicada per 100 són (.....136·.....943·100 =) 800.

Es a dir, les tres últimes xifres de 2017^{2017} son 177

Març 6, 7: Siga donat un trapezi equilàter ABCD. Si AB = 11; CB = DA = DC = 5. Trobar àrees i perímetres dels triangles △ADO, △ADB i △ADC



Nivell: Preparació OME i OMS.

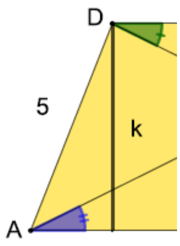
Solució: Per a l'alçaria del trapezi, tenim:

$k^2 + 9 = 25 \Rightarrow k = 4$

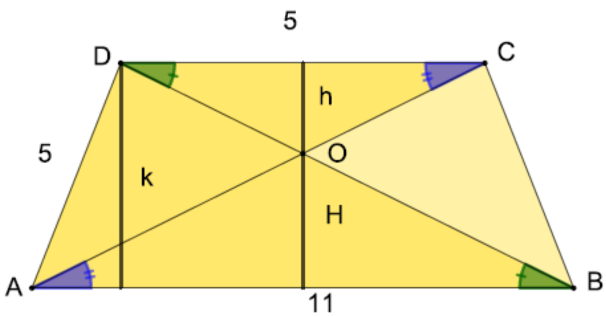
Amés, tenim que ΔDOC és semblant al ΔAOB perquè els angles de color verd i blau són iguals per alterns interns.

D'ací:

$$\frac{5}{11} = \frac{h}{H} \Rightarrow 5H = 11h$$



$$\frac{11-5}{2} = 3$$

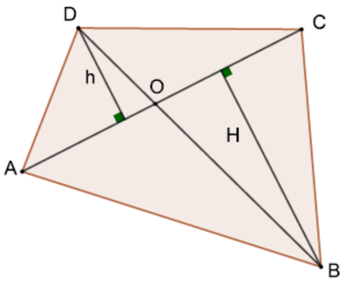


Queda plantejat el sistema:

$$\left.\begin{matrix} h + H = 4 \\ 5H = 11h \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad H = \frac{11}{4}; \quad h = \frac{5}{4}$$

D'ací:

$$A_{\Delta ODC} = \frac{5 \cdot {}^{5}\!/_{4}}{2} = \frac{25}{8}; \quad A_{\Delta ABO} = \frac{11 \cdot {}^{11}\!/_{4}}{2} = \frac{121}{8}$$



Recordem, ara què, en un quadrilàter ABCD es compleix:

$A_{\Delta AOD} \cdot A_{\Delta OBC} = A_{\Delta AOB} \cdot A_{\Delta DOC}$ degut a que:

$$A_{\Delta AOD} \cdot A_{\Delta OBC} = \frac{AO \cdot h}{2} \cdot \frac{OC \cdot H}{2} = \frac{OC \cdot h}{2} \cdot \frac{AO \cdot H}{2}$$
$$= A_{\Delta DOC} \cdot A_{\Delta ABO}$$

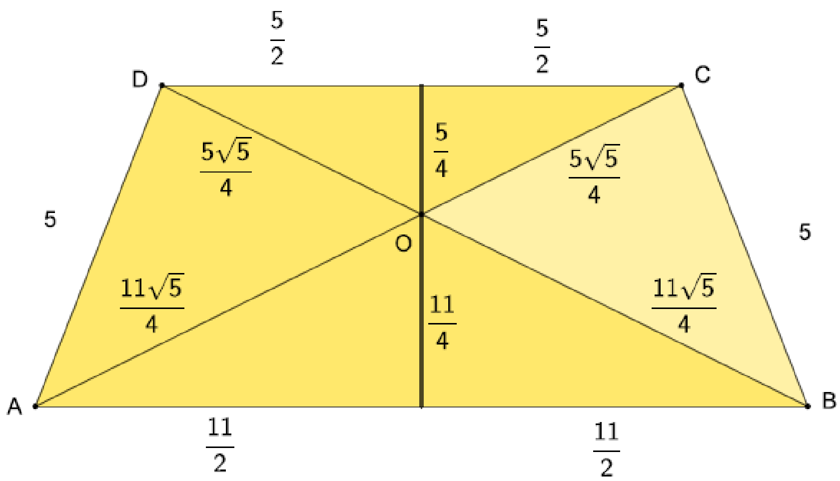
Aplicant l'anterior, al cas que tenim entre mans, tenim, degut a que $A_{\Delta DOC} = A_{\Delta COB}$ (per simetria) = x

$$\frac{25}{8} \cdot \frac{121}{8} = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{3025}{64}} = \frac{55}{8}$$

Per a els demés triangles tenim:

$$A_{\Delta ADC} = A_{\Delta DAO} + A_{\Delta DOC} = \frac{55}{8} + \frac{25}{8} = 10; \quad A_{\Delta ADB} = A_{\Delta DAO} + A_{\Delta AOB} = \frac{55}{8} + \frac{121}{8} = 22$$

Per a els perímetres, aplicant Pitàgores als triangles rectangles, una vegada conegudes h i H:



$P_{\Delta ADO} = 5 + \frac{11\sqrt{5}}{4} + \frac{5\sqrt{5}}{4} = 5 + \sqrt{5}$; $P_{\Delta ADB} = 5 + 11 + 4\sqrt{5} = 16 + 4\sqrt{5}$; $P_{\Delta ADC} = 5 + 5 + 4\sqrt{5} = 10 + 4\sqrt{5}$

Març 8: ¿Què nombres tenen en comú les successions $a_n = 2n - 16$ i $b_k = 5 \cdot 15^{k-1}$

Nivell: Preparació OME.

Solució: Si suposem que hi ha algun element en comú en les dues col·leccions, tenim:

$$2n - 6 = 5^k \cdot 3^{k-1}$$

Però açò es impossible perquè el membre de la dreta es un nombre imparell (al ser el producte de imparells: 3 i 5) i el de la esquerra es parell

Març 9: Resoldre

$$\left.\begin{array}{r}|x^2-y^2|=2\\ x^2+y^2=-2xy\end{array}\right\}$$

Nivell: A partir de 4ESO.

