SOLUCIONES SEPTIEMBRE 2016

Soluciones extraídas de los libros:

XII CONCURSO DE PRIMAVERA 2008

XV CONCURSO DE PRIMAVERA 2011

XVI CONCURSO DE PRIMAVERA 2012

Obtenibles en http://www.concursoprimavera.es#libros

AUTORES: Colectivo "Concurso de Primavera". Comunidad de Madrid.

Septiembre, 1: Hallar el área de la región encerrada por la curva formada por los puntos (x, y) tales que

$$|x-1| + |y-1| = 1$$

Nivel: Bachillerato

Solución: Dibujemos la curva $|x-1| + |y-1| = 1$

$$\text{Si } x,y \geq 1 \Rightarrow \begin{Bmatrix} |x-1| = x-1 \\ |y-1| = y-1 \end{Bmatrix} \Rightarrow |x-1| + |y-1| = x-1+y-1 = 1 \Rightarrow \mathbf{y+x=3}$$

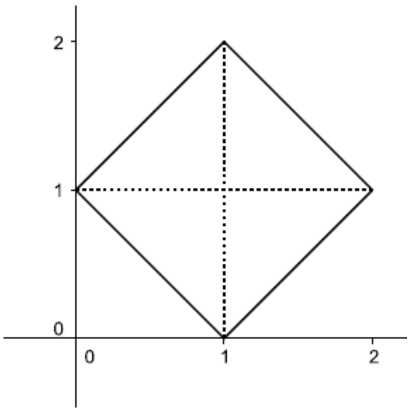
$$\text{Si } x<1, y \geq 1 \Rightarrow \begin{Bmatrix} |x-1| = 1-x \\ |y-1| = y-1 \end{Bmatrix} \Rightarrow |x-1| + |y-1| = 1-x+y-1 = 1 \Rightarrow \mathbf{y-x=1}$$

$$\text{Si } x \geq 1, y<1 \Rightarrow \begin{Bmatrix} |x-1| = x-1 \\ |y-1| = 1-y \end{Bmatrix} \Rightarrow |x-1| + |y-1| = x-1+1-y = 1 \Rightarrow \mathbf{x-y=1}$$

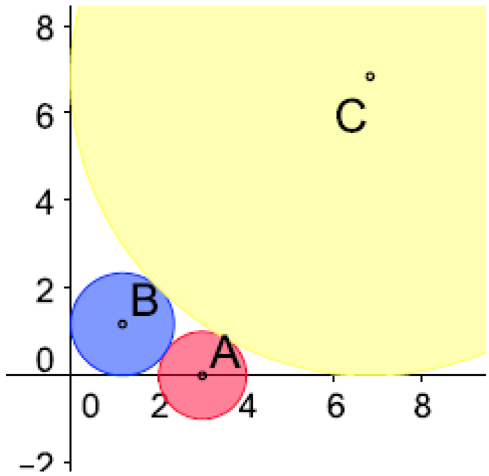
$$\text{Si } x,y<1 \Rightarrow \begin{Bmatrix} |x-1| = 1-x \\ |y-1| = 1-y \end{Bmatrix} \Rightarrow |x-1| + |y-1| = 1-x+1-y = 1 \Rightarrow \mathbf{y+x=1}$$

La curva resulta ser un cuadrado de lado $\sqrt{2}$

Su área es 2



Septiembre, 2-3: Hay dos circunferencias tangentes a la parte positiva de los ejes de coordenadas y tangentes exteriores a la circunferencia de centro A(3, 0) y de radio 1. Hallar los radios



Nivel: Bachillerato. Segundo ciclo de la ESO

Solución: Tendremos de los dos triángulos rectángulos de la figura:

