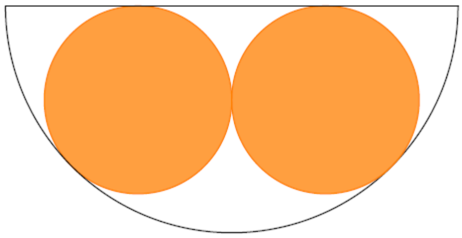
SOLUCIONS PROBLEMES AUTONÒMICA 2018 2n CICLE

PROBLEMA 1. EL BOL

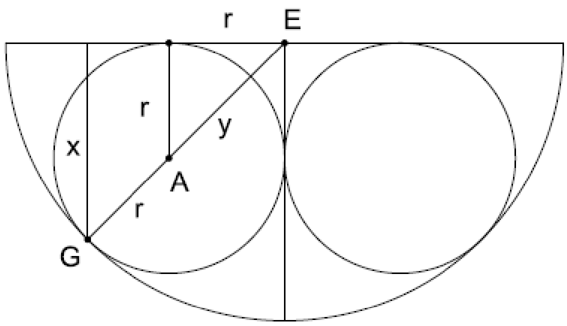
Tenim dues taronges de 5 cm de radi. Quina és l'altura mínima que ha de tindre un bol semiesfèric perquè es puguen posar les dues taronges sense que sobreïxen?

Una vegada posades les taronges al bol de l'apartat anterior, a quina altura respecto el fons quedarien els dos punts en què les taronges toquen el bol?



Solució:

a) Cridant r al radi de la taronja, y a la distància que hi ha del centre de la semiesfera del bol i R al radi del bol, del dibuix es dedueix que $y = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r \approx 7{,}071\ cm$ i per tant, $R = r + y = r + \sqrt{2} \cdot r \approx 12{,}071\ cm$. La clau està en que el centre de la circumferència del bol, el centre de la taronja i el punt de tangència estan alineats, doncs els radis vectors de ambdues circumferències són perpendiculars a la recta tangent al punt comú de tangència.



b) Per traure l'altura del punt de tangència, podem usar la semblança de triangles per traure la distància fins a la vora superior:

$$\frac{r}{\sqrt{2} \cdot r} = \frac{x}{R} \rightarrow x = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

I una vegada tinguem x, l'altura respecte al fons és

$$R - x = R - \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2} - 1) \cdot R}{\sqrt{2}} \approx 3{,}5355$$

PROBLEMA 2. ELS NOMBRES AMAGATS

Si x i y són dos nombres diferents a zero que compleixen que

$$x \cdot y = \frac{x}{y} = x - y,$$

quin és el valor de $x + y$?

Solució:

$$x \cdot y = \frac{x}{y} \quad \rightarrow \quad y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad y = \pm 1$$

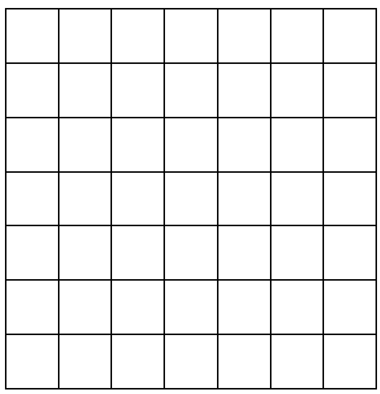
$$Si \;\; y = 1 \quad \rightarrow \quad x = x - 1 \quad \rightarrow \quad Absurde.$$

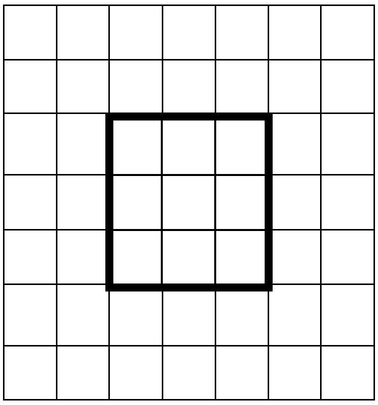
$$Si \;\; y = -1 \quad \rightarrow \quad -x = x + 1 \quad \rightarrow \quad 2x = -1 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \quad x + y = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

PROBLEMA 3.- Ingeni:

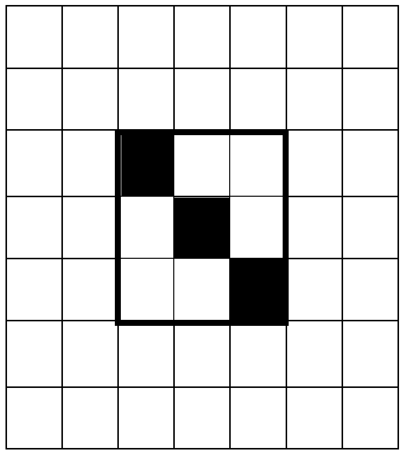
Siga donada una quadrícula 7x7 de color blanc. Es poden dibuixar tres cel·les de color negre de manera que en qualsevol quadrícula 5x5 haja tres cel·les de color negre? Es poden dibuixar deu cel·les de color negre de manera que en qualsevol quadrícula de 5x5 haja deu cel·les de color negre? Raona la teua contestació