Solució: El sistema proposat es equivalent als sistemes:

$$1.-\begin{cases} x^2-y^2=2\\ x^2+y^2=-2xy\end{cases} \qquad 2.-\begin{cases} x^2-y^2=-2\\ x^2+y^2=-2xy\end{cases}$$

Per al primer tenim:

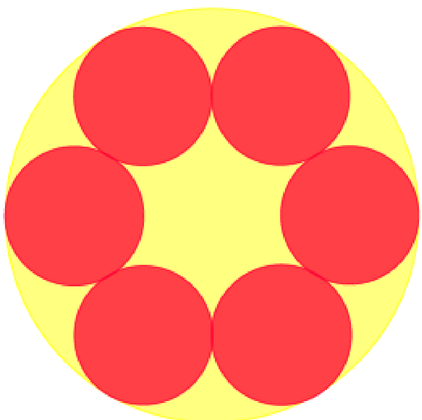
$$\begin{cases} x^2-y^2=2\\ x^2+y^2=-2xy\end{cases} \Rightarrow\ x^2=2+y^2\ .\quad 2+y^2+y^2=-2y\sqrt{2+y^2}\ \Rightarrow\ (1+y^2)^2$$
$$=y^2(2+y^2)\ \Rightarrow\ 1+2y^2=2y^2\ \Rightarrow \text{Sense solució}$$

Per al segon tenim:

$$\begin{cases} x^2-y^2=-2\\ x^2+y^2=-2xy\end{cases} \Rightarrow\ x^2=-2+y^2\ .\quad -2+y^2+y^2=-2y\sqrt{-2+y^2}\ \Rightarrow\ (-1+y^2)^2$$
$$=y^2(-2+y^2)\ \Rightarrow\ 1-2y^2+y^4=y^4-2y^2\ \Rightarrow \text{Sense solució}$$

Per tant, el sistema proposat no té solució.

Març 10, 11.- Què condició deu complir el radi de una circumferència R per a que puga dibuixar-se dins d'ella sis cercles iguals i de radi 1, tangents entre ells i tangents a la circumferència donada? I si se demana dibuixar huit cercles amb la mateixa condició?

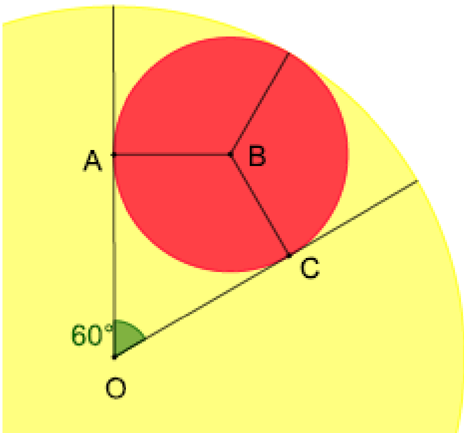


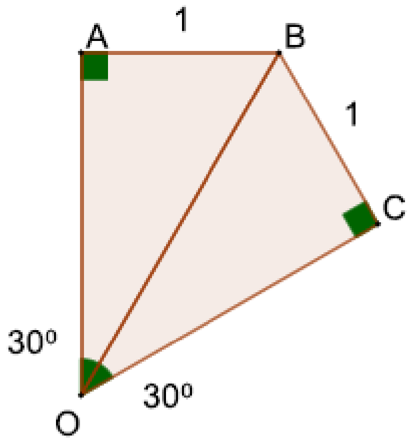
Nivell: Batxillerat. Preparació OME.

Solució: Siga R el radi del cercle en el interior del qual s'ajusten els cercles de radi 1. Provarem:

$$R=3\ \Leftrightarrow\ (*)\begin{cases}\text{Es poden ajustar sis cercles de}\\ \text{radi 1 que sigen entre sí tangents}\\ \text{i tangents al cercle de radi R.}\end{cases}$$

Si es compleix la condició (*) cada cercle de radi 1 s'ajusta en una cunya d'angle central (360°/6 =) 60°

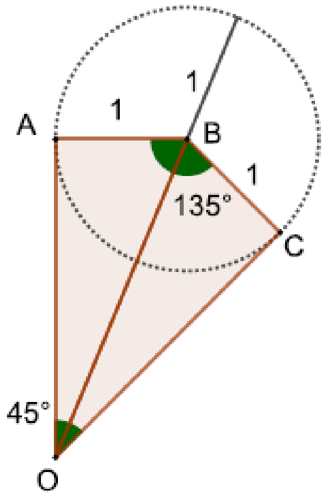


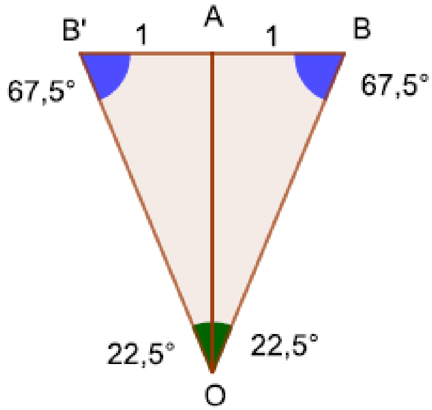


Ara, els triangles ΔOAB y ΔOBC són iguals perquè AB = BC (= 1), OB es comú als dos i són rectangles en A i C. Per tant necessàriament ∠AOB = ∠BOC = 30°. Per tant, ΔOAB (ΔOBC) es un triangle 30° - 60° - 90°. Així que OB = 2 i R = 3.

L'altra implicació es demostra seguint al revés el raonament anterior.

Per al cas de huit cercles, tenim que cada cercle de radi 1 ha d'estar dins d'un sector circular d'angle central (360°/8 =) 45°





Per el teorema dels sinus:

$$\frac{B'B}{\text{sen}\,(45°)} = \frac{OB}{\text{sen}(67{,}5°)} \quad \Rightarrow \quad OB = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Perquè :

$$\text{sen}(67{,}5°) = \sqrt{\frac{1-\cos(135°)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos(45°)}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$

I per tant R =$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} + 1$

Març 12: Quins valors fan que y=2x+m^2 i y=mx-2m es tallen en el tercer quadrant?

Nivell: Batxillerat.

