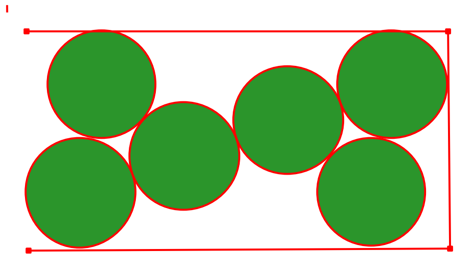
SOLUCIONES OCTUBRE 2016

Autor: Ricard Peiró i Estruch

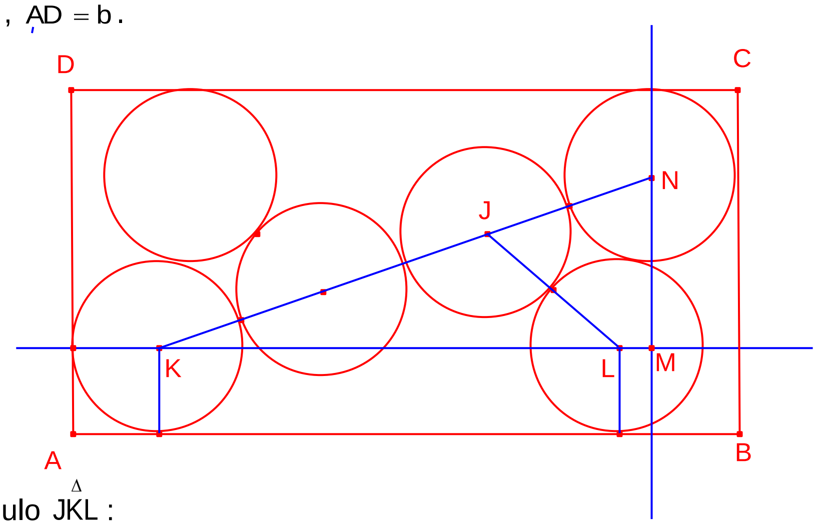
Octubre 1-2

Dentro de un rectángulo se han inscrito 6 circunferencias de igual radio r (ver figura).
Determinar la medida de los lados del rectángulo.



Solución:

Sea el rectángulo ABCD de lados $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$.



El triángulo $\overset{\Delta}{JLN}$ de lado $\overline{JL} = 2r$,

$\angle NJL = 60^o$.

$\angle KJL = 120^o$, $\overline{KJ} = 4r$.

Aplicando el teorema del coseno al triangulo $\overset{\Delta}{JKL}$:

$\overline{KL}^2 = (4r)^2 + (2r)^2 - 2 \cdot 4r \cdot 2r \cdot \cos 120^o$.

Simplificando:

$\overline{KL} = 2\sqrt{7}\,r$.

Siga $\alpha = \angle JKL$.

Aplicando el teorema del coseno al triangulo $\overset{\Delta}{JKL}$:

$(2r)^2 = (4r)^2 + \left(2\sqrt{7}\,r\right)^2 - 2 \cdot 4r \cdot 2\sqrt{7}\,r \cdot \cos\alpha$. Simplificando:

$$\cos\alpha = \frac{5\sqrt{7}}{14}.$$

Sea M la proyección de N sobre la recta KL. $\overline{KM} = a - 2r$. $\overline{KN} = 6r$.

Aplicando razones trigonométricas al triangulo rectángulo $\overset{\Delta}{KMN}$:

$$\frac{a-2r}{6r} = \cos\alpha = \frac{5\sqrt{7}}{14}.$$ Resolviendo la ecuación:

$$a = \left(2 + \frac{15\sqrt{7}}{7}\right).$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{14}.$$

$\overline{MN} = b - 2r$. $\overline{KN} = 6r$.

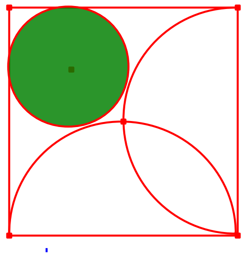
Aplicando razones trigonométricas al triangulo rectángulo $\overset{\Delta}{KMN}$:

$$\frac{b-2r}{6r} = \sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{14}.$$ Resolviendo la ecuación:

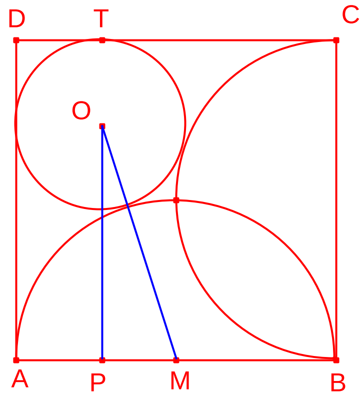
$$b = \left(2 + \frac{3\sqrt{21}}{7}\right).$$

Octubre 3-4 (I)

En un cuadrado sobre dos lados consecutivas se han dibujado dos semicircunferencias (ver figura). Una circunferencia es tangente exterior a las dos semicircunferencias y a los otros dos lados. Determinar el radio de la circunferencia.



Solución:



Sea ABCD el cuadrado de lado $\overline{AB} = c$.

Sea M el punto medio del lado $\overline{AB}$ centro de la semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$.

Sea O el centro de la circunferencia. Sea $\overline{OT} = r$ su radio.

Sea P la proyección de O sobre el lado $\overline{AB}$,

$\overline{OM} = \frac{c}{2} + r$, $\overline{OP} = c - r$, $\overline{PM} = \frac{c}{2} - r$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triangulo rectángulo $\overset{\Delta}{OPM}$:

$$\left(\frac{c}{2} + r\right)^2 = \left(\frac{c}{2} - r\right)^2 + (c - r)^2.$$

Simplificando:

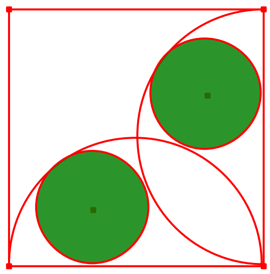
$r^2 - 4cr + c^2 = 0$.

Resolviendo la ecuación:

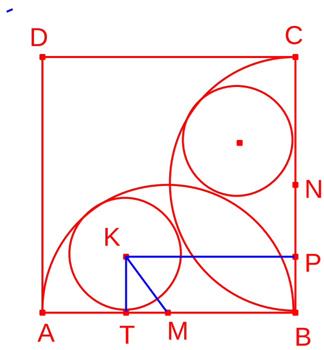
$r = \left(2 - \sqrt{3}\right)c$.

Octubre 3-4 (II)

En un cuadrado de lado c se han dibujado dos semicircunferencias de diámetro dos lados del cuadrado. Dos circunferencias, cada una de ellas, es tangente a las semicircunferencias y a un lado del cuadrado. Determinar el radio de les circunferencias.



