SOLUCIONES NOVIEMBRE 2016

Autor: Rafael Martínez Calafat (profesor jubilado de Matemáticas)

Noviembre 1: ¿Cuáles son las posibles longitudes del tercer lado del triángulo de lados 2016 cm y 2017 cm?

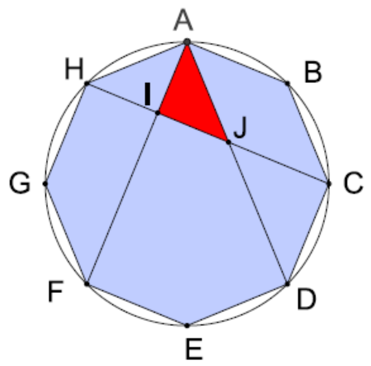
Nivel: 4ESO.

Solución: Sean x, 2016 y 2017 las longitudes de los lados de un triángulo. Como se debe cumplir la desigualdad triangular:

$$\left.\begin{array}{r} x+2016>2017 \;\; \Rightarrow \;\; x>1 \\ x+2017>2016 \;\; \Rightarrow \;\; x>0 \\ 2016+2017>x \;\; \Rightarrow 4033>x \end{array}\right\} \Rightarrow \;\; x\in\;]1;\;\;4033[$$

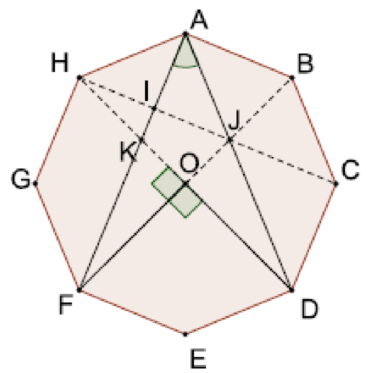
Noviembre 2-3: En una circunferencia de radio unidad se inscribe un octógono regular ABCDEFGH.

Hallar los ángulos, el área y el perímetro del triángulo △AIJ



Nivel: Preparación OME y OMS

Solución: Empecemos por los ángulos. El ángulo central asociado al arco FD es (360/4 =) 90°, por lo que el ángulo inscrito del arco FD, es decir el ángulo ∠IAJ, es 45°. Por idéntica razón (el ángulo inscrito es la mitad del ángulo central) tendremos que el ángulo señalado en cada uno de los vértices del octógono es de 22,5°. Por tanto, el ángulo ∠OFK = 22,5° y como ∠FOK = 90°, tendremos que ∠FKO = 67,5°, de donde ∠HKI (= ∠FKO, al ser opuestos por el vértice) y como ∠KHI = 22,5°, tendremos que ∠KIH = 90° (= ∠AIJ por ser opuestos por el vértice). Por último ∠IJA = (180° – 90° – 45° =) 45°. Es decir, el triángulo ΔAIJ es un triángulo 90-45-45, rectángulo en I.



Además ∠HAF = 45° (al ser el ángulo inscrito correspondiente al ángulo central del arco HF). Por lo tanto ΔHIA = ΔAIJ

Vamos por los lados. Sea x el lado y (por Pitágoras) $\sqrt{2}\,x$, la hipotenusa. Sea ΔJCK el simétrico del triángulo ΔAIJ respecto FB. Como AE es un diámetro de la circunferencia tendremos que ΔADE es rectángulo en D y al aplicar sobre él el teorema de Pitágoras:

$$2^2 = \left(\sqrt{2}x\right)^2 + \left(2x + \sqrt{2}x\right)^2$$

cuya solución es:

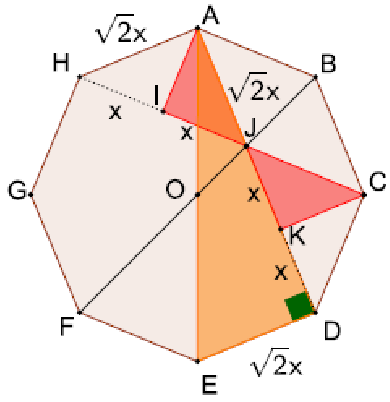
$$x = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Por lo tanto:

$$\text{Perímetro} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\text{Área: } x^2 = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$$



Noviembre 4: Cuatro amigos lanzan un dardo cada uno de ellos. Si a, b, c y d son las probabilidades de acertar cada uno de ellos; hallar la probabilidad de que acierten tres o más de ellos.

Nivel: 3ESO, 4ESO

Solución: La probabilidad de que acierten los cuatro es a·b·c·d. La probabilidad de que acierten tres de ellos y el otro falle es: a·b·c·(1 – d) + a·b·(1 – c)·d + a·(1 – b)·c·d + (1 – a)·b·c·d. La suma de todas ellas será la probabilidad solicitada:

Π = a·b·c·d + a·b·c – a·b·c·d + a·b·d – a·b·c·d + a·c·d – a·b·c·d + b·c·d – a·b·c·d = a·b·c + a·b·d + a·c·d + b·c·d – 3·a·b·c·d

Noviembre 5-6: Resolver:

$$\left(x^3 - 4x^2 + x\right)^2 = \left(x^3 + 3x - 2\right)^2$$

$$\log_{(3x^3)} 3 + \log_{27} x^2 = -4$$

Nivel: 4ESO, Bachillerato

Solución: Para la primera ecuación tenemos:

$$(x^3-4x^2+x)^2=(x^3+3x-2)^2 \quad \Rightarrow \begin{cases} x^3-4x^2+x=x^3+3x-2 \\ x^3-4x^2+x=-x^3-3x+2 \end{cases}$$

Para la primera posibilidad:

$$0=4x^2+2x-2 \quad \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Para la segunda posibilidad:

$$2x^3-4x^2+4x-2=0=\ (x-1)\cdot 2\cdot (x^2-x+1) \quad \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x\notin \mathbb{R} \end{cases}$$