Solució: Exigirem que les solucions del sistema:

$$\begin{cases} y = 2x + m^2 \\ y = mx - 2m \end{cases}$$

complisquen que $x \leq 0$ i $y \leq 0$. Tenim:

$$2x + m^2 = mx - 2m \;\Rightarrow\; 2x - mx = -m^2 - 2m \;\Rightarrow\; (2-m)x = -m(m+2)$$

Si m = 2 les rectes considerades resulten ser y = 2x + 4 i y = 2x – 4, que son rectes paral·leles i per tant no es tallen. Per a $m \neq 2$, tenim:

$$x = \frac{m(m+2)}{m-2} \;;\quad y = 2\frac{m(m+2)}{m-2} + m^2 = \frac{m(m^2+4)}{m-2}$$

Si $m - 2 > 0$ aleshores $m > 2 > 0$ i resulta $x > 0$. Si $m - 2 < 0$ pot ser $m \in [0, 2[$, i en aquest cas x i y son negatives (al ser les dues $\frac{+}{-}$). Si $m < 0$ tenim que $y > 0$ (ja que es $\frac{-}{-}$). Per tant per a $m \in [0, 2[$ les rectes es tallen en el tercer quadrant.

Març 13: Es genera el nombre N escrivint, un a continuació de l'altre, els primers 2016 nombres naturals. Quin és el residu de dividir N per 288?

Nivell: Preparació de OME.

Solució: Como $288 = 2^5 \cdot 9$, escriurem N com un nombre múltiple de 2^5 i de 9 més altre natural (menor que 288). Per la unicitat de la divisió tindrem que eixe segon natural serà el residu sol·licitat per el problema.

Per a que un nombre siga múltiple de 2^5, les últimes cinc xifres ha de ser múltiple de 2^5 (= 32). Les últimes cinc xifres de N són 52016. Com $52016 = 1625 \cdot 32 + 16$ (= 52000 + 16), tenim que qualsevol nombre que acabe en 52000 es múltiple de 32. Tindrem:

N = 1234·······20152016 = 1234·······20152000 + 16 = N' + 16 amb N' múltiple de 32

Vegem ara si N' és múltiple de 9:

$$\sum = \begin{Bmatrix} \text{suma dels 2015} \\ \text{primers naturals} \end{Bmatrix} = \frac{1+2015}{2} \cdot 2015 = 2031120$$

$$\sum_{N'} = 2031120 + 2 = 2031122, \text{que no és múltiple de 9} \;\Rightarrow\; N' \text{ no és múltiple de 9}$$

Restem a N', 32 i passem a N''

N = 1234·······20152016 = 1234·······20151968 + 48 = N'' + 48 amb N'' múltiple de 32

$$\sum_{N''} = 2031120 + 24 = 2031144, \text{que no és múltiple de 9} \;\Rightarrow\; N'' \text{ no és múltiple de 9}$$

Tornem a restar a N'', 32 i passem a N'''

N = 1234·······20152016 = 1234·······20151936 + 80 = N''' + 80 amb N''' múltiple de 32

$$\sum_{N'''} = 2031120 + 19 = 2031139, \text{que no és múltiple de 9} \;\Rightarrow\; N''' \text{ no és múltiple de 9}$$

Tornem a restar a N''', 32 i passem a N''''

N = 1234·······20152016 = 1234·······20151904 + 112 = N'''' + 112 amb N'''' múltiple de 32

$$\sum_{N''''} = 2031120 + 14 = 2031134, \text{que no és múltiple de } 9 \;\Rightarrow\; N'''' \text{ no és múltiple de } 9$$

Tornem a restar a N'''', 32 i passem a N^v

N = 1234·······20152016 = 1234·······20151872 + 144 = N^v + 144 amb N^v múltiple de 32

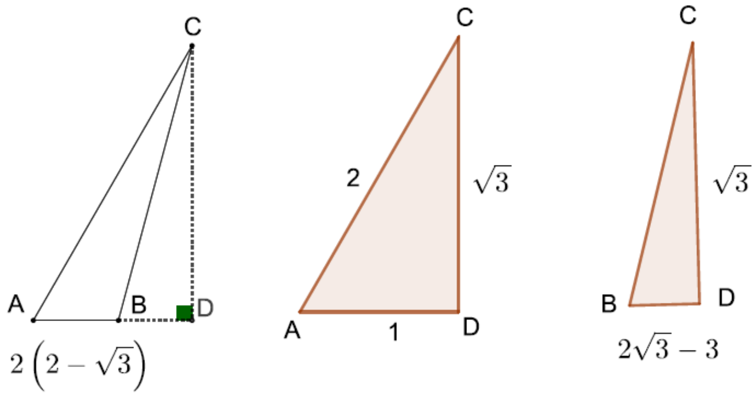
$$\sum_{N^V} = 2031120 + 18 = 2031138, \text{que és múltiple de } 9 \;\Rightarrow\; N^V \text{ és múltiple de } 9$$

Per tant, el resultat de dividir N per 288 es 144

Març 15, 16: En el de la figura es té AC = 2, AB = $2(2-\sqrt{3})$. Si la seua àrea és $2\sqrt{3}-3$, trobar BC i els angles del triangle

Nivell: 4ESO.

Solució:



Tindrem al calcular l'àrea:

$$A = \begin{cases} = 2\sqrt{3}-3 \\ = \dfrac{AB \cdot CD}{2} \end{cases} \;\Rightarrow\; 2\sqrt{3}-3 = \left(2-\sqrt{3}\right)\cdot CD \;\Rightarrow\; CD = \frac{2\sqrt{3}-3}{2-\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Per Pitàgores (en ΔACD) $CD^2 + AD^2 = AC^2$; $3 + AD^2 = 4$ $\Rightarrow$ ΔACD és un triangle 30°-60°-90° $\Rightarrow$ ∠A = 60°. Ara en ΔBDC:

$$BC = \sqrt{3+\left(2\sqrt{3}-3\right)^2} = \sqrt{24-12\sqrt{3}} = 2\sqrt{6-3\sqrt{3}}$$

Ara per el teorema dels sinus:

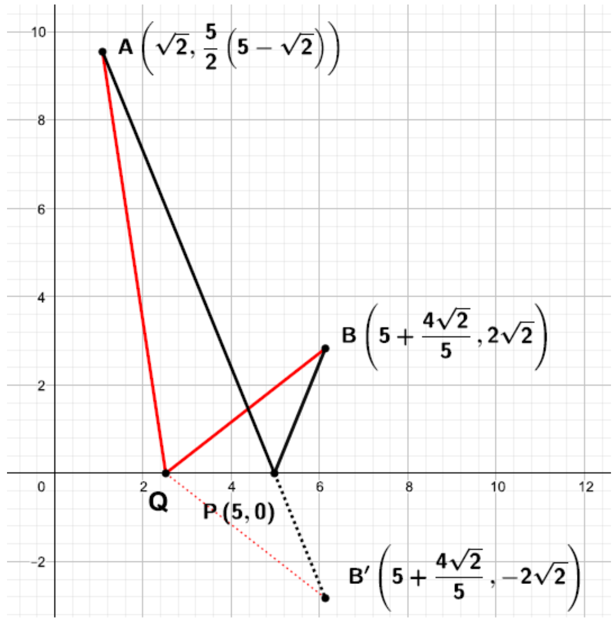
$$\frac{2(2-\sqrt{3})}{\mathrm{sen}C}=\frac{2\sqrt{6-3\sqrt{3}}}{\mathrm{sen}60°}\Rightarrow\ \mathrm{sen}C=\frac{(2-\sqrt{3})\cdot\mathrm{sen}60°}{\sqrt{6-3\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}}{2}\Rightarrow C$$
$$=\arcsen\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)=15°$$