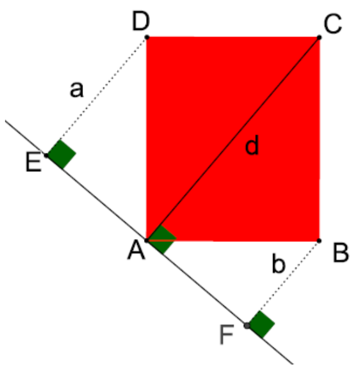


Solució:

Donada la graella 7x7, la graella remarcada en línies més grosses és la graella que està en qualsevol quadrícula 5x5 (és la intersecció de tots els quadrats 5x5 que es poden considerar en la graella). Per tant si pintem de negre qualsevol tres cel·les d'aquestes estaran en qualsevol quadrícula 5x5 . Per tant la contestació a la primera pregunta es sí, per exemple, dibuixant de negre les tres que ho estan en la figura d'abaix



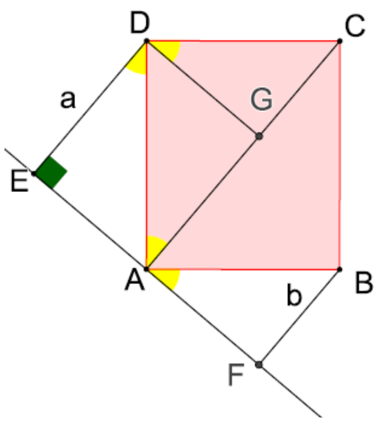
També, per aquesta raó, no es poden pintar deu cel·les de color negre de manera que tota quadrícula de 5x5 tinguen pintades deu cel·les de color negre. La desena estarà fora d'aquesta quadrícula 3x3 i per tant hi haurà una quadrícula 5x5 que tant sols tindrà nou cel·les pintades de negre



PROBLEMA 4.- Geometria:

Siga ABCD un rectangle . Els punts E, A i F estan alienats. Els segments DE, CA i BF son perpendiculars a EF. Si a és la longitud del segment DE i b és la longitud del segment FB, calculeu el perímetre i la àrea del rectangle en funció de a i b

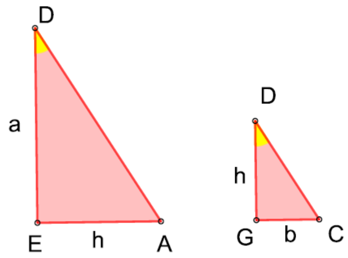
Solució: Comencem per calcular l'àrea: $A = 2 \cdot A_{\Delta ADC}$



Tracem DG $\perp$ AC. Aleshores:

1.-$\Delta DEA = \Delta DAG$, per ser semblants (al ser els dos rectangles i verificar-se $\angle EDA = \angle DAG$ per ser altern interns) i tenir la hipotenusa comuna.

2.- $\Delta AFB = \Delta DGC$, per ser semblants (al ser els dos rectangles i verificar-se $\angle FAB = \angle GDC$ per tenir els costats paral·lels) i tenir igual la hipotenusa (DC = AB). A més DG = AF = EA



3.- $\Delta DEA \approx \Delta DGC$ (per ser els dos rectangles i verificar-se que $\angle EDA = \angle GDC$, per tenir els costats perpendiculars). Per tant si $h = DG$, tenim:

$$\frac{a}{h} = \frac{h}{b} \;\Rightarrow\; h = \sqrt{a \cdot b}$$

Per tant:

$$\begin{aligned} A \;=\; 2 \cdot A_{\Delta ADC} \;&=\; 2 \cdot (A_{\Delta ADG} \cdot A_{\Delta DGC}) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{a \cdot b} + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \sqrt{a \cdot b}\right) \\ &= \sqrt{ab} \cdot (a + b) \end{aligned}$$

De manera alternativa:

$$A = AD \cdot AB = \sqrt{a^2 + ab} \cdot \sqrt{b^2 + ab} = (a + b)\sqrt{ab}$$

Per al perímetre:

$$P = 2(AD + DC) = \{\text{Pitàgores}\} = 2 \cdot \left(\sqrt{a^2 + ab} + \sqrt{b^2 + ab}\right) = 2\sqrt{ab}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$$

PROBLEMA 5.-

Considera N un nombre de 3 dígits diferents. Amb els dígits de N es formen tots els possibles nombres de 2 dígits diferents; després se sumen tots aquests nombres de 2 dígits i el resultat és S. Trobar tots els N tals que S és el doble de N.

SOLUCIÓ

Considerem N=abc. Els possibles nombres de dos dígits que es poden formar amb els dígits a, b i c són: ab, ac, ba, bc, ca, cb i la suma de tots ells és S.
És a dir ab+ ac+ ba+ bc+ ca+ cb = S. És a dir, S=2[10(a+b+c) + (a+b+c)] → S=2 [11(a+b+c)]
Per una altra banda, S= 2N i en conseqüència:
2 [11(a+b+c)] = 2(100a +10b+c) → 11(a+b+c) = 100a +10b+c → b = 89a - 10c, relació que han de complir els tres dígits a, b i c. que han de ser diferents i amb a diferent de zero.
Així doncs, a sols pot ser 1, ja que en altre cas b no seria un dígit. Així mateix, c ha de ser 8, ja que qualsevol altre valor implicaria que b no fora un dígit o seria negatiu. En conseqüència, b ha ser 9.
Així doncs, l'únic nombre possible és 198.