Por tanto, la ecuación sólo tiene dos raíces reales x = 1 y x = - ½

Para la segunda ecuación, utilizando la fórmula del cambio de base: $\log_A B=\frac{\log_C B}{\log_C A}$

$$\log_{3x^3}3=\frac{\log_3 3}{\log_3(3x^3)}=\frac{1}{1+3\cdot\log_3 x} \quad , \quad \log_{27}x^2=\frac{\log_3 x^2}{\log_3 27}=\frac{2\log_3 x}{3}$$

Con ello, la ecuación queda:

$$\frac{1}{1+3\log_3 x}+\frac{2\log_3 x}{3}=-4$$

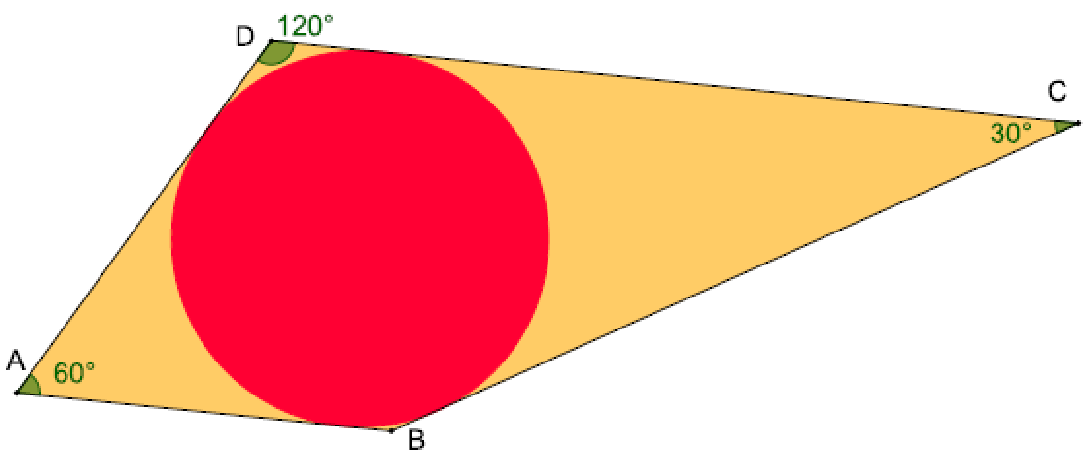
Con el cambio $t=\log_3 x$ la ecuación se transforma en:

$$\frac{1}{1+3t}+\frac{2t}{3}=-4 \quad \Rightarrow \quad 3+2t(1+3t)=-12(1+3t) \quad \Rightarrow \quad 6t^2+38t+15=0$$

Cuyas soluciones $t=\frac{-19\pm\sqrt{271}}{6}$ llevan a:

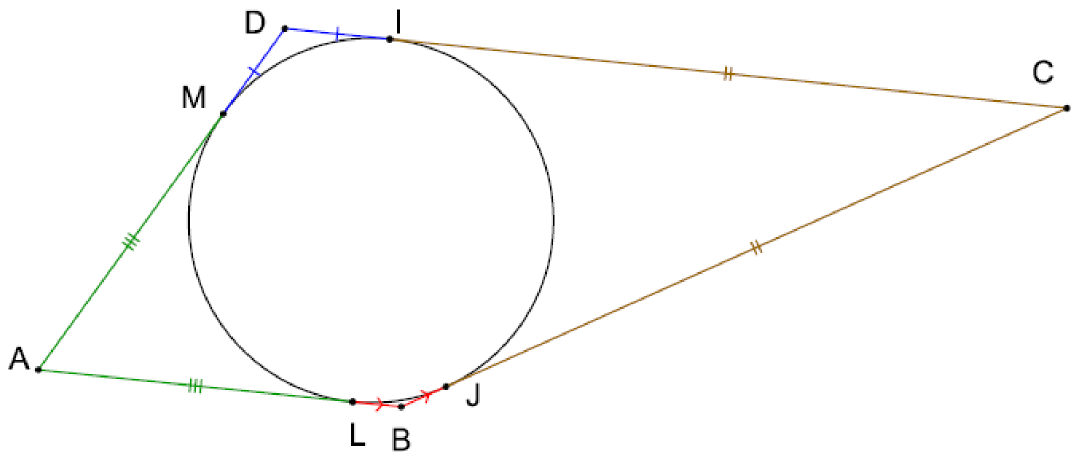
$$x=3^{\frac{\sqrt{271}-19}{6}} \quad y \quad x=3^{-\frac{19+\sqrt{271}}{6}}$$

Noviembre 7-8: De un cuadrilátero ABCD se sabe: ∠A = 60°, ∠D = 120°, ∠C = 30° DC = $200+100\sqrt{3}$, AB = $100\sqrt{3}$ y que en su interior se puede inscribir un círculo. Hallar área y perímetro del cuadrilátero y radio del círculo