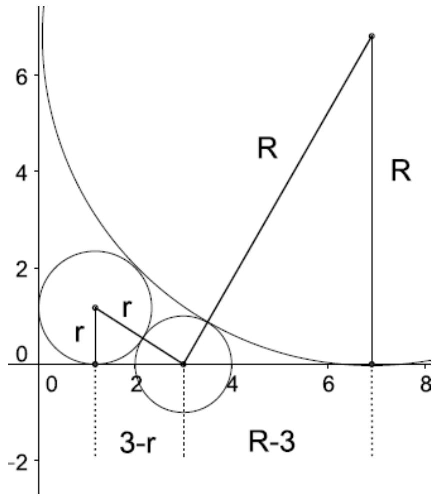
$$R^2 + (R - 3)^2 = (R + 1)^2$$

$$(r + 1)^2 = r^2 + (3 - r)^2$$

Por tanto, R y r son soluciones de la ecuación

$$(x + 1)^2 = x^2 + (x - 3)^2$$

es decir, de la ecuación $x^2 - 8x + 8 = 0$, cuyas soluciones son $4 + 2\sqrt{2} = \mathrm{R}$ y $4 - 2\sqrt{2} = \mathrm{r}$



Septiembre 4: En el segmento BC sean D y E que lo dividen en tres segmentos iguales. Hallar k tal que $\mathrm{BD}^2 + \mathrm{BE}^2 = \mathrm{k} \cdot \mathrm{BC}^2$

Nivel: Segundo ciclo de la ESO

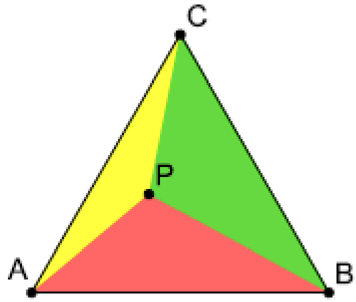
Solución:

x	x	x	
B	D	E	C

La exigencia del enunciado equivale a: $x^2 + (2x)^2 = k \cdot (3x)^2 \Rightarrow x^2 + 4x^2 = k \cdot 9x^2 \Rightarrow 5x^2 = 9kx^2 \Rightarrow$

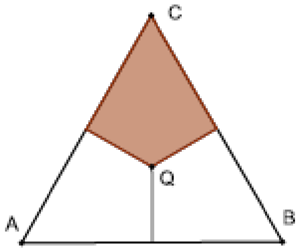
$5 = 9k \Rightarrow \mathrm{k} = \frac{5}{9}$

Septiembre, 5-6: En el interior de un triángulo equilátero ABC se elige un punto P. ¿Cuál es la probabilidad de que el área del triángulo ABP sea mayor que la del triángulo ACP y la del triángulo BCP?



Nivel: Bachillerato. Preparación OME

Solución 1: Si Q es el ortocentro del triángulo tenemos que los casos favorables son la región sombreada y los casos posibles son todos los puntos del triángulo ΔABC. Luego la probabilidad pedida es 1/3



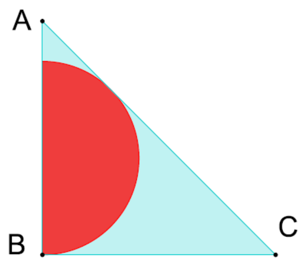
Solución 2: Ordenando las áreas de los tres triángulos de mayor a menor hay 6 ordenaciones posibles de las que el área del triángulo ΔABP estará en primer lugar en dos ordenaciones. Como la elección de P es aleatoria, la probabilidad pedida es 2/6 = 1/3

Septiembre 7: Hallar los valores enteros de p tales que: $\mathbf{4}^{\left(\frac{p-1}{p+1}\right)} \in \mathbb{Z}$

Nivel: segundo ciclo de la ESO

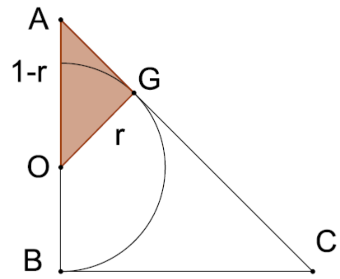
Solución: $4^{\left(\frac{p-1}{p+1}\right)} = 2^{\left(\frac{2p-2}{p+1}\right)}$, será entero solamente cuando $\frac{2p-2}{p+1} = 2 - \frac{4}{p+1}$ sea un entero mayor o igual a cero. Deberá ocurrir que $|p+1|$ sea un divisor de 4 tal que $2 \geq \frac{4}{p+1}$. Así pues p + 1 ∈{-1, -2, -4, 2, 4}, por lo que resultarán 5 valores de p, a saber: -2, -3, -5, 1, 3