Solución:



Sea ABCD el cuadrado de lado $\overline{AB} = c$.

Sean M, N los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, respectivamente.

Sea K el centro de la circunferencia tangente al lado $\overline{AB}$.

Sea T el punto de tangencia. Sea $\overline{KT} = r$ el radio.

Sea $\overline{MT} = x$.

Sea P la proyección de K sobre el lado $\overline{BC}$.

$\overline{MK} = \frac{c}{2} - r$, $\overline{KN} = \frac{c}{2} + r$, $\overline{PN} = \frac{c}{2} - r$, $\overline{KP} = x + \frac{c}{2}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triangulo rectángulo $\overset{\Delta}{KTM}$:

$\left(\frac{c}{2} - r\right)^2 = r^2 + x^2$. Simplificando:

$$4cr = c^2 - 4x^2 \qquad (1)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{KPN}$:

$\left(\frac{c}{2}+r\right)^2=\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}-r\right)^2$. Simplificando:

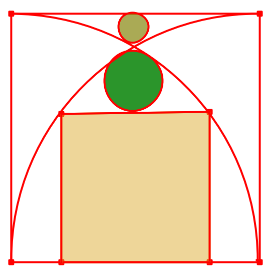
$8cr=c^2+4x^2+4cx \qquad (2)$

Consideremos el sistema formado por las expresiones (1) (2):

$\begin{cases}4cr=c^2-4x^2\\8cr=c^2+4x^2+4cx\end{cases}$. Resolviendo el sistema:

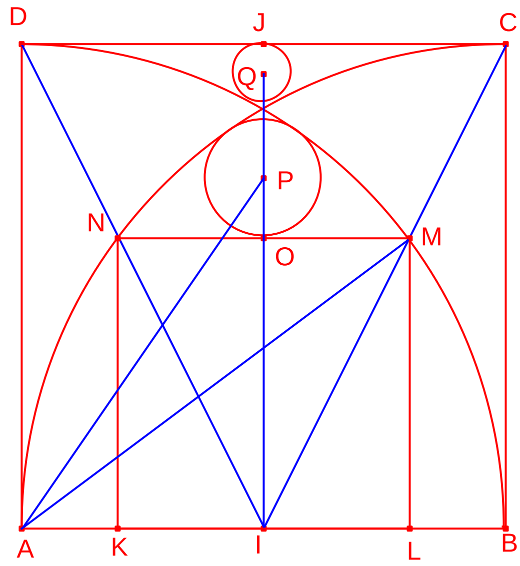
$\begin{cases}x=\frac{1}{6}c\\r=\frac{2}{9}c\end{cases}$.

Octubre 5-6



En la figura, el cuadrado exterior tiene lado c.
Dos circunferencias son tangentes a los dos arcos y la pequeña tangente al cuadrado grande y la grande tangente al cuadrado pequeño.
Determinar el radio de las dos circunferencias.

Solución:



Sea ABCD el cuadrado de lado $\overline{AB}=c$.

Sean I, J los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, respectivamente.

Sea KLMN el cuadrado de lado $\overline{KL}=x$.

Sea O el punto medio del lado $\overline{MN}$.

$\overline{AM}=c$, $\overline{AL}=\frac{c+x}{2}$, $\overline{LM}=x$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triangulo rectángulo $\overset{\Delta}{ALM}$:

$c^2=\left(\frac{c+x}{2}\right)^2+x^2$. Resolviendo la ecuación:

$x=\frac{3}{5}c$.

Sea P el centro de la circunferencia grande.
Sea Q el centro de la circunferencia pequeña.
Sea $\overline{PO}=r$ el radio de la circunferencia grande.

$\overline{IP}=x+r=\frac{3}{5}c+r$, $\overline{AP}=c-r$, $\overline{AI}=\frac{c}{2}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triangulo rectángulo $\overset{\Delta}{AIP}$:

$(c-r)^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{5}c+r\right)^2$. Resolviendo la ecuación:

$r=\frac{39}{320}c$.

Sea $\overline{QJ}=s$ el radio de la circunferencia pequeña.

$\overline{IQ}=c-s$, $\overline{AQ}=c-s$.

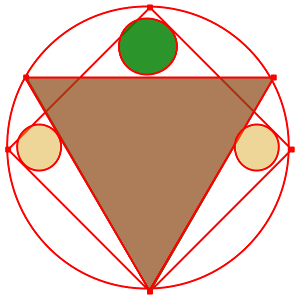
Aplicando el teorema de Pitágoras al triangulo rectángulo $\overset{\Delta}{AIQ}$:

$(c+s)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + (c-s)^2$. Resolviendo la ecuación:

$s = \frac{1}{16}c$.

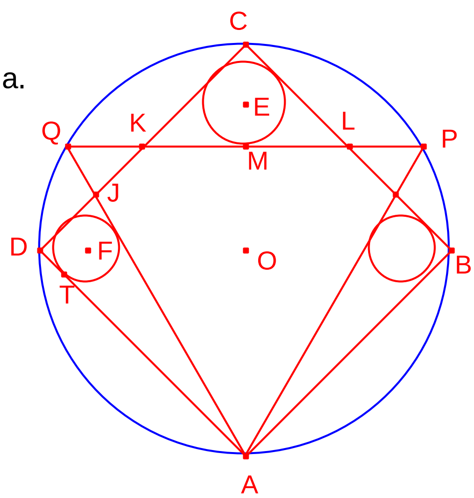
Octubre 7-8

En la figura, la circunferencia tiene radio R.
Se ha dibujado un cuadrado y un triángulo equilátero.
Determinad el radio de las tres circunferencias.



Solución:

Sea la circunferencia de radio R y centro O.
Sea el cuadrado ABCD inscrito en la circunferencia.
$\overline{OA} = R$



Sea el triángulo equilátero $\overset{\Delta}{APQ}$ inscrito en la circunferencia.
Sea M el punto medio del lado $\overline{PQ}$.
O es el baricentro del triángulo. Aplicando la propiedad del baricentro:

$\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{OA}$. $\overline{AM} = \overline{OA} + \overline{OM} = \frac{3}{2}R$.

$\overline{CM} = \overline{KM} = \frac{1}{2}c$. $\overline{KL} = 2 \cdot \overline{KM} = R$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triangulo rectángulo isósceles $\overset{\Delta}{KCL}$:

$\overline{CK} = \overline{CL} = \frac{\sqrt{2}}{2}R$.

Sea $\overline{EO} = r$ el radio de la circunferencia de centro E.

El radio de la circunferencia inscrita al triangulo $\overset{\Delta}{KCL}$ es:

$r = \frac{\overline{CK} + \overline{CL} - \overline{KL}}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)R$.