Per últim: ∠B = 180° - 2(∠A + ∠C) = 180° - (60° + 15°) = 105°

Març 17: Considerem en el pla els punts A$\left(\sqrt{2},\ \frac{5}{20}(5-\sqrt{2})\right)$ i B$\left(5+\frac{4\sqrt{2}}{5},\ 2\sqrt{2}\right)$. Trobar el punt P de l'eix X tal que és mínima la suma de distancies de P a A i la de P a B

Nivell: Batxillerat.

Solució:



Considerem $B'\left(5+\frac{4\sqrt{2}}{5},-2\sqrt{2}\right)$, el simètric de B respecte a l'eix X. El punt P buscat és el punt en que se intersecten el segment AB' l'eix X, perquès si Q ≠ P és qualsevol altre punt de l'eix X, tenim al considerar el triangle ΔAQB0', (desigualtat triangular)

$$\begin{aligned}AQ+QB=AQ+QB'&>AB'\\&=AP+PB'\\&=AP+PB\end{aligned}$$

La recta que passa per A$\left(\sqrt{2},\ \frac{5}{20}(5-\sqrt{2})\right)$ y $B'\left(5+\frac{4\sqrt{2}}{5},-2\sqrt{2}\right)$ és:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},\qquad \frac{y-\frac{5}{2}(5-\sqrt{2})}{x-\sqrt{2}}=\frac{-2\sqrt{2}-\frac{5}{2}(5-\sqrt{2})}{5+\frac{4\sqrt{2}}{5}-\sqrt{2}},$$

$$\frac{2y-25+5\sqrt{2}}{2x-2\sqrt{2}}=-\frac{5}{2},\ \ y=-\frac{5}{2}x+\frac{25}{2}$$

La intersecció d'aquesta recta amb l'eix X és:

$$\left.\begin{aligned}y=-\frac{5}{2}x+\frac{25}{2}\\y=0\end{aligned}\right\}\ 0=-5x+25,\ \ x=5$$

Per tant el punt P buscat és P(5,0) i la mínima suma de distancies és:

$$d(P,A)+d(P,B)=\sqrt{\left(\sqrt{2}-5\right)^2+\frac{25}{4}\left(5-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(5-5-\frac{4\sqrt{2}}{5}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{41}\left(5-\sqrt{2}\right)}{2}+\frac{2\sqrt{58}}{5}=14{,}5264\ \ldots.$$

Març 18: Considerem la equació diofàntica $28a^2 - 14b^2 = 2016$. Calcular el mcd(a,b)

Nivell: Preparació OME.

Solució 1: (Sense resoldre la equació) Siga d un divisor de a i de b $\Rightarrow$ $d^2|a^2$, $d^2|b^2$ i per tant $14d^2|28\cdot a^2$ i $14d^2|14b^2$ $\Rightarrow$ $14d^2|28\cdot a^2 - 14b^2$ i d'ací $14d^2|2016$ ($2016 = 2^5\cdot 3^2\cdot 7$) $\Rightarrow$ $d^2|2^4\cdot 3^2$. Per la unicitat de la descomposició factorial en producte de primers tenim les següents possibilitats:

$$\left.\begin{array}{c}d^2=1 \quad\Rightarrow\quad d=1\\ d^2=2^2 \quad\Rightarrow\quad d=2\\ d^2=3^2 \quad\Rightarrow\quad d=3\\ d^2=2^4 \quad\Rightarrow\quad d=4\\ d^2=2^4\cdot 3^2 \quad\Rightarrow\quad d=12\end{array}\right\}\Rightarrow\ \mathrm{mcd}(a,b)=12$$

Solució 2: (Resolent l'equació)

$$28a^2-14b^2=2016;\quad 2^2\cdot 7a^2-2\cdot 7b^2=2^5\cdot 3^2\cdot 7;\quad 2\cdot 7(2a^2-b^2)$$
$$=2^5\cdot 3^2\cdot 7;\quad 2a^2-b^2=2^4\cdot 3^2\ \ (*)$$

I una solució particular és $a = b = 2^4\cdot 3^2$, perquè:

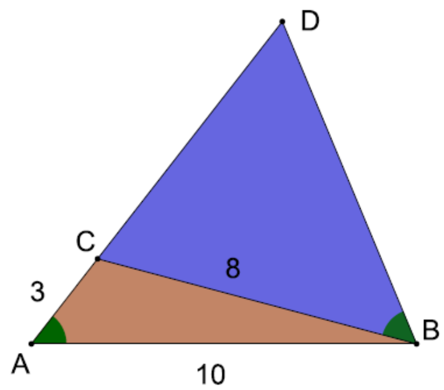
$$2a^2-b^2=2\cdot(2^4\cdot 3^2)^2-(2^4\cdot 3^2)^2=\ 2^4\cdot 3^2$$

Si d = mcd (a, b) aleshores 12|d (perquè 12 divideix a a i a b): Siga d =12Q (**). Com d|a i d|b siga a =Kd i b = Pd aleshores:

$$\left.\begin{array}{l}a=K12Q \ \Rightarrow\ 2a^2=2K^2 12^2Q^2\\ b=P12Q \ \Rightarrow\ b^2=P^2 12^2Q^2\end{array}\right\}\overset{(*)}{\Rightarrow} 2^4\cdot 3^2=2a^2-b^2=2K^2 12^2Q^2-P^2 12^2Q^2$$
$$=12^2Q^2(2K^2-P^2)=12^2\ \Rightarrow\ Q^2(2K^2-P^2)=1\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{c}Q^2=1\\ 2K^2-P^2=1\end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow\left(\text{de }(**)\right)\ \Rightarrow\ d=12\cdot 1=12$$

Per tant mcd (a, b) = 12

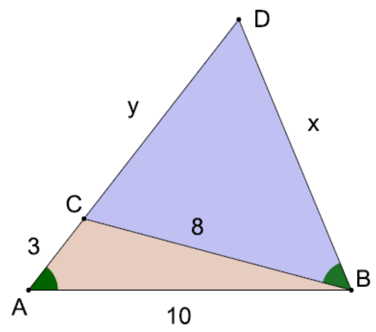
Març 19, 26: En la figura es coneixen els costats del triangle △ABC: AB = 10, AC = 3 i CB = 8. Se sap, a més que ∠CBD = ∠CAB. Calcular perímetre i àrea del triangle △CBD



Nivell: Preparació OMS.