Septiembre 8-9: En la figura ABC es un triángulo rectángulo en B, con AB = BC = 1. Calcular el radio del semicírculo



Solución: Si O es el centro de la semicircunferencia y G el punto de tangencia tenemos que $\Delta ABC \approx \Delta AOG$ (al ser rectángulos y tener un ángulo común). De aquí:

$$\frac{1-r}{r}=\frac{\sqrt{2}}{1} \Rightarrow r=\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$$



Septiembre 10: Hallar:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{99}{100!}$$

Nivel: Preparación OME

Solución: Añadimos $\frac{1}{100!}$ a la suma pedida y entonces la suma resulta ser 1, ya que:

$$\left(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{98}{99!}+\frac{99}{100!}\right)+\frac{1}{100!}=\left(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{98}{99!}\right)+\frac{100}{100!}$$
$$=\left(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{98}{99!}\right)+\frac{1}{99!}=\cdots\cdots=\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}=1$$

Por lo tanto, la suma vale $1-\frac{1}{100!}$

Septiembre 11: Resolver:

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}}$$

Nivel: Bachillerato. 4ESO

Solución:

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}} \Rightarrow \sqrt{2}=1+\frac{2+x}{4+2x+1}=\frac{3x+7}{2x+5} \Rightarrow x=\frac{7-5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-3}=\sqrt{2}-1$$

Septiembre 12: Resolver:

$$x+\sqrt{x^2+\sqrt{x^3+1}}=0$$

Nivel: Bachillerato. 4ESO

Solución:

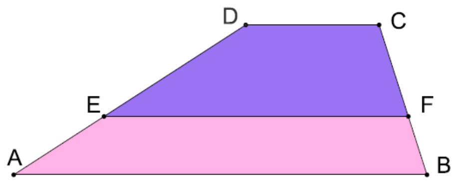
$$x+\sqrt{x^2+\sqrt{x^3+1}}=0 \Rightarrow x^2+\sqrt{x^3+1}=(-x)^2 \Rightarrow \sqrt{x^3+1}=0 \Rightarrow x=-1$$

Septiembre 13: Para una cierta sucesión, la suma S_n, de los n primeros términos viene dada por: $S_n = n^3+3$**.** Calcular el décimo término de la sucesión

Nivel: Segundo ciclo de la ESO

Solución: Obviamente $a_n = S_n - S_{n-1}$. Por tanto: $a_{10} = S_{10} - S_9 = 1003 - 732 = 271$

Septiembre 14-15: En los trapecios de la figura DC = 3, AB = 9, AD = 6, BC = 4 y los trapecios EFCD y ABFE tienen igual perímetro y bases paralelas. Hallar AE y ED

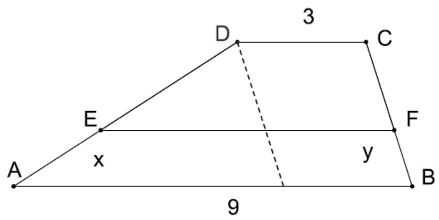


Nivel: Segundo ciclo de la ESO. Preparación OMS

Solución: Llamamos x a AE e y a FB, entonces la condición del enunciado nos lleva a:

$9 + x + y = 6 - x + 3 + 4 - y \Rightarrow x + y = 2$ (*)

Por otra parte, trazando por D la paralela a CB, obtenemos dos triángulos semejantes, que nos permiten escribir $\frac{6-x}{6} = \frac{4-y}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{2}y\ (**)$



El sistema formado por (*) y (**) lleva a

$x = \frac{6}{5}, \mathrm{ED} = 6 - \frac{6}{5} = \frac{24}{5}$

Septiembre 16: Sea n el menor entero positivo divisible por 20, con n^2 cubo perfecto y n^3 cuadrado perfecto. Hallar n

Nivel: Preparación OMS y OME

Solución: Sea $n = 20k = 2^2\cdot 5\cdot k$. Si n^2 debe ser un cubo perfecto y n^3 un cuadrado perfecto, el valor mínimo para k es $2^4\cdot 5^5$ (*), de modo que el natural buscado es $n = 2^6\cdot 5^6 = 10^6 = 1_1000.000$.