$\angle PAQ = 60^o$, entonces, $\angle DAQ = \angle PAB = 15^o$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triangulo rectángulo $\overset{\Delta}{ADC}$:

$\overline{AD} = R\sqrt{2}$.

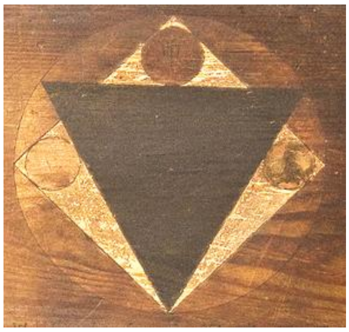
Aplicando razones trigonométricas al triangulo rectángulo $\overset{\Delta}{ADJ}$:

$\frac{\overline{DJ}}{R\sqrt{2}} = tg15^o = tg(45^o - 30^o) = 2 - \sqrt{3}$. De donde, $\overline{DJ} = \left(2\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)R$

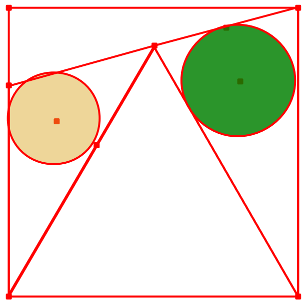
$\frac{R\sqrt{2}}{\overline{AJ}} = \cos 15^o = \cos(45^o - 30^o) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. De donde, $\overline{AJ} = \left(2\sqrt{3} - 1\right)R$.

Siga $\overline{FT} = s$ el radio de la circunferencia de centre F.

El radio de la circunferencia inscrita al triangulo $\overset{\Delta}{ADJ}$ es:

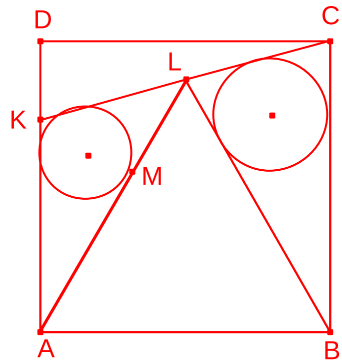


Octubre 9-16
En la figura, el cuadrado tiene lado c y el triángulo es equilátero.
Calculad la medida de los radios de les dos circunferencias.



Solución:
Sea el cuadrado ABCD de lado $\overline{AB} = c$.

Sea el triángulo equilátero $\overset{\Delta}{ABL}$.
La recta CL corta el lado $\overline{AD}$ en el punto K.
Sea M la proyección de K sobre $\overline{AL}$.
$\angle LBC = \angle KAL = 30^o$.
$\angle CLC = \angle BCL = 75^o$.
$\angle KLA = 180^o–(60^o+75^o) = 45^o$.



Sea $\overline{CL} = x$. Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{BCL}$:
$x^2 = c^2 + c^2 - 2c^2 \cos 30^o$.
$x^2 = \left(2-\sqrt{3}\right)c^2$.

Sea r el radio de la circunferencia inscrita al triángulo $\overset{\Delta}{BCL}$.

El área del triángulo $\overset{\Delta}{BCL}$ es:

$$S_{BCL} = \frac{1}{2}c^2 \sin 30^o = \frac{c+c+x}{2}r.$$

$$S_{BCL} = \frac{1}{2}c^2\frac{1}{2} = \frac{2c + c\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}r.$$ Resolviendo la ecuación:

$$r = \frac{1}{2\left(2+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)}c.$$

Sea $y = \overline{KM} = \overline{LM}$.

$\overline{KL} = y\sqrt{2}$, $\overline{AK} = 2y$, $\overline{AM} = c - y$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AMK}$:
$(2y)^2 = y^2 + (c-y)^2$. Resolviendo la ecuación:

$$y = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}c.$$

Sea s el radio de la circunferencia inscrita al triangulo $\overset{\Delta}{ALK}$.

El área del triángulo $\overset{\Delta}{ALK}$ es:

$$S_{ALK} = \frac{1}{2}c \cdot \frac{-1+\sqrt{3}}{2}c = \frac{c+2y+y\sqrt{2}}{2}s.$$

$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}c = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}s$. Resolviendo la ecuación:

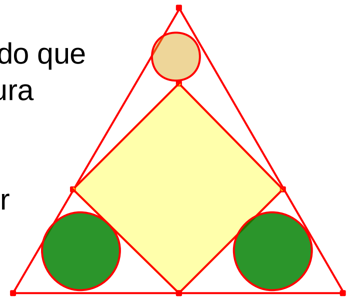
$$s = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{6}}c.$$

Octubre 10-17

En la figura, dentro de un triángulo equilátero de lado c hay un cuadrado que tiene un vértice en el punto medio de un lado y el otro vértice en la altura sobre este lado.

Se han dibujado dos circunferencias inscritas en dos triángulos y una tercera tangente al triángulo equilátero que pasa por el vértice superior del cuadrado.

Determinad el radio de las tres circunferencias.



Solución:

Sea el triángulo equilátero $\overset{\Delta}{ABC}$ de lado $\overline{AB} = c$.

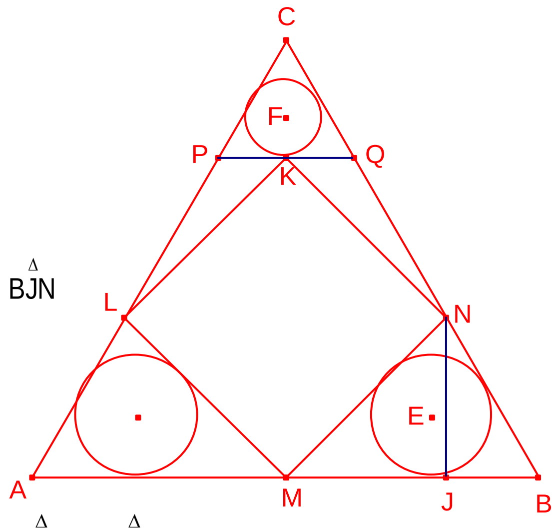
Sea KLMN el cuadrado.

$\angle NMB = 45^o$

Sea J la proyección de N sobre el lado $\overline{AB}$.

Sea $\overline{MJ} = \overline{NJ} = x$. $\overline{JB} = \frac{c}{2} - x$.

$\overline{BN} = 2\overline{JB} = c - 2x$. $\overline{MN} = x\sqrt{2}$.