Solució: Els triangles ΔDCB i ΔDAB són semblants ja que tenen l'angle ∠CDB en comú i ∠DCB = {suma dels angles del ΔABC =180°} = ∠CAB + ∠ABC = {∠CAB = ∠CBD} = ∠CBD + ∠ABC = ∠ABD. D'aquí:

$$\frac{8}{10}=\frac{y}{x}=\frac{x}{y+3}$$



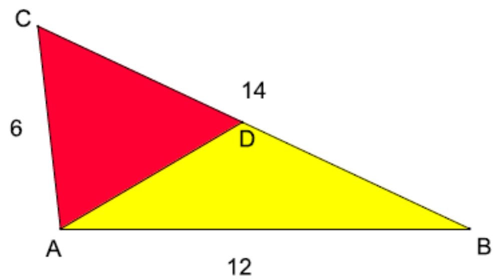
De les dues primeres: 4x = 5y. De la primera i de l'última: 4y + 12 = 5x. Resolent el sistema que generen tenim $x=\frac{20}{3},\ y=\frac{16}{3}$. Por tant, el perímetre del triangle ΔCBD és:

$$8+\frac{16}{3}+\frac{20}{3}=20$$

I la seua àrea és (apel·lant a la fórmula d'Heron):

$$A_{\Delta CBD}=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}=\frac{20\sqrt{7}}{3}$$

Març 20, 21: Considerem el triangle △ABC, amb AB = 12, BC = 14 i AC = 6. Què punt D, del costat CB, fa màxim el producte d'àrees dels triangles △ACD i △ADB?



Nivell: Preparació OMS.

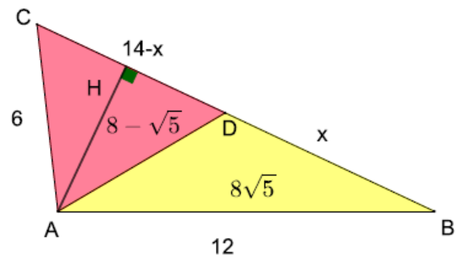
Solució: Utilitzares la fórmula d'Heron per a calcular l'àrea del triangle ΔABC:

$$A_{\Delta ABC}=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}=16\sqrt{5}$$

Siga ara x =$A_{\Delta ADB}$ i y =$A_{\Delta ACD}$, hem de maximitzar x·y subjecte a que x + y = $16\sqrt{5}$. Açò equival a maximitzar $x\cdot\left(16-\sqrt{5}\right)=f(x)=-x^2+16\sqrt{5}x$. Com f(x) es una funció polinòmica de segon grau, la seua representació gràfica és una paràbola invertida (perquè a = - 1 < 0) i d'ací que el seu vèrtex correspon a un màxim. Tenim:

$$x_v=\frac{-b}{2a}=\frac{-16\sqrt{5}}{-2}=8\sqrt{5},\quad y_v=16\sqrt{5}-x=8\sqrt{5}$$

El producte d'àrees màxim serà: $xy=8\sqrt{5}\cdot 8\sqrt{5}=320$



Per a localitzar el punt D, trobarem la distancia de B a D. Tenim:

$$\Delta ABC \Rightarrow \left\{\begin{matrix} A = 16\sqrt{5} \\ A = \dfrac{14 \cdot H}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow H = \frac{16\sqrt{5}}{7}$$

I per a ΔADB

$$\Delta ADB \Rightarrow \left\{\begin{matrix} A = 8\sqrt{5} \\ A = \dfrac{x \cdot H}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 8\sqrt{5} = \frac{8x\sqrt{5}}{7} \Rightarrow x = 7$$

Es dir, el punto D és el punt mitjà del costat BC.

Març 22: Quants valors de p hi ha per a els quals $3^p - 1$ divideix a $3^{2016} - 1$?

Nivell: Preparació OME

Solució: Sabem que $x - 1$ divideix a $x^k - 1$, perquè:

$$\begin{array}{lllr|l}
x^k & & & -1 & x-1 \\ \cline{5-5}
-x^k & +x^{k-1} & & & x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + x + 1 \\ \cline{1-4}
 & x^{k-1} & & -1 & \\
 & -x^{k-1} & +x^{k-2} & & \\ \cline{2-4}
 & & x^{k-2} & -1 & \\
 & & \cdots\cdots & & \\ \cline{3-4}
 & & x & -1 & \\
 & & -x & +1 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Per tant $3^p - 1$ divideix a $3^{pk} - 1$. Per tant, hi ha tants divisors de p que compleixen l'enunciat com divisors tinga 2016 ($= 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$). Els divisors de 2016 són de la forma $2^r \cdot 3^s \cdot 7^t$ amb $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $s \in \{0, 1, 2\}$ y $t \in \{0, 1\}$. Per tant, hi ha $(5 + 1)\cdot(2 + 1)\cdot(1 + 1) = 36$ valors possibles de p tals que $3^p - 1$ divideix a $3^{2016} - 1$.

Març 23: Trobar els punts de la gràfica de:

$$\mathbf{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y} = \frac{1}{8}}$$

Les coordenades dels quals són nombres enters

Nivell: Preparació OME.