La afirmación (*) puede explicarse de la siguiente manera: Como n ha de ser divisible por 20 debe contener en su descomposición factorial el factor 2 elevado a 2 y el factor 5. Buscamos entre los naturales de la forma $n = 2^{2+\alpha}\cdot 5^{1+\beta}$ el definido en el enunciado. Tenemos $n^2 = 2^{2(2+\alpha)}\cdot 5^{2(1+\beta)}$ que, como, debe ser un cubo perfecto debe tener los exponentes múltiplos de 3, es decir:

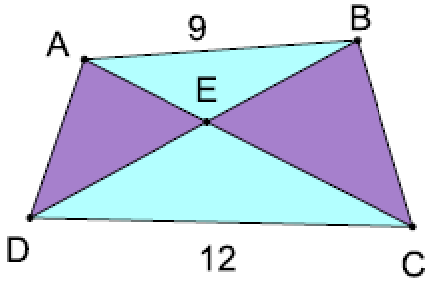
$$\begin{cases} 2(2+\alpha) = \dot{\hat{3}} & \Rightarrow\ 2+\alpha = \dot{\hat{3}} \ \Rightarrow\ \alpha = 1(3) \ \Rightarrow\ \alpha = 1, 4, 7, 10, \ldots\ldots (A) \\ 2(1+\beta) = \dot{\hat{3}} & \Rightarrow\ 1+\beta = \dot{\hat{3}} \ \Rightarrow\ \beta = 2(3) \ \Rightarrow\ \beta = 2, 5, 8, 11, \ldots\ldots (B) \end{cases}$$

Análogamente $n^3 = 2^{3(2+\alpha)}\cdot 5^{3(1+\beta)}$, que, como debe ser un cuadrado perfecto debe tener todos los exponentes múltiplos de 2, es decir:

$$\begin{cases} 3(2+\alpha) = \dot{\hat{2}} \;\Rightarrow\; 2+\alpha = \dot{\hat{2}} \;\Rightarrow\; \alpha = 0(2) \;\Rightarrow\; \alpha = 0, 2, 4, \ldots \ldots (C) \\ 3(1+\beta) = \dot{\hat{2}} \;\Rightarrow\; 1+\beta = \dot{\hat{2}} \;\Rightarrow\; \beta = 1(2) \;\Rightarrow\; \beta = 1, 3, 5, \ldots \ldots (D) \end{cases}$$

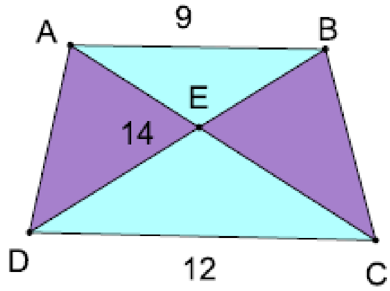
De (A) y (C) $\alpha = 4$ y de (B) y (D) $\beta = 5$

Septiembre 17-18: En el cuadrilátero ABCD de la figura se tiene AB = 9 y CD = 12. Las diagonales AC y BD se cortan en E. Si AC = 14 y los triángulos AED y BEC tienen igual área; hallar la longitud de AE



Nivel: Preparación OMS y OME

Solución: Añadiendo a cada uno de los triángulos AED y BEC el triángulo AEB tendremos que los nuevos triángulos ADB y ABC tienen igual área y como tienen base común (AB) ello implica que ambos tienen la misma altura. Por lo tanto, AB//DC, o lo que es lo mismo, ABCD es un trapecio. Los triángulos ABE y DCE son semejantes, de razón de semejanza 9/12 =3/4.