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BJN}$:

$x = \frac{\sqrt{3}}{2}(c-2x)$. Resolviendo la ecuación:

$$x = \frac{3-\sqrt{3}}{4}c.$$

Sea r el radio de la circunferencia inscrita a los triángulos $\overset{\Delta}{MBN}$, $\overset{\Delta}{AML}$.

$$S_{MBN} = \frac{1}{2}\frac{c}{2}x = \frac{x\sqrt{2}+x+\frac{c}{2}}{2}r. \quad \frac{1}{2}\frac{c}{2}\frac{3-\sqrt{3}}{4}c = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{4}c\left(1+\sqrt{2}\right)+\frac{c}{2}}{2}r.$$

Resolviendo la ecuación: $r = \frac{3-\sqrt{3}}{2\left(5+3\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)}c$.

Sea $\overline{PQ}$ paralelo al lado $\overline{AB}$. K es el punto medio del lado $\overline{PQ}$.

Los triángulos equiláteros $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{PQC}$ son semejantes.

Sea s el radio de la circunferencia inscrita al triangulo $\overset{\Delta}{PQC}$.

El radio de la circunferencia inscrita al triangulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es:

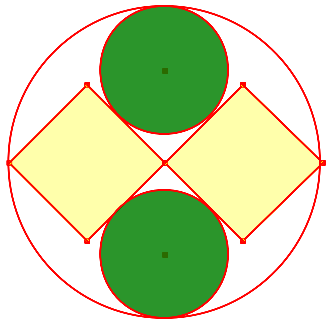
$$R = \frac{\sqrt{3}}{3}c.$$

$\overline{MK} = \sqrt{2} \cdot \overline{MN} = 2x$. $\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$, $\overline{CK} = \frac{\sqrt{3}}{2}c - 2x$.

Aplicando el teorema de Tales:

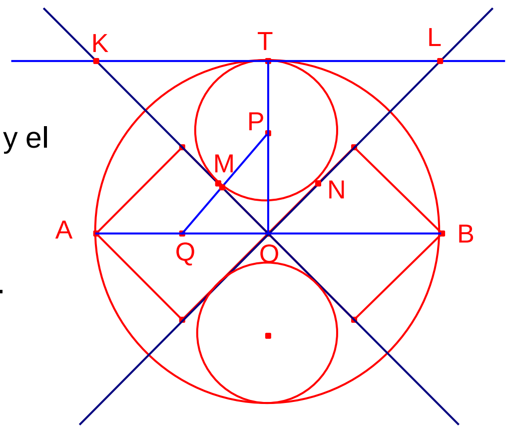
$$\frac{s}{\frac{\sqrt{3}}{3}c} = \frac{\overline{CK}}{\overline{CM}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}c - 2x}{\frac{\sqrt{3}}{2}c} \; . \; s = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}c \, .$$

Octubre 11-12



En la figura, la circunferencia exterior tiene radio R.
Los dos cuadrados son iguales, el vértice común es el centro de la circunferencia y los opuestos a este forman un diámetro.
Determinad el radio de las dos circunferencias tangentes a los cuadrados y a la circunferencia exterior.

Solució:



Sea O el centro de la circunferencia exterior y R su radio.
Sea P el centro de la circunferencia superior y r su radio.
Sea Q el centro del cuadrado de la izquierda.
Sea M el punto de tangencia de la circunferencia de centro P y el cuadrado de la izquierda.
Sea N el punto de tangencia de la circunferencia de centro P y el cuadrado de la derecha.
Sea T el punto de tangencia de la circunferencia exterior y la de centro P.
Sea la recta r tangente a la recta OT que pasa por el punto T.
Sea K la intersección de la recta r y la recta OM.
Sea L la intersección de la recta r y la recta ON.

El triángulo $\overset{\Delta}{OKL}$ es rectángulo e isósceles:

$$\overline{OK} = \overline{OL} = R\sqrt{2} \, .$$

$$\overline{KL} = \sqrt{2} \cdot \overline{OM} = \frac{2}{8}R \, .$$

$$\overline{QM} = \overline{OM} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{OQ} = \frac{\sqrt{2}}{8}R \, .$$

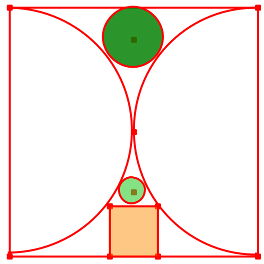
El radio de la circunferencia inscrita en el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OKL}$

$$s = \frac{\overline{OK} + \overline{OL} - \overline{KL}}{2} \, .$$

$$s = \frac{2R\sqrt{2} - 2R}{2} = \left(\sqrt{2} - 1\right)R \, .$$

Octubre 13-20

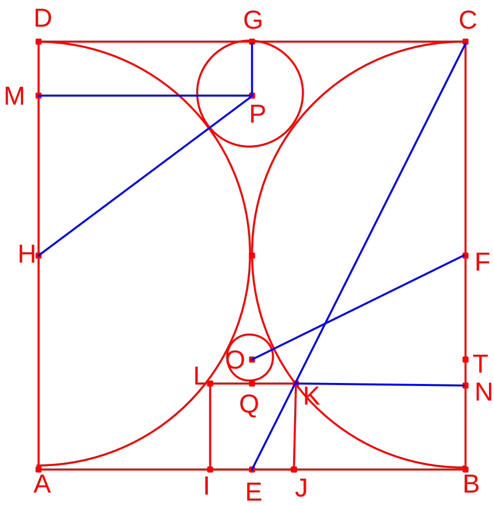
En la figura el cuadrado exterior tiene lado c.
Hay dos semicircunferencias de diámetros dos lados opuestos.
Un cuadrado que tiene los dos vértices en las semicircunferencias y los otros dos sobre un lado del cuadrado.
Determinad el radio de las dos circunferencias
.



Solución:

Sea ABCD el cuadrado de lado $\overline{AB} = c$.
Sean E, F, G H los puntos medios de los lados del cuadrado ABCD.
Sea IJKL el cuadrado de lado $\overline{IJ} = x$.
Sea $\overline{PG} = r$ el radio de la circunferencia superior (P el centre).
Sea M la proyección de P sobre el lado $\overline{AD}$.

$\overline{PH} = \frac{c}{2} + r$, $\overline{HM} = \frac{c}{2} - r$, $\overline{PM} = \frac{c}{2}$.



Aplicando el teorema de Pitágoras al triangulo rectángulo $\overset{\Delta}{HMP}$:

$\left(\frac{c}{2} + r\right)^2 = \left(\frac{c}{2} - r\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$. Resolviendo la ecuación:

$r = \frac{1}{8}c$. Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{EJK}$, $\overset{\Delta}{EBC}$ son semejantes ya que

$\frac{\overline{JK}}{\overline{EJ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CB}} = 2$.

Por tanto, E, K, C están alineados.
Sea N la proyección de K sobre el lado $\overline{BC}$.

$\overline{KN} = \frac{c}{2} - \frac{x}{2}$, $\overline{FN} = \frac{c}{2} - x$, $\overline{FK} = \frac{c}{2}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{KNF}$:

$\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - \frac{x}{2}\right)^2$. Resolviendo la ecuación:

$x = \frac{1}{5}c$.

