SOLUCIONES DICIEMBRE 2016

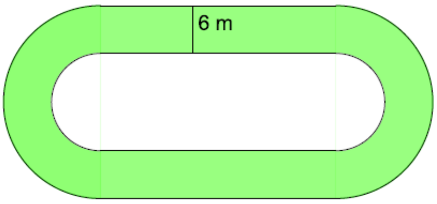
Soluciones extraídas del libro:

XVII CONCURSO DE PRIMAVERA 2013

Obtenible en http://www.concursoprimavera.es#libros

Autores: Colectivo "Concurso de primavera". Comunidad de Madrid

Diciembre 1-2: En la pista de atletismo de la figura, Laia, si corre "por fuera" tarda seis segundos más que si "corre por dentro", en dar una vuelta completa corriendo a una misma velocidad. ¿Cuál es esta?



Nivel: A partir de 2ESO.

Solución: En una vuelta completa, la diferencia entre la distancia recorrida por fuera y la recorrida por dentro es $2\pi(R+6) - 2\pi R = 12\pi$. Si tarda 6 segundos más en recorrer la vuelta por fuera, lleva una velocidad de 2π m/s

Diciembre 3: Aitana ha tardado 20 minutos menos que Laia en completar una carrera. Si Laia corre a 5 km/h menos que Aitana, ¿qué distancia tenía la carrera?

Nivel: A partir de 2ESO.

Solución: Faltan datos para determinar la solución del problema. Si t_A, t_L, v_A, y v_L son los tiempos y velocidades empleados por Aitana y Laia, tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} t_A = t_L - \dfrac{1}{3} \\ v_L = v_A - 5 \end{array}\right\} \Rightarrow v_A \cdot t_A = v_L \cdot t_L \Rightarrow v_A \cdot t_A = (v_A - 5) \cdot \left(t_A + \frac{1}{3}\right) \Rightarrow v_A = 15t_A + 5$$

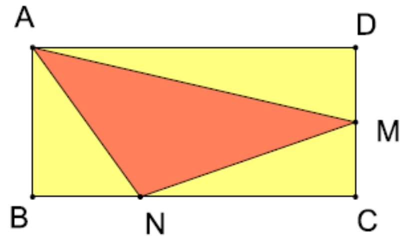
Si, por ejemplo, t_A = 1 hora, v_A = 20 y el espacio recorrido es de 20 km.

Diciembre 4: Halla los números de dos cifras que son el triple del producto de sus cifras.

Nivel: A partir de 4ESO. Preparación OME y OMS.

Solución: Debemos resolver $10\cdot a + b = 3\cdot a\cdot b$, siendo a y b dígitos con a no nulo. Tendremos: $b = a(3b - 10)$. Por lo tanto, b debe ser mayor que 3 y menor que 7. Para b= 4 se obtiene a = 2. Para b = 5 se obtiene a = 1 y para b = 6 no hay solución para a. Por lo tanto, sólo hay dos números que cumplan el enunciado: el 25 y el 15.

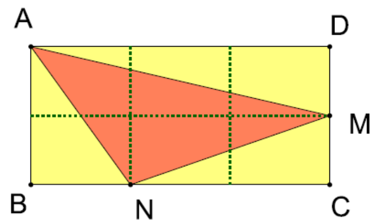
Diciembre 5, 6: El rectángulo ABCD tiene área 48; M es el punto medio del lado DC y 3·BN = BC. ¿Cuál es el área del triángulo △ANM?



Nivel: A partir de 2ESO.

Solución:

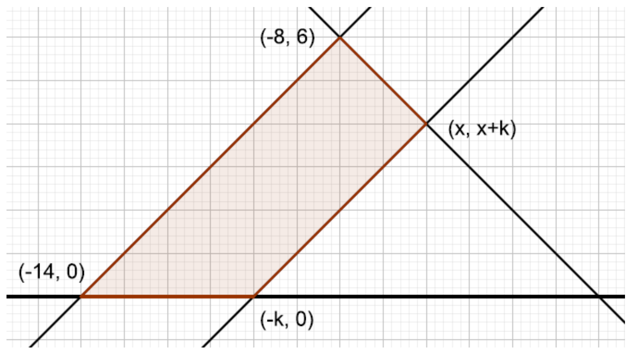
$A_{\Delta \mathrm{ANB}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 48 = 8$; $A_{\Delta ADM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 48 = 12$; $A_{\Delta NMC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} 348 = 8$; $A_{\Delta ANM} = 48 - (8 + 12 + 8) = 20 \cdot$



Diciembre 7: Las gráficas de y=-|x+8|+6, y=0 e y=x+k, determinan en el cuadrante segundo un trapecio de área 20. Hallar k

Nivel: A partir de 4ESO. Preparación OMS

Solución: El trapecio se puede obtener como diferencia de dos triángulos, el grande de base 12 y altura 6 y el pequeño de base k – 2 y altura $\frac{k}{2} - 1$ (altura del punto de intersección de las rectas y = x + k, y = - x – 2). Así el área del trapecio es:



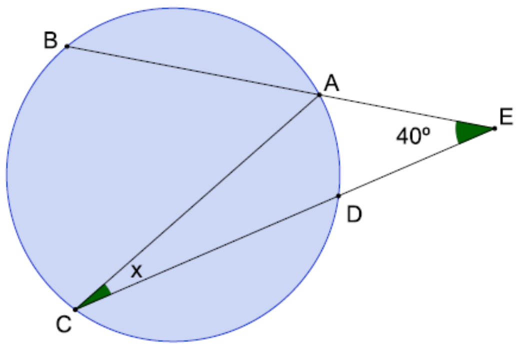
$$36 - \frac{(k-2)^2}{4} = 20 \;\Rightarrow\; k = 10$$

Diciembre 8: Seleccionamos al azar dos números reales en [-20; 10], ¿cuál es la probabilidad de que su producto sea positivo?

Nivel: A partir de 4ESO. Preparación OMS.

Solución: El producto es positivo si los dos números son ambos positivos o ambos negativos. La probabilidad de que los dos sean positivos es 1/3·1/3. La probabilidad de que los dos sean negativos es 2/3·2/3. Por tanto la probabilidad pedida es: 4/9 + 1/9 = 5/9

Diciembre 9, 10: En la figura $\angle E = 40°$ y los arcos AB, BC y CD son de igual longitud. Hallar el ángulo x



Nivel: A partir de 4ESO.

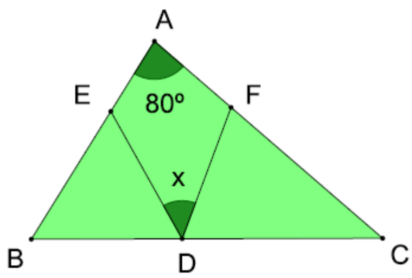
Solución: Como el ángulo exterior mide 40°, la diferencia entre los arcos BC y AD es de 80°. Por otro lado 3 BC + AD = 360°. Así que 240° + 4 AD = 360°. Tenemos entonces que AD = 2x = 30°

Diciembre 11: Laia elige 6 primos menores que 20: A, B, C, D, E y F. Observa que: A+B=C+D=E+F. ¿Cuánto vale E+F?

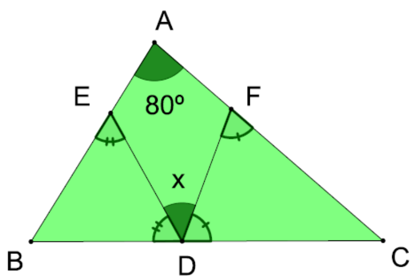
Nivel: A partir de 1ESO.

Solución: Los números primos menores que 20 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19. Manipulándolos tenemos: 5 + 19 = 7 + 17 = 11 + 13, luego E + F = 24

Diciembre 12, 19: En el triángulo $\triangle ABC$ se tiene que $\angle A = 80°$; los puntos E, D y F (en los lados BA, BC y AC, respectivamente), cumplen que BE = BD; CF = CD. Hallar el ángulo x



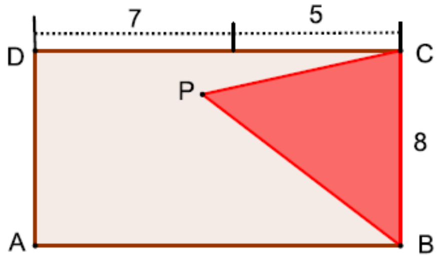
Nivel: A partir de 2ESO.



Solución: Los ángulos B y C suman 100°. Como BE = BD (CF = CD) $\Rightarrow$ ΔBED (ΔCDF) es isósceles. De aquí: $\angle B + 2\angle E = 180°$ ($\angle C + 2\angle F = 180°$). Sumando ambas igualdades tenemos: $100° + 2(\angle E + \angle F) = 360° \Rightarrow \angle E + \angle F = 130°$. Y como los tres ángulos: $\angle E$, $\angle F$ y x forman un llano, tendremos que x = 50°

Diciembre 13: En el rectángulo ABCD, de lados AB=12 y BC=8, elegimos el punto P al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el triángulo PBC tenga área mayor que 20?

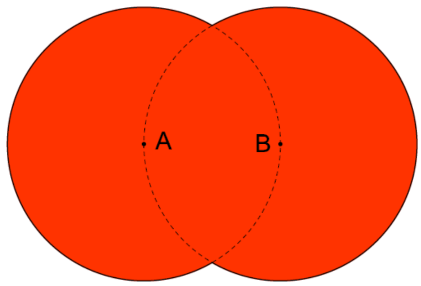
Nivel: A partir de 4ESO. Preparación OMS.



