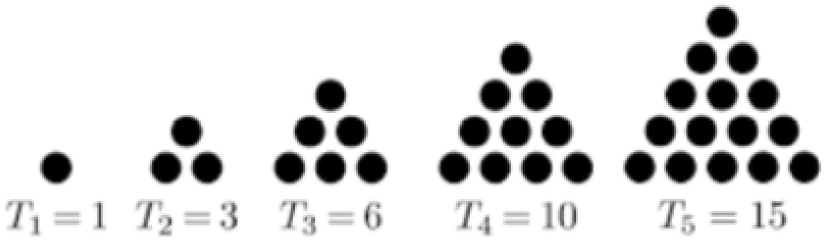
SOLUCIONS PROBLEMES OLIMPÍADA AUTONÒMICA 2018 1r CICLE

PROBLEMA 1: NOMBRES TRIANGULARS

L'estudi dels nombres i les seues relacions ha estat tradicionalment una de les disciplines més boniques en matemàtiques. En aquest camp, el pitagòrics van fer grans progressos i se'ls atribueix, entre d'altres, l'estudi dels nombres triangulars. S'anomenen triangulars perquè, com descriu la figura, són el nombre



d'elements necessaris per a crear un triangle equilàter:

Per tal de trobar l'enèsim nombre triangular podem aplicar la fórmula:

$$T_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}\ .$$

Per exemple, per a *n*=5 , trobem que $T_5 = \frac{5\cdot(5+1)}{2} = \frac{30}{2} = 15$, com ens mostra la figura de dalt.

Aquests nombres han resultat ser ben curiosos. Podries dir quins són els dos nombres triangulars consecutius que sumen 1764?

<u>SOLUCIÓ</u>:

La idea és que se n'adonen que la suma de dos nombres triangulars consecutius dóna un quadrat perfecte. A continuació comprovar que, efectivament, 1764 és un quadrat perfecte,

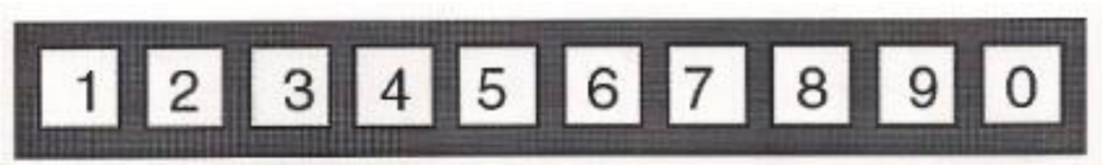
$1764=42^2$, i calcular els nombres triangulars 41 i 42:

$T_{41} = \frac{41\cdot(41+1)}{2} = \frac{41\cdot 42}{2} = 861$ i $T_{42} = \frac{42\cdot(42+1)}{2} = \frac{42\cdot 43}{2} = 903.$

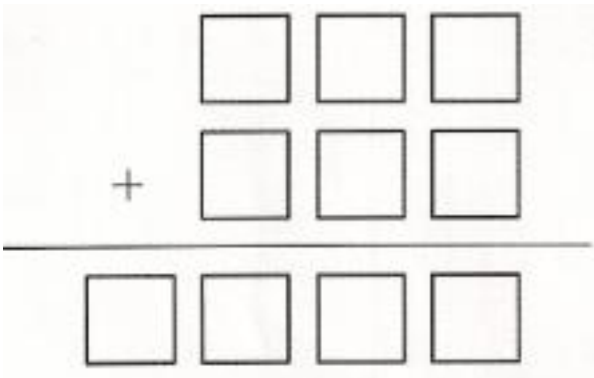
Per tant, la solució seria 1764=861+903.

PROBLEMA 2: SUMES DESCONEGUDES

Col·loca totes les xifres següents

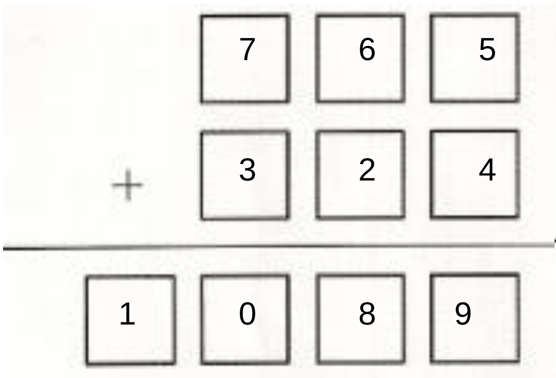


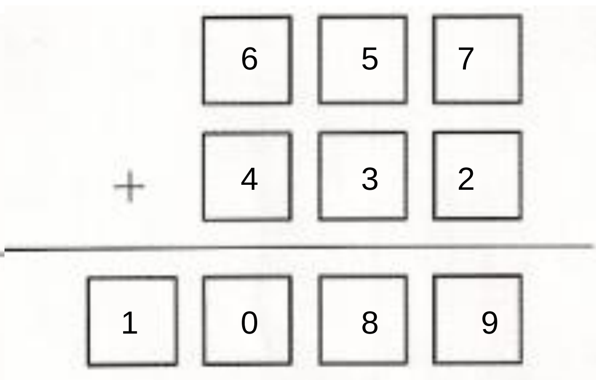
de manera que facen aquesta suma. Sabent que el resultat no pot començar per zero.