Sea $\overline{OQ} = s$ el radio de la circunferencia inferior (O el centre).
Sea T la proyección de O sobre el lado $\overline{BC}$.

$\overline{OF} = \frac{c}{2} + \frac{s}{2}$, $\overline{FT} = \frac{c}{2} - x - s = \frac{3c}{10} - s$, $\overline{OT} = \frac{c}{2}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OTF}$:

$\left(\frac{c}{2} + s\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{3c}{10} - s\right)^2$. Resolviendo la ecuación:

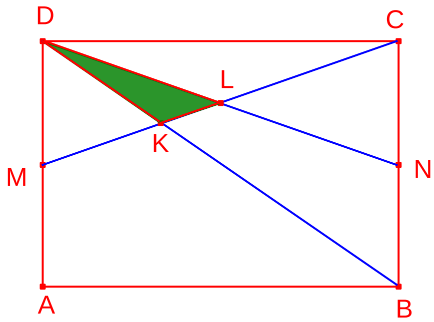
$s = \frac{9}{160}c$.

Octubre 14-15

Sea el rectángulo ABCD.

Sean M y N los puntos medios de los lados $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, respectivamente.

Determinad la proporción entre las áreas del triángulo $\overset{\Delta}{DKL}$ y el rectángulo ABCD.



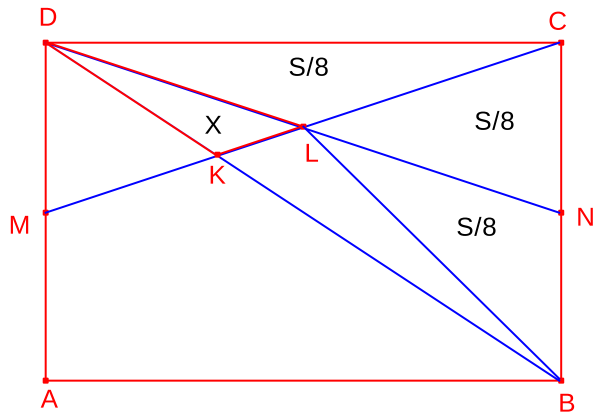
Solución 1:

Sea S el área del rectángulo ABCD.

L es el punto medio de los segmentos $\overline{CM}$, $\overline{BN}$.

Sea X el área del triángulo $\overset{\Delta}{DKL}$.

Dos triángulos que tienen la misma altura tienen las áreas proporcionales a las bases.



$S_{DCN} = \frac{1}{4} S$.

$S_{DLC} = S_{LNC} = \frac{1}{2} S_{DCN} = \frac{1}{8} S$.

$S_{BNL} = S_{LNC} = \frac{1}{8} S$.

Los triángulos $\overset{\Delta}{DLM}$, $\overset{\Delta}{NCL}$ son iguales, por tanto: $S_{DMK} = \frac{1}{8} S - X$.

Los triángulos $\overset{\Delta}{DMK}$, $\overset{\Delta}{NCL}$ son semejantes y de razón $1:2$.

Por tanto, $\overline{BK} = 2\overline{DK}$.

$S_{BKL} = 2 \cdot S_{DKL} = 2X$.

$S_{BCK} = 4 \cdot S_{DMK}$.

$\frac{1}{8} S + \frac{1}{8} S + 2X = 4\left(\frac{1}{8} S - X\right)$. Resolviendo la ecuación: $X = \frac{1}{24} S$. Por tanto,

$\frac{S_{DKL}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{24}$.

Solución 2:

Dos triángulos que tienen la misma altura tienen las áreas proporcionales a les bases.

$S_{DCN} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$.

$S_{DLC} = S_{LNC} = \frac{1}{2} S_{DCN} = \frac{1}{8} S_{ABCD}$.

Los triángulos $\overset{\Delta}{DLM}$, $\overset{\Delta}{NCL}$ son iguales, por tanto: $\overline{CL} = \overline{ML}$.

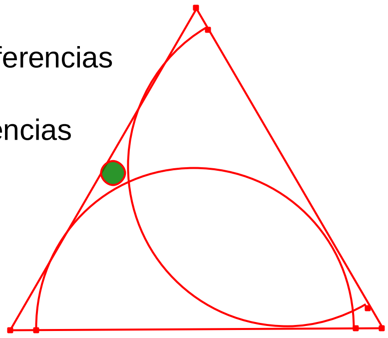
Los triángulos $\overset{\Delta}{DMK}$, $\overset{\Delta}{NCL}$ son semejantes y de razón $1:2$.

Por tanto, $\overline{CK} = 2 \cdot \overline{MK}$.

$\overline{CL} + \overline{KL} = 2 \cdot \left(\overline{CL} - \overline{KL}\right)$.

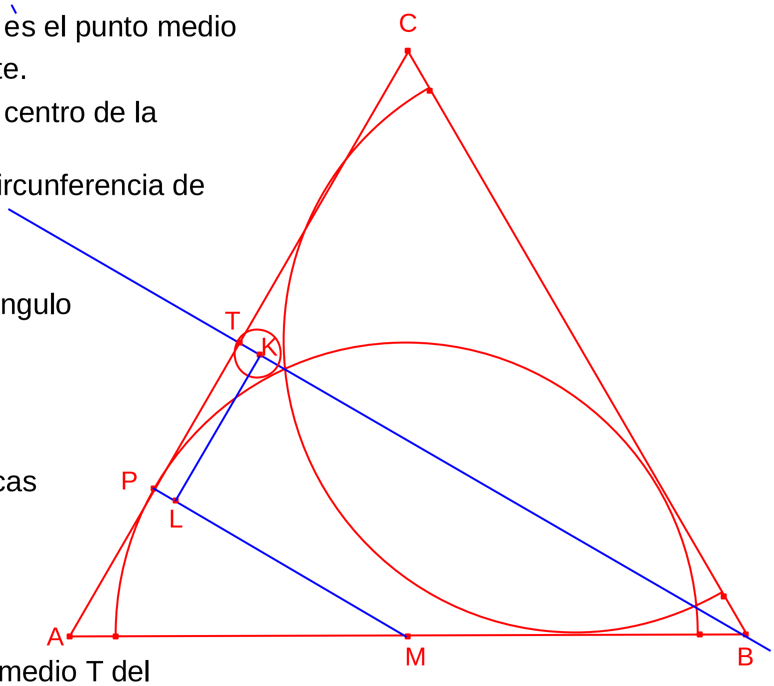
$\overline{KL}=\frac{1}{3}\overline{CL}$. $\frac{S_{DKL}}{S_{CDL}}=\frac{1}{3}$, $\frac{S_{DKL}}{\frac{1}{8}S_{ABCD}}=\frac{1}{3}$. Por tanto, $\frac{S_{DKL}}{S_{ABCD}}=\frac{1}{24}$.