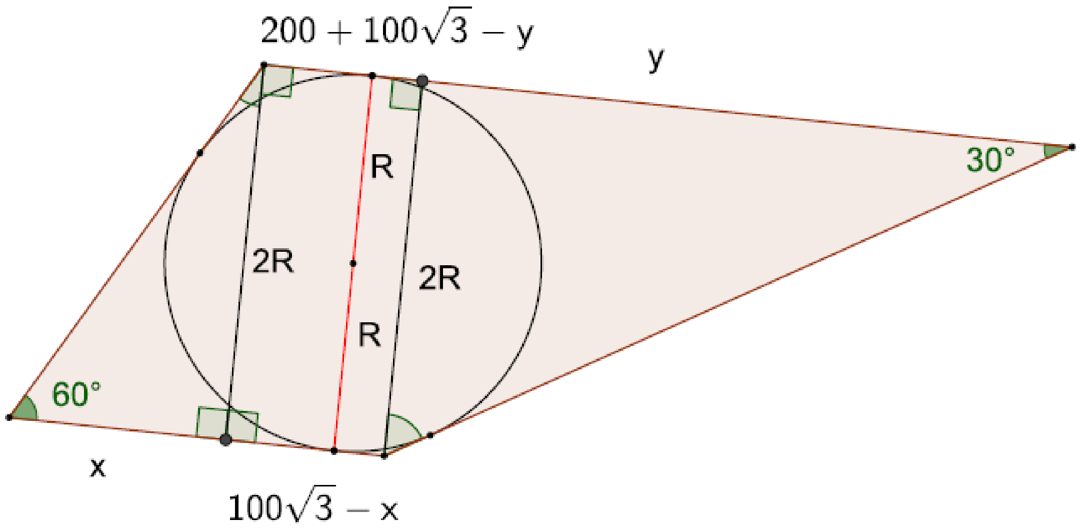
Nivel: Preparación OME

Solución: Empezamos con el perímetro. Como por un punto exterior hay dos tangentes a una circunferencia de igual longitud, tenemos



Perímetro = AM + AL + LB + BJ + JC + CI + ID + DM = $2(200+100\sqrt{3})+2(100\sqrt{3}) = 400(1+\sqrt{3})$

Vamos por el radio del círculo.



Podemos descomponer el cuadrilátero es tres polígonos: dos triángulos 60-30-90 y un rectángulo de lados 2R y $100-\sqrt{3}-x = 200+100\sqrt{3}-y$. De ellos tenemos:

$$\mathrm{tg}60° = \frac{2R}{x} \;\Rightarrow\; x\sqrt{3} = 2R$$

$$200+100\sqrt{3}-y = 100\sqrt{3}-x \;\Rightarrow\; y-x = 200$$

$$\mathrm{tg}30° = \frac{2R}{y} \;\Rightarrow y = 2\sqrt{3}R$$

Las tres ecuaciones forman un sistema con soluciones x = 100, y = 300 y R = $50\sqrt{3}$.

Para el área tendremos que el área solicitada es suma de las áreas de los dos triángulos y la del rectángulo:

$$\mathrm{A_{ABCD}} = \mathrm{x} \cdot \mathrm{R} + \left(100\sqrt{3} - \mathrm{x}\right) \cdot 2\mathrm{R} + \mathrm{y} \cdot \mathrm{R}$$
$$= 100 \cdot 50\sqrt{3} + \left(100\sqrt{3} - 100\right) \cdot 100\sqrt{3} + 300 \cdot 50\sqrt{3} = 10000\left(3 + \sqrt{3}\right)$$

Noviembre 9: Dado un real x se define $\lfloor \mathrm{x} \rfloor$ al mayor entero menor o igual a x. Si $\left\lfloor \sqrt{\mathrm{x}} \right\rfloor = 3$ y $\lfloor \mathrm{y}^3 \rfloor = 7$, ¿entre qué valores estará $\lfloor \mathrm{xy} \rfloor$?

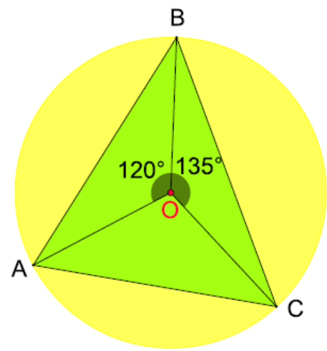
Nivel: Preparación OME, OMS, 3ESO, 4ESO

Solución: Tenemos:

$$\left.\begin{matrix} \lfloor \sqrt{\mathrm{x}} \rfloor = 3 \;\;\Rightarrow\;\; 3 \leq \sqrt{\mathrm{x}} < 4 \;\;\Rightarrow\;\; 9 \leq \mathrm{x} < 16 \\ \lfloor \mathrm{y}^3 \rfloor = 7 \;\;\Rightarrow\;\; 7 \leq \mathrm{y}^3 < 8 \;\;\Rightarrow\;\; \sqrt[3]{7} \leq \mathrm{y} < 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 17{,}21 \approx 9\sqrt[3]{7} \leq \mathrm{xy} < 32$$

Luego $\lfloor \mathrm{xy} \rfloor$ oscila entre 17 y 31

Noviembre 10-11: De un triángulo △ABC se sabe el radio de la circunferencia circunscrita r=$2\sqrt{3}$ y si O es el centro de la circunferencia circunscrita ∠AOB=120° y ∠BOC=135°. Hallar área y perímetro del triángulo



Nivel: A partir de 4ESO. Preparación OMS y OME

Solución: Tendremos: $\mathrm{A_{ABC}} = \mathrm{A_{AOB}} + \mathrm{A_{BOC}} + \mathrm{A_{AOC}}$ siendo todos los triángulos del segundo miembro isósceles (y por tanto los ángulos opuestos al ángulo en O iguales).

Para calcular el área utilizaremos el hecho de que el área de un triángulo es la mitad del producto de dos lados contiguos por el seno del ángulo que forman.