Solució: El problema proposat es equivalent a resoldre en $\mathbb{Z}$ l'equació:

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y} = \frac{1}{8}$$

Tenim:

$$\frac{y-x^2}{x^2}=\frac{1}{8},\ \ 8y-8x^2=x^2y,\ \ y=\frac{8x^2}{8-x^2}=\frac{8x^2-64+64}{8-x^2}=-8+\frac{64}{8-x^2}$$

Com y ∈ Z tenim que 64 (= 2^6) ha de ser divisible per 8 – x^2. En altres paraules 8 – x^2 ha de ser un divisor de 64. Els possibles valors de 8 – x^2 són { ±1, ±2, ±4, ±8, ±16, ±32, ±64}

$$8-x^2=1;\ \ x^2=7;\ \ x\notin\mathbb{Z}$$

$$8-x^2=2;\ \ x^2=6;\ \ x\notin\mathbb{Z}$$

$$8-x^2=4;\ \ x^2=4;\ \ x=\pm 2;\ \ y=-8+\frac{64}{4}=8;\ \ \mathbf{(2,8);\ \ (-2,8)\ són\ solucions}$$

$$8-x^2=8;\ \ x^2=0;\ \ \text{imposible pues x es un denominador}$$

$$8-x^2=16;\ \ x^2<0$$

$$8-x^2=32;\ \ x^2<0$$

$$8-x^2=64;\ \ x^2<0$$

$$8-x^2=-1;\ x^2=9;\ \ x=\pm 3;\ \ y=-8+\frac{64}{-1}$$

$$=-72;\ \ \mathbf{(3,-72);\ \ (-3,-72)\ són\ solucions}$$

$$8-x^2=-2;\ \ x^2=10;\ \ x\notin\mathbb{Z}$$

$$8-x^2=-4;\ \ x^2=12;\ \ x\notin\mathbb{Z}$$

$$8-x^2=-8;\ x^2=16;\ \ x=\pm 4;\ \ y=-8+\frac{64}{-8}$$

$$=-16;\ \ \mathbf{(4,-16);\ \ (-4,-16)\ són\ solucions}$$

$$8-x^2=-16;\ \ x^2=24;\ \ x\notin\mathbb{Z}$$

$$8-x^2=-32;\ \ x^2=40;\ \ x\notin\mathbb{Z}$$

$$8-x^2=-64;\ \ x^2=72;\ \ x\notin\mathbb{Z}$$

Per tant hi ha sis punts que estan en la gràfica de la funció les coordenades dels quals són ambdós nombres enters.

Març 24: Hi ha algun dígit d de manera que N = 909d siga un nombre primer?

Nivell: Preparació OMS.

Solució: Per descomptat d no pot ser ni 0, ni 2, ni 4, ni 6, ni 8, ja que en qualsevol de eixos casos N seria divisible per 2. Tampoc pot ser d = 5 ja que, en aquest cas, N no seria divisible per 5. Tampoc d pot ser múltiple de 3 (d ≠ 3, d ≠ 9) ja que en aquestos casos N seria divisible per 3, al ser la suma dels seus dígits 18 + d. Caben llavors dues possibilitats:

1.- d = 7. Llavors N = 9097 i N seria múltiple de 11 ja que la diferència entre les seues xifres que ocupen lloc parell i les que ocupen lloc imparell seria (18 – 7 = 11) múltiple de 11, i per tant N seria múltiple de 11.

2.- d = 1. Llavors N = 9091. Per a vorer que es primer devem de comprovar que no es divisible per qualsevol primer inferior a $\left(\sqrt{9091}<\right)$ 100. Els primers inferiors a 100 són (por el garbell d'Eratòstenes) {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97}. Ara per divisió directa o utilitzant algun criteri de divisibilitat (per a cada primer del conjunt anterior menys els ja provats) tenim que 9091 és primer

Per exemple: ¿9091 és múltiple de 13?

$$9091 = 9090 + 1 = 909\cdot10 + 1 = 909\cdot(13-3) + 1 = 909\cdot13 + 1 - 909\cdot3 = 909\cdot13 - 2726$$

Per tant, 2726 és múltiple de 13 sii 9091 és múltiple de 13.

$$2726 = 272\cdot10 + 26 = 272\cdot(13-3) + 26 = 271\cdot13 - 810.$$

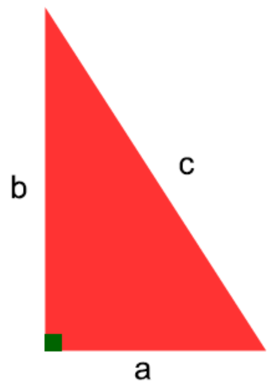
Per tant, 2726 és múltiple de 13 sii 810 és múltiple de 13. Com 810 no és múltiple de 13 (per divisió directa), 9091 no és múltiple de 13.

Març 25: D'un triangle rectangle se sap que els seus costats són naturals i que el catet menor més la hipotenusa dona 32. Calcular el seu perímetre i àrea

Nivell: Preparació OMS

Solució: De l'enunciat tenim la figura adjunta i que a +c = 32. Aplicant el teorema de Pitàgores

$$c^2 \begin{Bmatrix} = a^2 + b^2 \\ = (32-a)^2 = 32^2 - 64a + a^2 \end{Bmatrix} \Rightarrow b^2 = 32\cdot 2(16-a) = 8^2(16-a) \Rightarrow b = 8\cdot\sqrt{16-a}$$



Com a < b < c < 32 $\Rightarrow 8\sqrt{16-a} < 32 \Rightarrow \sqrt{16-a} < 4$

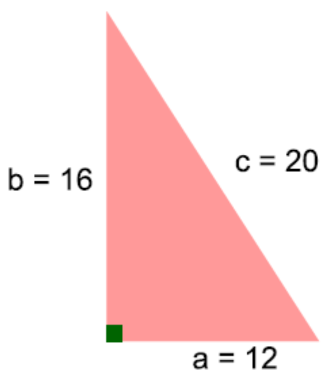
$\Rightarrow$ 16 – a $\in \{1, 2^2, 3^2\}$

Si 16 – a = 1 $\Rightarrow$ a = 15, b = 8, c = 32 – 15 = 17. No é vàlida, perquè, deu complir-se a < b < c.

Si 16 – a = 4 $\Rightarrow$ a = 12, b = 8·2 = 16, c = 32 – 12 = 20. Solució.

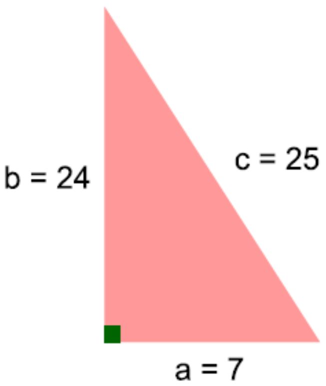
Si 16 – a = 9 $\Rightarrow$ a = 7, b = 8·3 = 24, c = 32 – 7 = 25. Solució.