Octubre 18-19



En un triángulo equilátero de lado c se ha inscrito dos semicircunferencias tangentes a dos lados y que tienen el diámetro en el tercer lado.
Una circunferencia se tangente exterior a las dos semicircunferencias y a un lado del triángulo (ver figura).
Calculad el radio de la circunferencia.

Solución:



Sea $\overset{\Delta}{ABC}$ el triángulo equilátero de lado $\overline{AB}=c$.
El centro de las dos semicircunferencias es el punto medio
De los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente.
Sea M el punto medio del lado $\overline{AB}$, k el centro de la semicircunferencia.
Sea P el punto de tangencia de la semicircunferencia de centro M y el lado $\overline{AC}$.
Sea $\overline{MP}=r$ su radio.
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{APM}$:

$\overline{AP}=\frac{1}{2}\overline{AM}=\frac{c}{4}$, $r=\frac{\sqrt{3}}{4}c$.

Las dos semicircunferencias son simétricas respecto de la mediatriz del lado $\overline{AC}$.
Por tanto, la circunferencia es simétrica respecto de la mediatriz anterior.
El punto de tangencia T de la circunferencia y el lado $\overline{AC}$ es el punto medio T del lado.
Sea K el centro de la circunferencia y $\overline{KT}=s$ su radio.
Sea L la proyección de K sobre el segmento $\overline{MP}$.

$\overline{KL}=\overline{PT}=\overline{AT}-\overline{AP}=\frac{c}{4}$.

$\overline{MK}=r+s$, $\overline{ML}=r-s$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{MLK}$:

$$(r+s)^2=\left(\frac{c}{4}\right)^2+(r-s)^2 .$$

$$4rs=\frac{1}{16}c^2 .$$

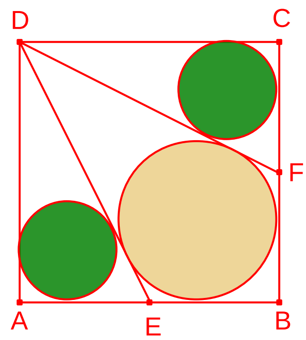
$$s=\frac{1}{64}c^2\frac{1}{r}=\frac{1}{64}c\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{48}c .$$

Octubre 21-22

Sea ABCD un cuadrado de lado c.

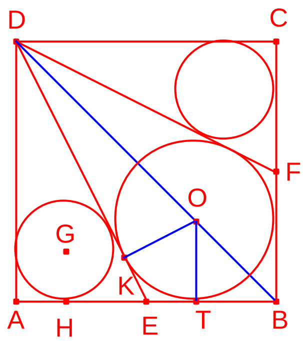
Sean E y F los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, respectivamente.

Determinad el radio de las circunferencias inscritas en los triángulos $\overset{\Delta}{AED}$, $\overset{\Delta}{FCD}$ y el cuadrilátero DEBF.



Solución:

Sea G el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AED}$ y $\overline{GH} = r$ su radio.



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AED}$:

$\overline{DE} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}c$.

El radio de la circunferencia inscrita al triángulo $\overset{\Delta}{AED}$ es:

$$r = \frac{\overline{AE} + \overline{AD} - \overline{DE}}{2} = \frac{\frac{c}{2} + c - \frac{\sqrt{5}}{2}c}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}c .$$

Sean T y K puntos de tangencia de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero DEBF con los lados $\overline{BE}$, $\overline{DE}$, respectivamente.

Sea O el centro de la circunferencia y $s = \overline{OT} = \overline{OK}$ el radio.

$\overline{BD} = c\sqrt{2}$, $\overline{BO} = s\sqrt{2}$.

$\overline{DO} = \overline{BD} - \overline{BO} = (c-s)\sqrt{2}$.

Sea $\alpha = \angle ADE$, entonces, $\angle ODK = 45^{\circ} - \alpha$.

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ODK}$:

$$\sin(45^{\circ} - \alpha) = \frac{s}{(c-s)\sqrt{2}} .$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha = \frac{s}{(c-s)\sqrt{2}} .$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{s}{(c-s)\sqrt{2}} .$$

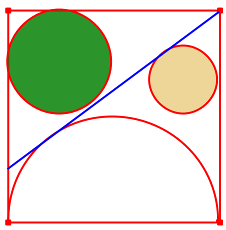
Simplificando:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{s}{(c-s)} .$$

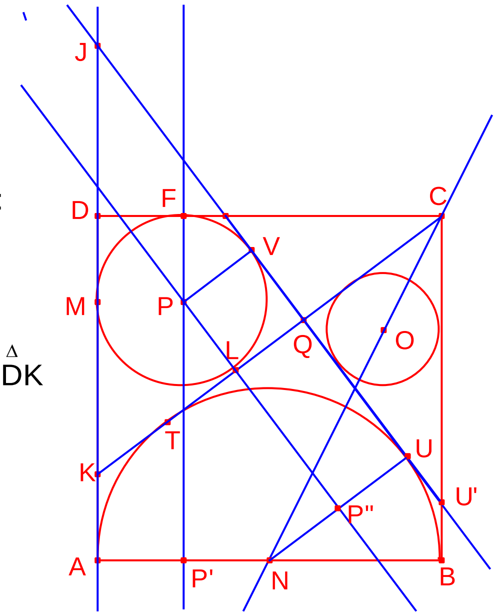
Resolviendo la ecuación:

$$s = \frac{\sqrt{5}-1}{4}c .$$

Octubre 23
En la figura, el cuadrado tiene lado c.
Determinad el radio de las dos circunferencias.



Solución:
Sea ABCD el cuadrado de lado $\overline{AB}=c$.
Sea O el centro de la circunferencia pequeña.
Sea P el centro de la circunferencia grande. $\overline{QV}=\overline{QL}=x$. Sea $\alpha=\angle OCB$.
La recta CO es bisectriz del ángulo $\angle KCB$, y a además CK, i CB son tangentes a la semicircunferencia, por tanto, CO pasa por punto medio N del lado $\overline{AB}$.



$\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{2}$. Por tanto, $\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{4}{3}$.

$\angle DKC=2\alpha$. $\frac{\overline{CD}}{\overline{DK}}=\mathrm{tg}2\alpha=\frac{4}{3}$. Por tanto, $\overline{DK}=\frac{3}{4}c$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{CDK}$:
$\overline{DK}=\frac{5}{4}c$.
Sea r el radio de la circunferencia de centro P.