Si x = AE, entonces 14 – x = EC y $\frac{x}{14-x} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 6$

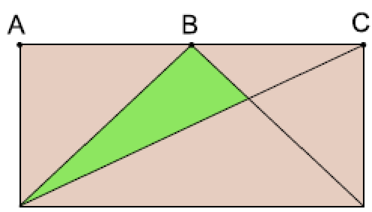
Septiembre 19: Hoy es el cumpleaños de Ali, Bea y Lola. La suma de sus edades es 23 y el producto de ellas supera en 113 al producto de sus edades ayer. Hallar la suma de los cuadrados de sus edades

Nivel: Preparación OMS

Solución: Sean x, y y z las edades actuales. Entonces $xyz = (x-1)\cdot(y-1)\cdot(z-1) + 113$ y desarrollando: $xy + yz + xz = x + y + z + 112 = 23 + 112 = 135$. Por otra parte:

$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = 23^2 - 2\cdot 135 = 259$.

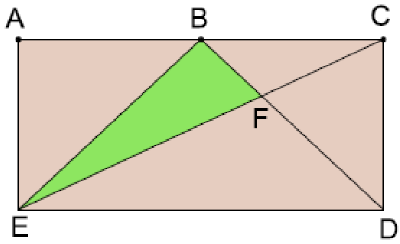
Septiembre 20-21: Sabiendo que B es el punto medio de AC, que la base del rectángulo es 2 y su altura es 1, ¿cuál es el área del triángulo de color verde?



Nivel: Preparación OMS

Solución: Tendremos:

$A_{EBF} = A_{EBC} - A_{BFC} = \frac{BC \cdot AE}{2} - A_{BFC} = \frac{1 \cdot 1}{2} - A_{BFC}$



Los triángulos EFD y BCF son semejantes (iguales los ángulos en F (opuestos por el vértice) y el ángulo en C y en F (alternos internos)) con razón de semejanza ½, por lo que sus alturas también mantendrán la razón y serán h y 2h. Como h + 2 h = 1 tendremos h=1/3. Con ello:

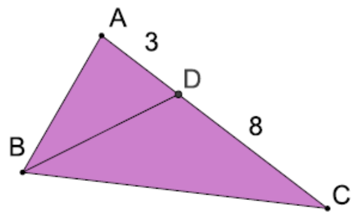
$A_{EBF} = \frac{1 \cdot 1}{2} - A_{BFC} = \frac{1}{2} - \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

Septiembre 22: Resolver: $7^{x+7} = 8^x$

Nivel: Bachillerato.

Solución: $7^{x+7} = 8^x \Rightarrow 7^x \cdot 7^7 = 8^x \Rightarrow \frac{8^x}{7^x} = 7^7 \Rightarrow \log_{\frac{8}{7}}(7^7) = x$

Septiembre 23-24: En el triángulo ABC de la figura, BD es la bisectriz del ángulo B. Si AD = 3, DC = 8 y las longitudes de los lados son números enteros, ¿cuál es el menor valor posible del perímetro de ABC?



Nivel: Preparación OMS y OME

Solución: Según el teorema de la bisectriz, los segmentos determinados por la bisectriz interior sobre su lado opuesto son proporcionales a los lados correspondientes. Así que:

$$\frac{3}{c} = \frac{8}{a} \Rightarrow a = \frac{8c}{3}$$

Como nos piden que los lados sean enteros, el valor mínimo para c es 6 (3 no es posible porque no se verifica la desigualdad triangular). Por tanto, el valor mínimo posible para a es 16, y el valor mínimo para el perímetro es 11 + 6 + 16 = 33

Septiembre 25: ¿Para cuántos valores enteros de k resulta que las gráficas de $x^2+y^2 = k^2$ y $x \cdot y = k$ no se cortan?

Nivel: Bachillerato.