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{A_{AOB}} = \frac{1}{2}\mathrm{r}^2 \cdot \cos(120°) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \\ \mathrm{A_{COB}} = \frac{1}{2}\mathrm{r}^2 \cdot \cos(135°) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \\ \mathrm{A_{AOC}} = \frac{1}{2}\mathrm{r}^2 \cdot \cos(105°) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4} = \frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_{ABC} = \frac{9\sqrt{2}+9\sqrt{2}}{2}$$

Para el perímetro utilizamos el teorema de los senos:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta\text{AOB} \;\Rightarrow\; \frac{\text{r}}{\text{sen}(30°)} = \frac{\text{c}}{\text{sen}(120°)} \;\Rightarrow\; \text{c} = \frac{\text{sen}(120°)}{\text{sen}(30°)}\text{r} = \frac{\sqrt{3}/_2}{1/_2}\cdot 2\sqrt{3} = 6\\
&\Delta\text{COB} \;\Rightarrow\; \frac{\text{r}}{\text{sen}(22{,}5°)} = \frac{\text{a}}{\text{sen}(135°)} \;\Rightarrow\; \text{a} = \frac{\text{sen}(135°)}{\text{sen}(22{,}5°)}\text{r} = \frac{\sqrt{2}/_2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}/_2}\cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{2}}\\
&\Delta\text{AOC} \;\Rightarrow\; \frac{\text{r}}{\text{sen}(37{,}5°)} = \frac{\text{b}}{\text{sen}(105°)} \;\Rightarrow\; \text{c} = \frac{\text{sen}(105°)}{\text{sen}(37{,}5°)}\text{r} = (*) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}}{2}\cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{6+3\sqrt{2-\sqrt{3}}}
\end{aligned}\right\}$$

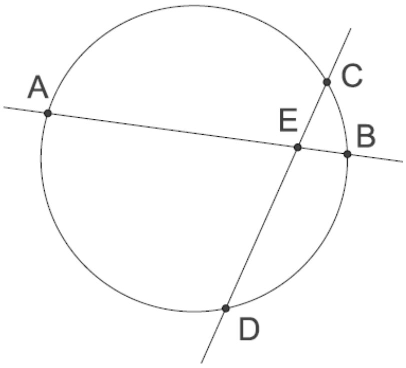
$$(*)\,\frac{\text{sen}(105°)}{\text{sen}(37{,}5°)} = \frac{\text{sen}(75°)}{\text{sen}(37{,}5°)} = \frac{2\text{sen}(37{,}5°)\cos(37{,}5°)}{\text{sen}(37{,}5°)} = 2\cos(37{,}5°)$$

Por tanto:

$$\text{Perímetro} = 6 + 2\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{6+3\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

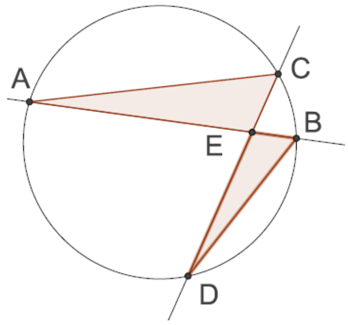
Noviembre 12: Sean AB y CD dos cuerdas de una misma circunferencia que se cortan en E. Probar que:

EA · EB = EC · ED

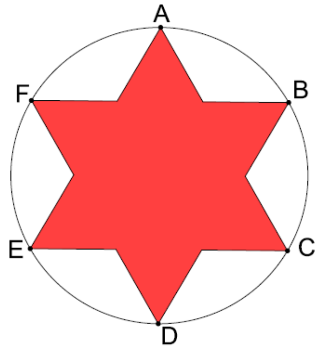


Nivel: 3ESO

Solución: Consideremos los triángulos ΔACE y ΔBED. Estos dos triángulos son semejantes Pues tienen dos ángulos iguales (los ángulos en E (por opuestos por el vértice) y los ángulos en C y en B (por abarcar el mismo arco AD)). Por lo tanto:



$$\frac{\text{CE}}{\text{BE}} = \frac{\text{AE}}{\text{ED}} \;\Rightarrow\; \text{CE}\cdot\text{ED} = \text{EB}\cdot\text{AE}$$



Noviembre 13-20: Calcular el área y el perímetro de una estrella regular de seis puntas inscrita en una circunferencia de radio 1

Nivel: A partir de 3ESO. Preparación OMS

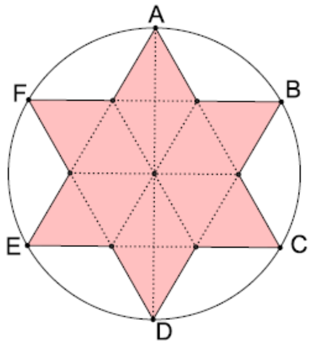
Solución: Podemos descomponer la estrella en doce triángulos equiláteros y por lo tanto en 24 triángulos 30°-60°-90°, cada uno de los cuales tiene área:

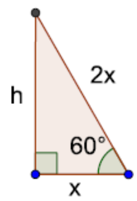
$$A = \frac{h \cdot x}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$$

Como en el diámetro AD hay cuatro alturas h tenemos:

$$h = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = x\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$





De aquí:

$$A_{estrella} = 24 \cdot A = 24 \cdot \frac{\frac{1}{12}\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

El perímetro de la estrella está formado por 12 segmentos de longitud 2x. Por tanto:

$$P_{estrella} = 12 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

Noviembre 14: ¿Cuál es el menor valor de k que hace que n^3+4n+k no sea múltiplo de 5 para cualquier n natural?

Nivel: Preparación OME.

Solución: Sea n = 5p + r con r∈{0, 1, 2, 3, 4}, tenemos:

$$\left.\begin{matrix} n^3 = 5l + r^3 \\ 4n = 5m + 4r \end{matrix}\right\} \Rightarrow n^3 + 4n + k = 5q + r^3 + 4n + k$$

Por tanto $n^3 + 4n + k = \hat{\dot{5}} \Leftrightarrow r^3 + 4n + k = \hat{\dot{5}}$. Debemos buscar k tal que para cualquier valor de r posible $r^3 + 4n + k$ no sea múltiplo de 5. Por inspección directa:

r	r^3+4n+k	k = 0	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4
0	k	0	1	2	3	4
1	5 + k	5	6	7	8	9
2	16 + k	16	17	18	19	20
3	39 + k	39	40	41	42	43
4	80 + k	80	81	82	83	84

(En rojo los valores múltiplos de cinco). La primera columna que aporta valores no múltiplos de cinco es la correspondiente a k = 2. Por lo tanto, el menor valor de k natural tal que n^3+4n+k no sea múltiplo de 5 para cualquier n natural es k = 2 (también k puede ser 3)

Noviembre 15-16: Resolver:

$$\sqrt{\mathbf{23-x^3}}+\sqrt{\mathbf{23+x^3}}=\mathbf{x^3}$$

$$\mathbf{cos(\theta)\cdot cos(2\theta)=\frac{1}{4}}$$

Nivel: A partir de 4ESO.