El radio de la circunferencia inscrita en el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{CDK}$ es:

$$r=\overline{DM}=\frac{\overline{DK}+\overline{CD}-\overline{CK}}{2}=\frac{\frac{3}{4}c+c-\frac{5}{4}c}{2}=\frac{1}{4}c.$$

$\overline{KM}=\overline{KL}=\frac{3}{4}c-\frac{1}{4}c=\frac{1}{2}a$.

$\overline{CT}=\overline{CBL}=a$. $\overline{KL}+\overline{CT}=\overline{CK}+\overline{TL}$. $\frac{3}{2}c=\frac{5}{4}c+\overline{TL}$. Por tanto, $\overline{TL}=\frac{1}{4}c$.

Sea P' la proyección de P sobre el lado $\overline{AB}$. Sea P" la proyección de P sobre $\overline{NU}$.

$\overline{AP'}=c-r=\frac{3}{4}c$, $\overline{P'N}=\frac{c}{2}-r=\frac{1}{4}c$, $\overline{NP''}=\frac{c}{2}-r=\frac{1}{4}c$.

Por tanto, los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{PP'N}$, $\overset{\Delta}{PP''N}$ son iguales, y de aquí:
$\overline{UV}=\overline{PP''}=\overline{PP'}=\frac{3}{4}c$.
Sea Q la intersección de las tangentes CK i UV. Sea $\overline{QV}=\overline{QL}=x$:

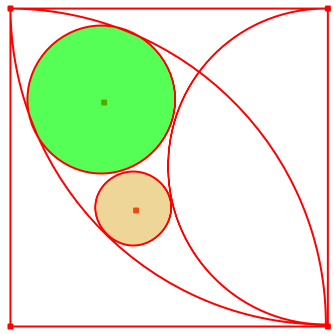
$\overline{QT}=\overline{QV}=x+\frac{1}{4}c$. $\overline{UV}=\frac{3}{4}c=2x+\frac{1}{4}c$. Resolviendo la ecuación: $\overline{QV}=\overline{QL}=x=\frac{1}{4}c$.

$\overline{QK}=\frac{3}{4}c$, $\overline{QC}=\frac{2}{4}c$.

Sea J la intersección de la tangente UV y la recta AD.

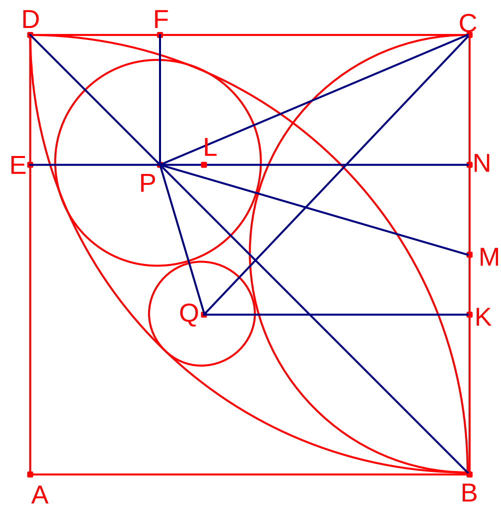
Los triángulos $\overset{\Delta}{KQJ}$, $\overset{\Delta}{CQU'}$ son semejantes y de razón $\overline{QK}:\overline{QC}=\frac{3}{4}c:\frac{2}{4}c=3:2$.

Octubre 24/31-25



En un cuadrado de lado c se han dibujado dos cuadrantes, de radio, el lado y una semicircunferencia de diámetro un lado.
Dos circunferencias tangentes, cada una de ellas, es tangente a los cuadrantes y a la semicircunferencia.
Determinad el radio de las circunferencias.

Solución:



Sea ABCD el cuadrado de lado $\overline{AB} = c$.
Sea M el punto medio del lado $\overline{BC}$.
Sea P el centro de la circunferencia mayor y r su radio.
P pertenece a la diagonal $\overline{BD}$.
Sea E la proyección de P sobre el lado $\overline{AD}$.
Sea F la proyección de P sobre el lado $\overline{CD}$.
$\overline{PE} = \overline{PF} = x$.
Sea N la proyección de P sobre el lado $\overline{BC}$.

$\overline{PN} = c - x$, $\overline{CP} = c - r$, $\overline{CN} = x$, $\overline{PM} = \frac{c}{2} + r$, $\overline{MN} = \frac{c}{2} - x$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{PNC}$:

$$(c-r)^2 = x^2 + (c-x)^2 \qquad (1)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{PNM}$:

$$\left(\frac{c}{2} + r\right)^2 = \left(\frac{c}{2} - x\right)^2 + (c-x)^2 \qquad (2)$$

Consideremos el sistema formado por las expresiones (1) (2):

$$\begin{cases} r^2 - 2cr = 2x^2 - 2cx \\ r^2 + cr = 2x^2 - 3cx + c^2 \end{cases}$$. Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{17} \\ r = \dfrac{4}{17} \end{cases}.$$

Sea P el centro de la circunferencia menor y s su radio.
Sea K la proyección de Q sobre el lado $\overline{BC}$.
Sea L la proyección de Q sobre el segmento $\overline{PN}$.
Sean $\overline{QL} = y$, $\overline{QK} = z$.

$\overline{PQ} = r + s$, $\overline{PL} = c - x - z$, $\overline{MQ} = \frac{c}{2} + s$, $\overline{MK} = y - \left(\frac{c}{2} - x\right)$, $\overline{CQ} = c - s$, $\overline{CK} = y + x$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{QLP}$:

$$(r+s)^2 = y^2 + (c-x-z)^2 \qquad (3)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{QKM}$:

$$\left(\frac{c}{2} + s\right)^2 = z^2 + \left(y - \frac{c}{2} + x\right)^2 \qquad (4)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{QKC}$:

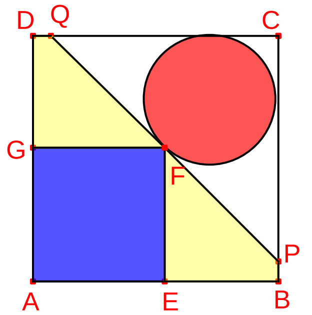
$$(c-s)^2 = z^2 + (y+x)^2 \qquad (5)$$

Resolviendo el sistema formado por las expresiones (3) (4) (5):

$$\begin{cases} y = \dfrac{64}{187} \\ z = \dfrac{20}{33} \\ s = \dfrac{4}{33} \end{cases}.$$

Octubre 26-27

En la figura ABCD i AEFG son cuadrados.
La circunferencia es tangente a los lados $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ y pasa por el punto F. $\angle QPC = 45^{\circ}$, y la recta PQ es tangente a la circunferencia.
Si el lado del cuadrado AEFG es igual al diámetro 2r de la circunferencia, determinad la medida del lado ABCD.