Solución: Los puntos de intersección de las dos curvas se obtienen al resolver el sistema formado por las dos ecuaciones de las curvas:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=k^2 \\ x\cdot y=k \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+\frac{k^2}{x^2}=k^2 \Rightarrow x^4-k^2x^2+k^2=0$$

Esta ecuación no tiene soluciones si su discriminante es negativo, es decir si $k^4 - 4k^2 = k^2 \cdot (k^2 - 4) < 0$, que lleva a que $k^2 - 4 < 0$. Hay tres valores enteros que cumplen esta última condición: - 1, 0, 1, pero para k = 0 no existen las curvas, por lo tanto, sólo hay dos valores enteros para los que las curvas no se cortan: - 1 y 1

Septiembre 26: En un triángulo ABC se verifica:

$$\cos(2A-B) + \operatorname{sen}(A+B) = 2$$

Si AB mide 4, calcular los otros lados del triángulo.

Nivel: Bachillerato. 4ESO

Solución: La suma de un coseno y un seno sólo puede valer 2 si ambos valen 1. Para el coseno implica que el ángulo ha de ser 0°, mientras que, para el seno, el ángulo ha de ser 90°. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{r} 2A-B=0 \\ A+B=90 \end{array}\right\} \Rightarrow A=30^\circ, \qquad B=60^\circ$$

Por tanto, se trata de un triángulo 30°-60°-90°, rectángulo en C. Por tanto, CB = 2 y AC = $\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$

Septiembre 27: En una PG los tres primeros términos son a_1 = sen x, a_2 = cos x y a_3 = tg x, para algún x. Hallar los ocho primeros términos de la progresión

Nivel: 4ESO, Bachillerato.

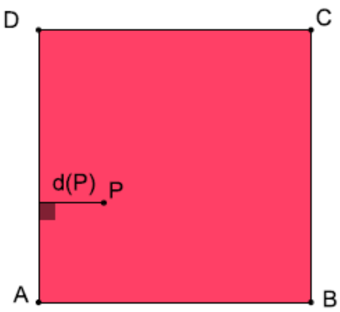
Solución: Si r es la razón de la progresión tendremos:

$$r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2} \Rightarrow r=\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

Y utilizaremos una u otra según convenga. Los siguientes términos de la progresión serán:

$$a_4=1, \qquad a_5=\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad a_6=\frac{1}{\cos x}, \qquad a_7=\frac{1}{\operatorname{sen} x}, \quad a_8=\frac{1}{\cos^2 x}$$

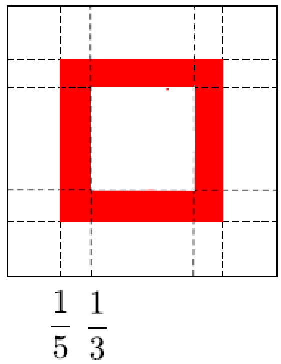
Septiembre 28-29: En el interior de un cuadrado de lado 1 se escoge al azar un punto P. Sea d(P) la distancia de P al lado más cercano al punto P. Calcular la probabilidad de que el punto P cumpla la condición $\frac{1}{5} \leq \mathrm{d(P)} \leq \frac{1}{3}$



Nivel: Bachillerato. Preparación OMS

Solución: La probabilidad pedida es la probabilidad de que el punto se encuentre en la zona roja, que se puede calcular como cociente de áreas:

$$\mathrm{p} = \frac{\text{área zona roja}}{\text{área total}} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}{1} = \frac{56}{225}$$



Septiembre 30: ¿Cuál es el menor número de naturales que hay que tachar entre 1 y 100 para que el producto de los que queden termine en 2?

Nivel: Preparación OMS y OME

Solución: Para que el producto termine en 2 hay que quitar todos los múltiplos de 5, que "fuerzan" la terminación en 0 o 5. Estos son 20. De este modo quedan 10 números que terminan en 1, 10 en 2, 10 en 3, 10 en 4, 10 en 6, 10 en 7, 10 en 8 y 10 en 9, por lo que el producto termina en 6. Es necesario quitar un número que termine en 3 para que el producto termine en 2. En total, hay que eliminar como mínimo 21 números