Solución: Para la primera, tenemos elevando los dos miembros al cuadrado:

$$23-x^3+23+x^3+2\sqrt{23^2-x^6}=\ x^6;\quad 46+2\sqrt{529-x^6}=x^6;\quad 2\sqrt{529-x^6}$$
$$=x^6-46;\quad 4(529-x^6)=x^{12}-92x^6+2116;\ -4x^6=x^{12}-92x^6;\ 0$$
$$=x^{12}-88x^6;\ \ 0=x^6(x^6-88)$$

Y de aquí: x = 0 o $x=\pm\sqrt[6]{88}=\pm\sqrt{2}\sqrt[6]{11}$

Comprobación de soluciones:

x = 0 no es solución pues el primer miembro lleva a $2\sqrt{23}$, y el segundo miembro lleva a 0.

x = $\sqrt{2}\sqrt[6]{11}$ es solución pues el primer miembro lleva a $\sqrt{23-2\sqrt{22}}+\sqrt{23+2\sqrt{22}}$ y el segundo miembro lleva a $2\sqrt{22}$, y estas expresiones son iguales ya que al elevar al cuadrado tenemos:

$$\left(\sqrt{23-2\sqrt{22}}+\sqrt{23+2\sqrt{22}}\right)^2=23-2\sqrt{22}+23+2\sqrt{22}+2\sqrt{23^2-4\cdot 22}$$
$$=46+2\sqrt{441}=88=\left(2\sqrt{22}\right)^2$$

y sacando raíces cuadradas positivas tenemos lo deseado.

x = $-\sqrt{2}\sqrt[6]{11}$, no es solución, pues el primer miembro lleva a un valor positivo y el segundo miembro lleva a un valor negativo.

Para la segunda, puesto que $\cos(2\theta)=\cos^2\theta-\text{sen}^2\theta=2\cos^2\theta-1$, tenemos $\cos\theta(2\cos^2\theta-1)=¼$.

Haciendo $z=\cos\theta$, llegamos a:

$$z(2z^2-1)=\frac{1}{4};\ \ 8z^3-4x-1=0;\ \left(z+\frac{1}{2}\right)(8z^2-4z-2)=0$$

Que lleva a

$$\begin{cases} z = -\dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \\ z = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

Por tanto:

$$\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{1}{2};\ \ \theta = \arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 120° + k360° \\ \cos\theta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\ \ \theta = \arccos\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 36° + k360° \\ \cos\theta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\ \ \theta = \arccos\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 108° + k360° \end{cases}$$

Donde k es cualquier entero.

Noviembre 17: Sean las sucesiones: $a_n = 15n - 4$; $b_k = 6k + 7$, ¿qué elementos tienen en común?

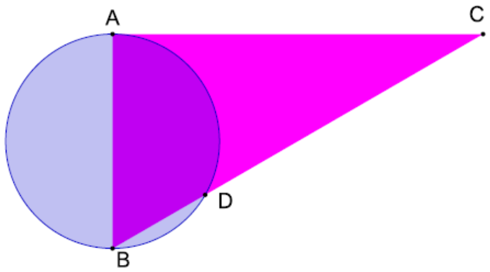
Nivel: A partir de tercero de ESO. Preparación OMS.

Solución: Si suponemos que ambas colecciones tienen elementos en común tendremos:

$$15n - 4 = 6k + 7;\ \ 15n - 11 = 6k;$$

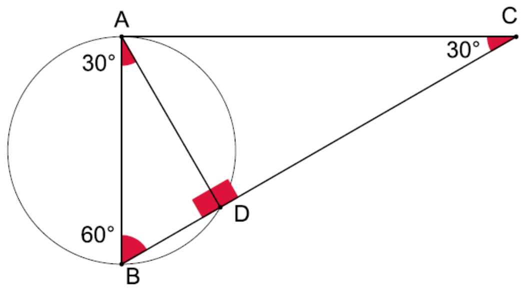
Es decir, $15n - 11$ es múltiplo de 6 y por tanto de 3, y como $15n$ es múltiplo de 3, tendremos que 11 es múltiplo de tres, que es un absurdo.

Noviembre 18-19: En la figura hay una circunferencia de diámetro AB y el triángulo △ABC es rectángulo en A con ∠B = 60°. Si BD = $\sqrt{3}$, calcular perímetros y áreas de △BAD, △ADC y △ABC

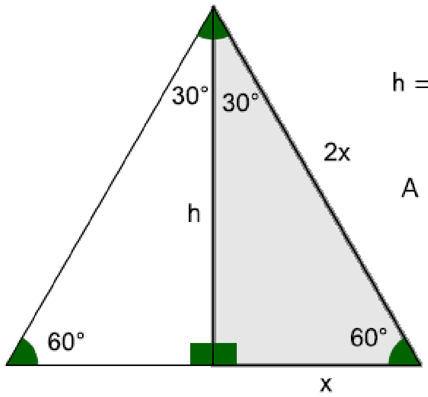


Nivel: A partir de 3ESO. Preparación OMS.