Hi ha dos triangles que compleixen allò que s'ha exigit en l'enunciat:



$$\text{Perímetre} = 20 + 16 + 12 = 48$$

$$\text{Àrea} = \frac{a\cdot b}{2} = \frac{16\cdot12}{2} = 96$$



$$\text{Perímetre} = 25 + 24 + 7 = 56$$

$$\text{Àrea} = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{7 \cdot 24}{2} = 84$$

Març 27: Resoldre en els naturals el sistema:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x^4 + y^2 - z^2 = 977} \\ \mathbf{x^2 \cdot y = 2025} \end{aligned}\right\}$$

Nivell: Preparació OME.

Solució 1: Tenim $x^2 \cdot y = 2015 = 3^4 \cdot 5^2$. Per la unicitat de la descomposició factorial en nombres primers tenim que sols són possibles els següents casos:

1.- x = 1, y=2025. Substituint en la primera equació: $1^4 + 2025^2 - 977 = z^2 = 4099649 \Rightarrow z \notin N$

2.- x = 3, y=225. Substituint en la primera equació: $3^4 + 225^2 - 977 = z^2 = 49729 \Rightarrow z = 223$

3.- x = 5, y=81. Substituint en la primera equació: $5^4 + 81^2 - 977 = z^2 = 6209 \Rightarrow z \notin N$

4.- x = 15, y=9. Substituint en la primera equació: $15^4 + 9^2 - 977 = z^2 = 49729 \Rightarrow z = 223$

5.- x = 45, y=1. Substituint en la primera equació: $45^4 + 1^2 - 977 = z^2 = 4099649 \Rightarrow z \notin N$

Per tant les solucions del sistema són: x = 3, y = 225, z = 223 y x = 15, y = 9, z = 223

Solució 2: Tenim:

$$\begin{aligned}(x^2 + y + z) \cdot (x^2 + y - z) = (x^2 + y)^2 - z^2 = x^4 + y^2 - z^2 + 2yx^2 = 977 + 2 \cdot 2025 \\ = 5027 = 11 \cdot 457\end{aligned}$$

I altra vegada per la unicitat de la descomposició factorial en factors primers i donat que $x^2 + y + z \in N$ i ha de ser major que $x^2 + y - z$ tenim las següents possibilitats:

1.- $x^2 + y - z = 1$; $x^2 + y + z = 5027$. Sumant ambdós equacions i simplificant: $x^2 + y = 2514$. Tenim aleshores el sistema:

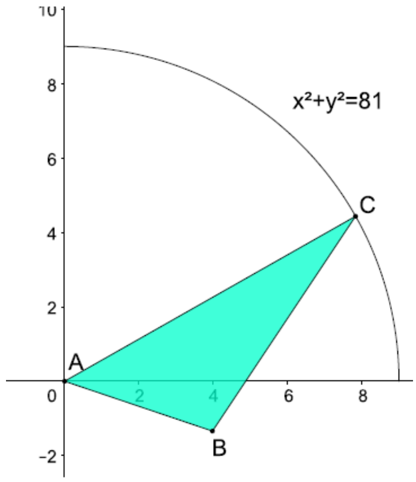
$$\left.\begin{aligned} x^2 + y = 2514 \\ x^2 \cdot y = 2015 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(y = \frac{2015}{x^2}\right); \; x^2 + \frac{2025}{x^2} = 2015; \; \Rightarrow \; x^2 \notin N$$

2.- $x^2 + y - z = 11$; $x^2 + y + z = 457$. Sumant ambdós equacions i simplificant: $x^2 + y = 234$. Tenim aleshores el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y = 234 \\ x^2 \cdot y = 2015 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(y = \frac{2015}{x^2}\right); \; x^2 + \frac{2025}{x^2} = 234; \; \Rightarrow \begin{cases} x = 15; \; y = 9 \\ x = 3; \; y = 225 \end{cases}$$

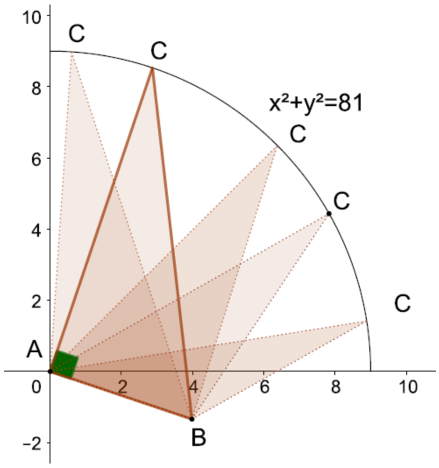
I per últim $z = x^2 + y - 11 = 234 - 11 = 223$

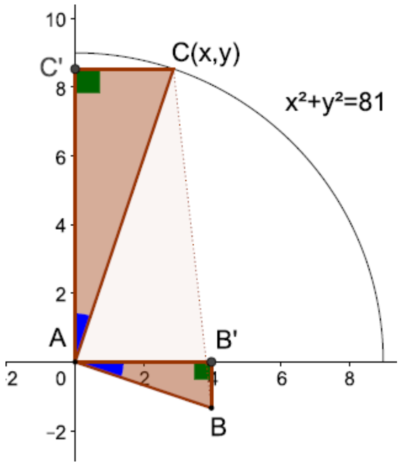
Març 28, 29: Considerem els punts A(0,0) i B$\left(4, -\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$. Trobar el punt C, del primer quadrant de $x^2 + y^2 = 81$ tal que és màxima l'àrea del triangle $\triangle$ABC. Trobar l'àrea i perímetre d'aquest triangle.



Nivell: Preparació OME.

Solució 1: Degut a que tots els triangles tenen la mateixa base, el triangle amb major àrea serà el que tinga major alçaria, i aquest és, el triangle rectangle en A. Per a aquest triangle tenim que els triangles ΔACC' i ΔABB' són semblants per ser rectangles i tenir igual l'angle de color blau, complint-se:





$$AB = \sqrt{16 + \frac{16}{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}};\quad AC = 9;\quad \frac{x}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{y}{4} = \frac{9}{\frac{8}{\sqrt{3}}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{9}{2} \\ y = \frac{9\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\}\ C\left(\frac{9}{2};\ \frac{9\sqrt{3}}{2}\right)$$

I açò ens permet trobar l'àrea i el perímetre del triangle sol·licitat en l'enunciat:

$$A = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{\frac{8}{\sqrt{3}} \cdot 9}{2} = 12\sqrt{3};\quad P = AB + AC + \sqrt{AB^2 + AC^2} = \frac{8}{\sqrt{3}} + 9 + \sqrt{\frac{64}{3} + 81}$$

$$= \frac{8\sqrt{921}}{3}$$

Solució 2: En conter de localitzar C per semblança de triangles podem localitzar C com la intersecció de la circumferència amb la recta perpendicular al segment AB que passa per A. Tindrem:

1.- Pendent de la recta que passa per A i B:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{0 + \frac{4}{\sqrt{3}}}{0 - 4} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

2.- Recta perpendicular a la recta que passa per A i B, que passa per A:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{1}{m} = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; y = \sqrt{3}x$$

3.- Intersecció d'aquesta recta amb la circumferència:

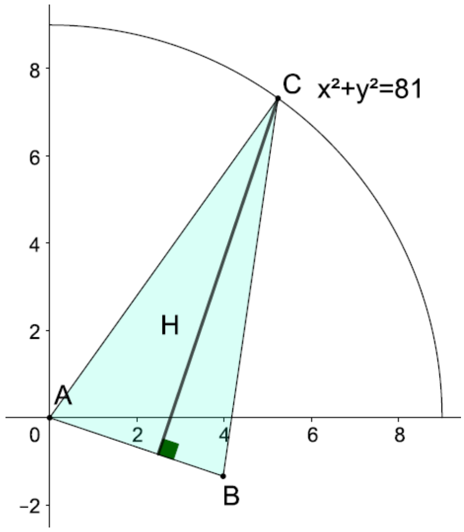
$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 81 \\ y = \sqrt{3}x \end{array}\right\} \Rightarrow\; x^2 + 3x^2 = 81 \;\Rightarrow\; x = \frac{9}{2} \text{ (la solució negativa es desprecia)}; \;\; y = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Solució 3: Tindrem

$$A = \frac{AB \cdot H}{2} = \frac{\frac{8}{\sqrt{3}} \cdot H}{2}$$

H és la distancia del punt C(x, y) a la recta que passa per AB

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0};\;\; \frac{y - 0}{x - 0} = \frac{-\frac{4}{\sqrt{3}} - 0}{4 - 0};\;\; y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$$



La distancia de C(x, y) a esta recta és:

$$d = (P(x_0;\; y_0);\;\; Ax + By = C) = \frac{|Ax_0 + By_0 - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$H = \left\{\begin{array}{c} (x; y), \text{està en el primer quadrant} \\ \Downarrow \\ \left|y + \frac{x}{\sqrt{3}}\right| = y + \frac{x}{\sqrt{3}} \end{array}\right\} = \frac{y + \frac{x}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}y + x}{2}$$

Por tant, hem de maximitzar:

$$A = \frac{\frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}y + x}{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}y + x\right)$$

Subjecte a que $x^2 + y^2 = 81$. Açò equival a maximitzar f(x), on:

$$f(x) = \left\{y = \sqrt{81 - x^2}\right\} = \sqrt{3}\sqrt{81 - x^2} + x$$

Per derivació:

$$f'(x) = 1 - \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{81-x^2}} = 0 \;\Rightarrow\; 1 = \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{81-x^2}} \;\Rightarrow\; \sqrt{81-x^2} = \sqrt{3}x \;\Rightarrow\; 81 - x^2 = 3x^2$$

$$\Rightarrow \text{(considerant no més solucions positives) } x = \frac{9}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{\sqrt{3}\sqrt{81-x^2} + \frac{x\sqrt{3}x}{\sqrt{81-x^2}}}{81-x^2} = -\frac{81\sqrt{3}}{(81-x^2)^{\frac{3}{2}}} < 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{9}{2} \text{ aporta màxim}$$

Per tant $C\left(\frac{9}{2};\ \frac{9\sqrt{3}}{2}\right)$

Març 30: Trobar les naturals n que al dividir a 2017 donen residu 17

Nivell: Preparació OMS.

Solució: Tindrem 2017 = nq + 17 (amb n > 17) $\Leftrightarrow$ 2000 = nq (con n > 17). Es a dir, busquem els divisors de 2000 majors que 17. Com $2000 = 2^4 \cdot 5^3$, tindrem:

$$\begin{cases} 2^0 \to \begin{cases} 5^0 \to 1 \\ 5^1 \to 5 \\ 5^2 \to 25 \\ 5^3 \to 125 \end{cases} \\ 2^1 \to \begin{cases} 5^0 \to 2 \\ 5^1 \to 10 \\ 5^2 \to 50 \\ 5^3 \to 205 \end{cases} \\ 2^2 \to \begin{cases} 5^0 \to 4 \\ 5^1 \to 20 \\ 5^2 \to 100 \\ 5^3 \to 500 \end{cases} \\ 2^3 \to \begin{cases} 5^0 \to 8 \\ 5^1 \to 40 \\ 5^2 \to 200 \\ 5^3 \to 1000 \end{cases} \\ 2^4 \to \begin{cases} 5^0 \to 16 \\ 5^1 \to 80 \\ 5^2 \to 400 \\ 5^3 \to 2000 \end{cases} \end{cases}$$

Hi ha ((4 + 1)·(3 + 1) =) 20 divisors, dels quals (1, 2, 4, 5, 10, 16) són menors o iguals que 17. Hi ha, per tant, (20 – 7 =) 13 nombres que són les solucions del problema

Març 31: La suma dels 13 naturals consecutius dona 1859, quants primers hi ha entre ells?

Nivell: Preparació OMS.

Solució: Siguen x, x + 1, x + 2, ………, x + 12, els naturals consecutius. Com sabem que la seua suma val 1859, tindrem:

$$1859 = 13\,x + (1 + 2 + 3 + \cdots + 12) = 13x + \frac{1+12}{2} \cdot 12 \;\Rightarrow\; x = 137$$

Per tant, els naturals consecutius són:

137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149.

Ara anem a vorer quins d'ells són primers, es dir no són divisibles per els primers menors que $\left(\sqrt{149} \approx 12{,}20\right)$ 12, es dir, no divisibles per 2, 3, 5, 7, 11.

138, 140, 142, 144, 146, 148 són divisibles per 2.

141, 147, són divisibles per 3 (perquè la suma dels seus dígits és múltiple de 3)

145 és divisible per 5 (acaba en 0 o 5)

147 és divisible per 7 (perquè 14·3 + 7 = 49 és múltiple de 7)

143 és divisible per 11 (perquè $\sum_{\text{pares}} - \sum_{\text{impares}} = \dot{\widehat{11}}$)

Ens queden: 137, 139 y 149, que són els primers preguntats per l'enunciat