Solución:

$\overline{AE} = \overline{EF} = 2r$

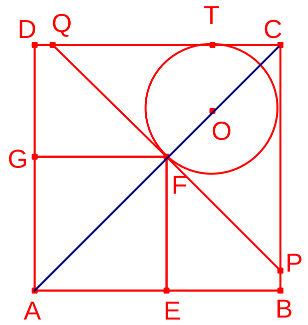
Sea O el centro de la circunferencia.

Sea T el punto de tangencia de la circunferencia y el lado $\overline{CD}$.

$\overline{OF} = \overline{OT} = \overline{CT} = r$.

F es el punto medio del segmento $\overline{PQ}$.

Entonces, el centro O pertenece a la diagonal $\overline{AC}$ del cuadrado ABCD.



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AEF}$:

$\overline{AF} = 2\sqrt{2}\,r$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{CTO}$:

$\overline{OC} = \sqrt{2}\,r$.

Sea $\overline{AB} = c$ el lado del cuadrado ABCD.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC} = \sqrt{2}\,c$

$\overline{AC} = \overline{AF} + \overline{OF} + \overline{OC}$.

$\sqrt{2}\,c = 2\sqrt{2}\,r + r + \sqrt{2}\,r$.

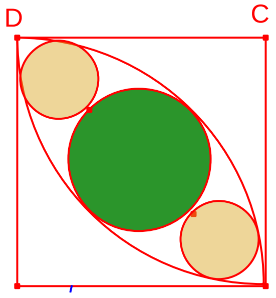
Resolviendo la ecuación:

$$c = \frac{1+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}r = \frac{6+\sqrt{2}}{2}r.$$

Octubre 28

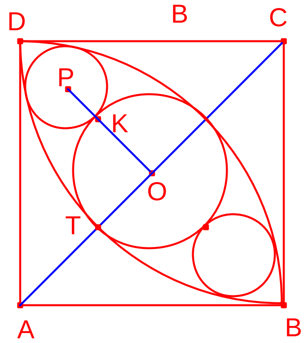
Sea el cuadrado ABCD de lado $\overline{AB} = c$.

Determinad el radio de las tres circunferencias de la figura.



Solución:

Sea O el centro del cuadrado ABCD y centro de la circunferencia.



Sea T el punto de tangencia de la circunferencia y el cuadrado de centro C.

$\overline{CT} = c$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles $\overset{\Delta}{BOC}$:

$$\overline{CO} = \overline{AO} = \frac{\sqrt{2}}{2}c.$$

El radio de la circunferencia es:

$$r = \overline{OT} = \overline{CT} - \overline{CO} = c - \frac{\sqrt{2}}{2}c = \frac{2-\sqrt{2}}{2}c.$$

Sea P el centro de la circunferencia superior.

Sea K el punto de tangencia de la circunferencia central y la superior.

Sea $s = \overline{PK}$ el radio de la circunferencia superior.

$$\overline{OP} = r + s = s + \frac{2-\sqrt{2}}{2}c.$$

$$\overline{AP} = c - s.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AOP}$

$$(c-s)^2 = \left(s + \frac{2-\sqrt{2}}{2}c\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2.$$

$\left(4-\sqrt{2}\right)cs = \left(\sqrt{2}-1\right)c^2$ Resolviendo la ecuación:

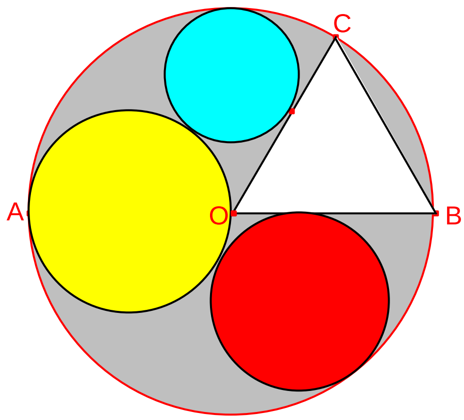
$$s = \frac{-2+3\sqrt{2}}{14}c.$$

Octubre 29-30

En la figura, $\overline{AB} = 2r$ es el diámetro de la circunferencia de centro O.

$\overset{\Delta}{OBC}$ es un triángulo equilátero.

Determinad el radio de las otras tres circunferencias.

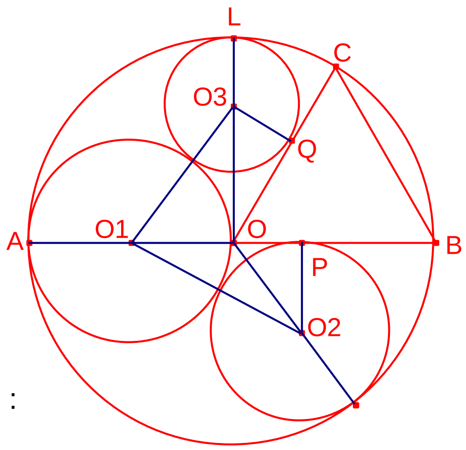


Solución:

Sea O_1 la circunferencia de diámetro $\overline{AO}$, su radio es

$$\overline{O_1A} = \overline{O_1O} = \frac{1}{2}r.$$

Sea P el punto de tangencia de la circunferencia de centro O_2 y el triángulo $\overset{\Delta}{OBC}$.



Sea $\overline{O_2P} = r_2$ su radio.

$\overline{OO_2} = r - r_2$. $\overline{O_1O_2} = \frac{1}{2}r + r_2$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{O_1PO_2}$:

$$\overline{OP}^2 = (r - r_2)^2 - r_2{}^2 \qquad (1)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OPO_2}$:

$$\left(\frac{1}{2}r + r_2\right)^2 = \left(\frac{1}{2}r + \overline{OP}\right)^2 + r_2{}^2 \qquad (2)$$

$$r \cdot r_2 = \overline{OP}^2 + r\overline{OP} \qquad (3)$$

Sustituyendo la expresión (1) en la expresión (3):

$$r \cdot r_2 = r^2 - 2r \cdot r_2 + r\sqrt{(r - r_2)^2 - r_2{}^2} \qquad (4)$$

$$3r_2 - r = \sqrt{r^2 - 2r \cdot r_2} \qquad (5)$$

Resolviendo la ecuación:

$$r_2 = \frac{4}{9}r.$$

Sea Q el punto de tangencia de la circunferencia de centro O_3 y el triángulo $\overset{\Delta}{OBC}$.

Sea $\overline{O_3P} = r_3$ su radio.

$\overline{OO_3} = r - r_3$

$\angle QOO_3 = 30^{o}$.

$$\frac{\overline{O_3P}}{\overline{OO_3}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{r_3}{r - r_3} = \frac{1}{2}.$$

$$r_3 = \frac{1}{3}r.$$