Solución: Al ser AB un diámetro de la circunferencia, tenemos que ∠ADB = 90°, y como ∠ABD = 60°, tendremos que ∠BAD =30°. Es decir ΔABD es un triángulo 30°-60°-90°. Análogamente ∠ADC = 90° y como ∠DAC = 60°, tendremos que ∠DCA =30°. Es decir ΔADC es un triángulo 30°-60°-90°



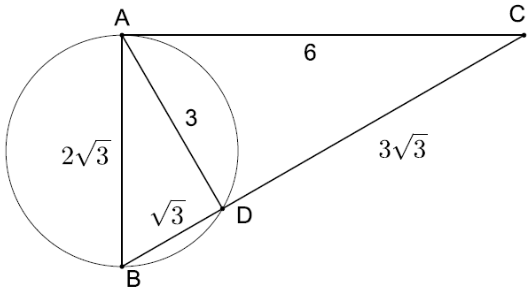
Recordemos que en los triángulos 30°-60°-90° se tiene que el cateto pequeño mide la mitad de la hipotenusa (ya que él, junto con su simétrico respecto al cateto grande forman un triángulo equilátero) y que el cateto grande mide raíz de tres veces el cateto pequeño, por lo que el área es raíz de tres veces el cuadrado del cateto pequeño



$$h = \sqrt{4x^2 - x^2} = \sqrt{3}x$$

$$A = \frac{x \cdot h}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$$

Aplicando lo anterior a los dos triángulos 30°-60°-90°, tendremos la figura adjunta. Lo que permite calcular áreas y perímetros:

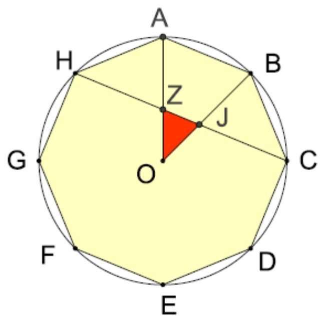


$$\Delta ABD \Rightarrow \begin{cases} P = 3 + 3\sqrt{3} \\ A = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Delta ACD \Rightarrow \begin{cases} P = 9 + 3\sqrt{3} \\ A = \dfrac{9\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

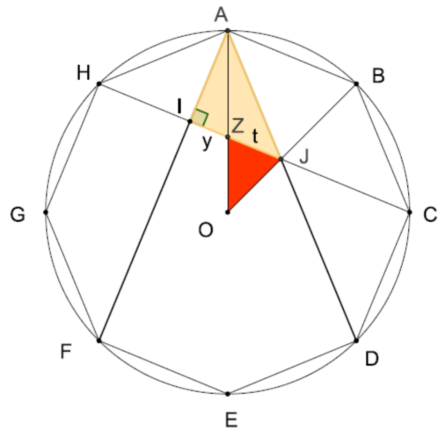
$$\Delta ABC \Rightarrow \begin{cases} P = 6 + 6\sqrt{3} \\ A = \dfrac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \end{cases}$$

Noviembre 21-22: En una circunferencia de centro O y radio unidad se inscribe un octógono regular ABCDEFGH. Calcular ángulos, perímetro y área del triángulo △OZJ



Nivel: Preparación OME y OMS.

Solución: Empezamos por los ángulos. El ángulo en O mide 45° (pues es el ángulo central asociado al arco AB = 360°/8). Además ΔABO ≈ΔZJO (pues están en posición de Tales) y como ΔABO es isósceles (pues OA = OB = 1), tenemos que OZ = OJ. De aquí ∠OZJ = ∠OJZ = 67,5°.



Para los lados utilizaremos algunos resultados del triángulo ΔAIJ. A saber, que es rectángulo en I e isósceles siendo $\mathrm{AI} = \mathrm{IJ} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ y $\mathrm{AJ} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

Obviamente AO es la bisectriz del ángulo ∠IAJ (por simetría). Aplicando el teorema de la bisectriz tendremos: $\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{y}} = \frac{\mathrm{AJ}}{\mathrm{t}} \Rightarrow \mathrm{t} = \sqrt{2}\mathrm{y}$ que junto con $\mathrm{t} + \mathrm{y} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ forman un sistema con solución

$$\mathrm{y} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,, \qquad \mathrm{t} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Ahora, en ΔAIZ tenemos al aplicar Pitágoras

$$\mathrm{AZ} = \sqrt{(\mathrm{AI})^2 + \mathrm{y}^2} = \frac{2}{2+\sqrt{2}}$$

Con lo que:

$$P = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \frac{4}{2+\sqrt{2}}$$

Y, por último:

$$\mathrm{OJ} = \mathrm{OZ} = \mathrm{AO} - \mathrm{AZ} = 1 - \frac{2}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

Para el área del triángulo ΔOZJ, utilizamos la fórmula que calcula el área como la mitad del producto de dos lados consecutivos por el seno del ángulo que forman los lados. Tendremos:

$$\mathrm{A} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^2 \mathrm{sen}(45°)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12+8\sqrt{2}}$$

Noviembre 23: Calcular el producto del natural formado por m doses y el natural formado por m nueves

Nivel: A partir de 2ESO.

Solución: Aportamos dos soluciones:

1.- Considerando los números como la suma de los términos de una PG. Tenemos:

$$a=\overbrace{222\ldots2}^{m}=2\left(\overbrace{111\ldots.1}^{m}\right)=2\left(\overbrace{100\ldots0}^{m}+\overbrace{100\ldots0}^{m-1}+\cdots+1\right)=2\,\frac{10^m-1}{10-1}$$

$$b=\overbrace{999\ldots9}^{m}=9\left(\overbrace{111\ldots.1}^{m}\right)=9\left(\overbrace{100\ldots0}^{m}+\overbrace{100\ldots0}^{m-1}+\cdots+1\right)=9\,\frac{10^m-1}{10-1}$$

$$a\cdot b=2\,\frac{10^m-1}{10-1}\cdot 9\,\frac{10^m-1}{10-1}=\frac{2\cdot 9}{9\cdot 9}(10^m-1)\cdot(10^m-1)$$

$$=\frac{2}{9}\cdot 10^m\cdot(10^m-1)-\frac{2}{9}(10^m-1)=2\cdot\frac{\overbrace{999\ldots9}^{m}}{9}\cdot 10^m-2\cdot\frac{\overbrace{999\ldots9}^{m}}{9}$$

$$=2\cdot\overbrace{111\ldots.1}^{m}\cdot 10^m-2\cdot\overbrace{111\ldots1}^{m}$$