SOLUCIÓ:

Hi ha diverses solucions, algunes són les següents:





<u>PROBLEMA 3: PESADES</u>

Tenim 1 kg de sucre i necessitem pesar-ne 375 g per a fer-li el pastís d'aniversari a la Laia. Disposem d'una balança de platerets de precisió com podem veure en el dibuix i de dues peses; una de 200 g i l'altra de 50 g, com ho farem?

<u>SOLUCIÓ</u>:

Hi ha moltes solucions. Una d'elles és:

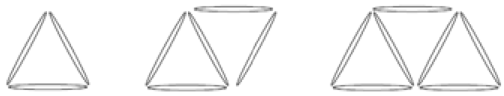
1r. Col·loquem les dues peses en un plateret. D'aquesta manera s'obtenen 250 g de sucre que es deixaran a part en una safata, prèviament preparada.

2n. Col·loquem la pesa de 50 g en un dels platerets i posem sucre en l'altre plateret fins equilibrar la balança. A continuació substituïm la pesa de 50 g per sucre, fins equilibrar, altra vegada, la balança. D'aquesta forma obtenim 100 grams de sucre, 50 g de cada plateret que es posen en la mateixa safata que abans. En aquest moment, tenim pesats 350 g, 250 g de la primera pesada i 100 g de la segona. Falten 25 grams.

3r. Per aconseguir els 25 grams que falten, pesem 50 g de sucre amb la pesa de 50 g. A continuació, llevem la pesa i repartim equitativament entre els dos platerets els 50 grams de sucre, fins que la balança estiga equilibrada. D'aquesta manera obtenim 25 g de sucre en cadascun dels dos platerets. Posem el contingut d'un dels platerets en la safata i així obtenim 375 g de sucre.

PROBLEMA 4: ESCURADENTS

Quants escuradents necessitarem per a formar **2018** triangles, com es veu en el dibuix, utilitzant un escuradents per a cadascun dels costats del triangle?
I si volguérem formar **x** triangles?



SOLUCIÓ:
Per a començar la resolució, podem fer una taula que relacione el nombre de triangles amb el nombre d'escuradents, com veiem a continuació:

Nombre de triangles, x	1	2	3	4	···	2018	···	x	
Nombre d'escuradents, N	3	5	7	9					

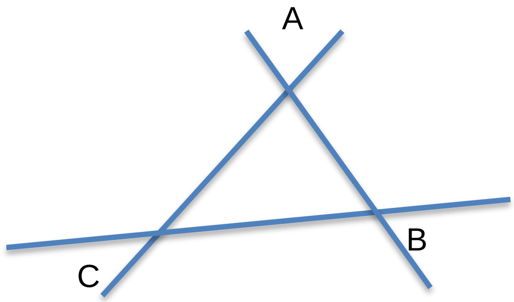
Veiem que el nombre d'escuradents sempre és el doble del nombre de triangles més 1:
Si x=1, aleshores: N = 2·1+1 = 3
Si x=2, aleshores: N = 2·2+1 = 5
Si x=3, aleshores: N = 2·3+1 = 7
Si x=4, aleshores: N = 2·4+1 = 9
....
Així, si x=**2018**, aleshores: N = 2·2018+1 = 4037. Per tant, per a formar 2018 triangles necessitarem 4037 escuradents.
En general, si volguérem fer **x** triangles, necessitaríem N = 2·x+1 escuradents.

PROBLEMA 5: VA DE RECTES

Quin és el nombre màxim de triangles que es poden formar amb 5 línies rectes? I amb **n** línies rectes?

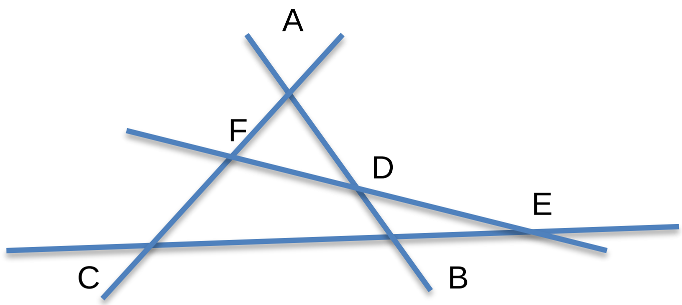
SOLUCIÓ:

Es necessiten almenys tres línies rectes per a formar un triangle:



El triangle format és el ABC.

Amb quatre línies es poden formar quatre triangles, que són: ABC, ADF, DEB i FEC.



Amb **cinc línies es poden formar deu triangles** i així dibuixant podríem completar una taula com la següent:

Nombre de rectes, n	1	2	3	4	5	…	n
Nombre de triangles, N_t	0	0	1	4	10	…	$N_t=\frac{1}{6}\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)$