Es decir:

$$a\cdot b=2\cdot\overbrace{111\ldots.1}^{m}\cdot 10^m-2\cdot\overbrace{111\ldots1}^{m}=\overbrace{222\ldots2}^{m}\cdot 10^m-\overbrace{222\ldots2}^{m}$$

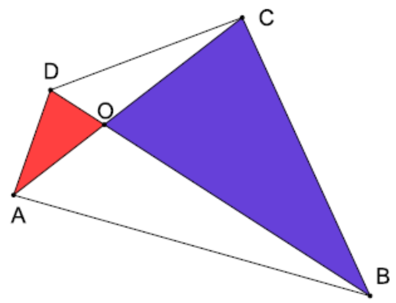
Por tanto:

$$\begin{array}{rr|l}
 & \overbrace{222\ldots222}^{m} & \overbrace{000\ldots000} \\
- & & 222\ldots222 \\
\hline
 & \underbrace{222\ldots221}_{m} & \underbrace{777\ldots778}_{m}
\end{array}$$

2.- Directamente:

$$\begin{array}{r|l}
 & \overbrace{\overset{1}{2}\overset{1}{2}\overset{1}{2}\ldots\ldots\overset{1}{2}\overset{1}{2}\overset{1}{2}2}^{m} \\
 & 999\ldots\ldots9999 \\
\hline
1 & 999\ldots\ldots9998 \\
19 & 999\ldots\ldots998 \\
199 & 999\ldots\ldots98 \\
1999 & 99\,9\ldots\ldots\underset{2}{8}\,\overset{}{1} \\
\vdots & \vdots \\
\overset{3}{1}999\ldots\ldots9999 & 998 \\
\overset{2}{1}9999\ldots\ldots9999 & 98 \\
\overset{1}{1}99999\ldots\ldots\underset{m-2}{9}\underset{m-1}{9}\underset{m-1}{9}9 & \underset{m-2}{8} \\
\hline
222222\ldots\ldots2221 & 777\ldots\ldots7778
\end{array}$$

$9(m-1)+8+m-2=9m-9+8+m-2=10m-3=10(m-1)+7=10(m-1)+7$
$9(m-1)+1+m-1=9m-9+m=10m-9=10(m-1)+1$
$9(m-2)+1+m-1=9m-18+m=10m-8=10(m-2)+10-10+2$



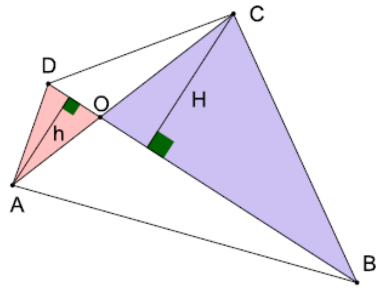
Noviembre 24-25: En un cuadrilátero ABCD sea O el punto de corte de las diagonales. Si el área del △ADO es 2 y el área del △COB es 11.

Averiguar el menor valor posible del área del △DOC

Nivel: Preparación OME.

Solución: Primero probaremos que en una situación como esta $A_{\Delta DOC} \cdot A_{\Delta AOB} = A_{\Delta DOA} \cdot A_{\Delta COB}$

De la ilustración adjunta tenemos:



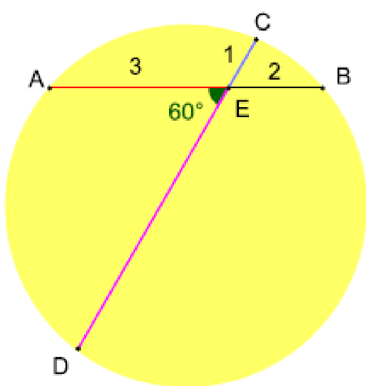
$$A_{\Delta ADO} \cdot A_{\Delta COB} = \frac{OD \cdot h}{2} \cdot \frac{OB \cdot H}{2} = \frac{OD \cdot H}{2} \cdot \frac{OB \cdot h}{2}$$
$$= A_{\Delta DOC} \cdot A_{\Delta AOB}$$

Luego si $x = A_{\Delta DOC}$ e $y = A_{\Delta AOB}$ tenemos: $x \cdot y = 11 \cdot 2 = 22$

Por la desigualdad aritmético-geométrica tenemos:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} = \sqrt{22}$$

Y la igualdad solo acontece cuando x = y. Luego el menor valor de x y de y son aquellos para los que $x^2 = 22 \quad \Rightarrow \quad x = y = \sqrt{22}$



Noviembre 26-27: De dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se sabe que se cortan en E con un ángulo de 60°. Si AE = 3, EB = 2 y EC = 1, hallar el radio de la circunferencia

Nivel: A partir de 4ESO. Preparación OME y OMS

Solución: Utilizaremos geometría analítica. Empezamos por disponer un sistema de ejes coordenados centrados en A(0, 0) y con E(3, 0) y B(5, 0) en el eje X. Los pasos a seguir son:

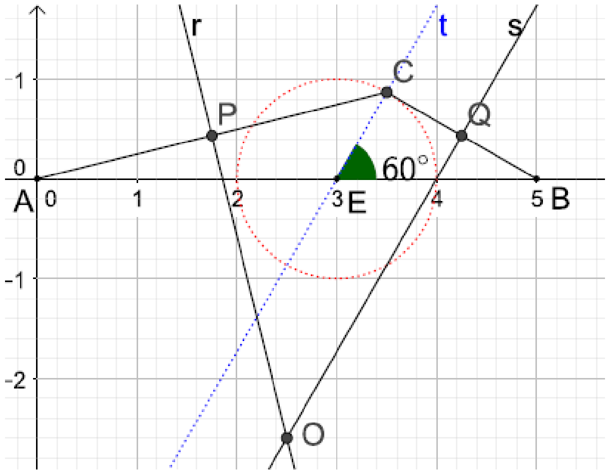
1.- Hallar las coordenadas de C. Para ello calcularemos la recta t que pasa por E(3, 0) con pendiente m = tag 60° y calcularemos la intersección de esta recta con la circunferencia de centro E(3, 0) y radio 1

2.-Cálculo de la recta r ⊥ al segmento AC que pasa por el punto medio de AC

3.- Cálculo de la recta s ⊥ al segmento CB que pasa por el punto medio de CB.

4.- Cálculo del centro de la circunferencia solicitada: O = r ∩ s

5.- El radio es la distancia entre A y O



1.- Recta que pasa por E(3, 0) y con pendiente tag 60° = $\sqrt{3}$: $y = \sqrt{3}(x-3)$

Circunferencia centrada en E(3, 0) y radio 1: $(x-3)^2 + y^2 = 1$

$$\left.\begin{array}{r}(x-3)^2 + y^2 = 1\\ y = \sqrt{3}(x-3)\end{array}\right\} \Rightarrow x = \begin{cases}\frac{7}{2}\\ \frac{5}{2}\end{cases} \quad \Rightarrow \quad C\left(\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Pues x= 5/2 corresponde al punto por debajo del eje X.

2.- Punto medio de A(0, 0) y C $\left(\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$: $P\left(\frac{7}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Pendiente de la recta que pasa por A y C: $m = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}-0}{\frac{7}{4}-0} = \frac{\sqrt{3}}{7}$

Recta ⊥ al segmento AC que pasa por $P\left(\frac{7}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$: $y - \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{7}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{7}{4}\right)$; $y = -\frac{7}{\sqrt{3}}x + \frac{13}{\sqrt{3}}$

3.-Punto medio de C $\left(\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y B(5, 0): $Q\left(\frac{17}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Pendiente de la recta que pasa por C y B: $m = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-0}{\frac{7}{2}-5} = \frac{\sqrt{3}/2}{-3/2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Recta ⊥ al segmento CB que pasa por $Q\left(\frac{17}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$: $y - \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\left(x - \frac{17}{4}\right)$, $y = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3}$

4.- Intersección de r y s:

$$\left.\begin{array}{r}y = -\frac{7}{\sqrt{3}}x + \frac{13}{\sqrt{3}}\\ y = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3}\end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{7}{\sqrt{3}}x + \frac{13}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3}, \quad \frac{13}{\sqrt{3}} + 4\sqrt{3} = x\left(\sqrt{3} + \frac{7}{\sqrt{3}}\right),$$

$$x = \frac{25/\sqrt{3}}{10/\sqrt{3}} = \frac{5}{2}, \quad y = \sqrt{3}\frac{5}{2} - 4\sqrt{3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow O\left(\frac{5}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

5.- Cálculo del radio:

$$R = d(A, O) = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{13}$$

Noviembre 28: Resolver:

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{x + xy + y = -9} \\ \mathbf{x^2 + y^2 = 17} \end{array}\right\}$$

Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: Multiplicando la primera ecuación por 2 y sumando la segunda ecuación obtenemos:

$$x^2 + y^2 + 2(x + xy + y) = 17 - 18,\ \ x^2 + y^2 + 2xy + 2(x + y) = -1,$$

$$(x + y)^2 + 2(x + y) + 1 = 0,\ (x + y + 1)^2 = 0, \qquad x + y = -1$$

Sustituyendo esta igualdad en la primera ecuación tenemos:

$$xy - 1 = -9, \qquad xy = -8$$

El sistema propuesto es equivalente a:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = -1 \\ xy = -8 \end{array}\right\}$$

Que pasamos a resolver. De la primera despejamos y $y = -1 - x$ sustituimos y en la segunda:

$$x(-1 - x) = -8;\ x^2 + x - 8 = 0;\ \ x = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2} = \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1 + \sqrt{33}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

No es totalmente necesario calcular los valores de y pues al ser el sistema propuesto simétrico tenemos que si (a, b) es solución también lo es (b, a). Por lo tanto:

$$y_1 = x_2 = \frac{-1 + \sqrt{33}}{2};\ \ y_2 = x_1 = -\frac{1 + \sqrt{33}}{2}$$

No obstante, si se quieren calcular los valores de y:

$$y_1 = -1 - x_1 = -1 + \frac{1 + \sqrt{33}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{33}}{2},\ \ y_2 = -1 - x_2 = -1 - \frac{-1 + \sqrt{33}}{2} = -\frac{1 + \sqrt{33}}{2}$$

Noviembre 29-30: Cinco personas tienen cada una de ellas una plaza de aparcamiento en un mismo garaje. Como las cinco plazas están juntas han decidido aparcar escogiendo aleatoriamente la plaza de entre las que están desocupadas cuando llegan a aparcar. Un determinado día todas las plazas han sido desocupadas, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno de los vehículos aparcados en los extremos de las plazas aparque de nuevo en una plaza que este en un extremo?

Nivel: A partir de 4ESO.

Solución: Los casos posibles serán las formas de escoger cinco plazas entre los cinco coches disponibles, es decir 5!. Para los casos favorables razonamos de la siguiente forma: Si A y B fueron los coches que ocuparon las plazas extremas, entonces A puede aparcar en tres plazas no extremas y entonces B puede aparcar en dos plazas que no son extremas. Quedan entonces 3 plazas que pueden ser escogidas de 3! maneras entre los demás coches. Así que los casos favorables son 3·2·3!. La probabilidad solicitada es:

$$\frac{3 \cdot 2 \cdot 3!}{5!} = \frac{3}{10}$$