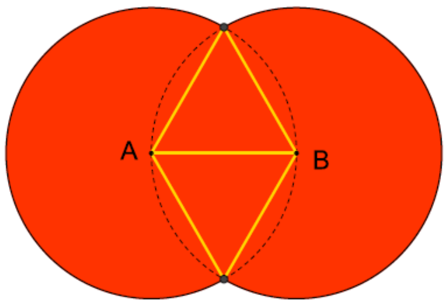
Solución: Para que el triángulo ΔPBC tenga área mayor que 20, debe tener altura mayor que 5, es decir debe escogerse P en el rectángulo de base 7 y altura 8. Por lo tanto, la probabilidad pedida es:

$$\frac{7 \cdot 8}{12 \cdot 8} = \frac{7}{12}$$

Diciembre 14, 15: En la figura se aprecian dos circunferencias de perímetro 6, colocadas de tal manera que cada una pasa por el centro de la otra. ¿Qué perímetro tiene la figura pintada de rojo?



Nivel: A partir de 4ESO. Preparación OMS.



Solución: Al perímetro de dos circunferencias le hemos de quitar el perímetro de los arcos de trazo discontinuo. Se forman dos triángulos equiláteros de lado el radio de cada circunferencia, y por tanto el arco de trazo discontinuo corresponde a un arco de 120°. El perímetro de cada arco es (6/3 =) 2. Por lo tanto, el perímetro de la figura pintada de rojo es (12 – 4 =) 8

Diciembre 16: Si b > 1, x > 0 y: $(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0$, hallar x

Nivel: Primero de bachillerato.

Solución: Si $(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0$, entonces $(2x)^{\log_b 2} = (3x)^{\log_b 3}$ y tomando logaritmos $\log_b 2 \cdot \log(2x) = \log_b 3 \cdot \log(3x)$. Dividiendo por $\log_b 10$, cambiamos los logaritmos en base b a logaritmos decimales, y así tenemos: $\log 2 \cdot (\log 2 + \log x) = \log 3 \cdot (\log 3 + \log x) \Rightarrow \log x = -\log 2 - \log 3 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$

Diciembre 17: Si P, Q y R son dígitos con:

$$\begin{array}{cccccc} & & \mathbf{P} & \mathbf{Q} & \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \times & & & \mathbf{R} & \mathbf{R} & \mathbf{R} \\ \hline \mathbf{6} & \mathbf{3} & \mathbf{9} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{7} \end{array}$$

hallar P, Q y R
Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: Tenemos PQPQ·RRR = (100·PQ + PQ)·(100·R + 10·R + R) = (101·PQ)·(111·R) = 11211·PQ·R = 639027 $\Rightarrow PQ \cdot R = \frac{639027}{11211} = 57 = 19 \cdot 3 = 57 \cdot 1$. Por tanto, PQ =19 y R = 3 o PQ = 57 y R = 1.

Diciembre 18: Hallar el resto de dividir 7^{25} entre 9

Nivel: A partir de 4ESO. Preparación OMS y OME.

Solución: Como: 7 = 7(9); 7^2 = 49(9) = 4(9); 7^3= 7^2(9)·7(9) = 4(9)·7(9) = 28(9) = 1(9), tendremos ya formado el ciclo:

$7, 7^4, 7^7$,……..=7(9)

$7^2, 7^5, 7^8$,……=4(9)

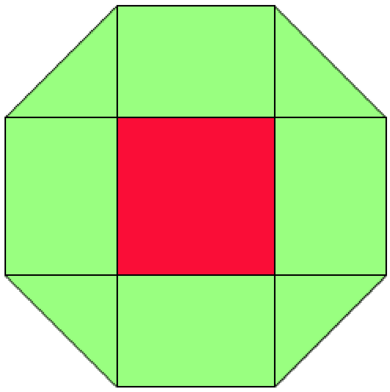
$7^3, 7^6, 7^9$,……=1(9)

En otras palabras:

$$7^n = \begin{cases} 7(9) & \Leftrightarrow \quad n = 1,4,7,\ldots . \Leftrightarrow n = 1(3) \\ 4(9) & \Leftrightarrow \quad n = 2,5,8,\ldots . \Leftrightarrow n = 2(3) \\ 1(9) & \Leftrightarrow \quad n = 3,6,9,\ldots . \Leftrightarrow n = 0(3) \end{cases}$$

Como 25 =1(3), 7^{25} = 7(9), es decir el resto de dividir 7^{25} entre 9 es 7.

Diciembre 20, 21: En un concurso de dardos, la diana tiene forma de octógono regular. Si el dardo puede caer en cualquier punto de la diana con igual probabilidad, ¿cuál es la probabilidad de que caiga en el cuadrado pintado de rojo?



Nivel: A partir de 4ESO. Preparación OMS

Solución: Hemos de dividir el área del cuadrado de color rojo entre el área del octógono. El área del cuadrado rojo es l^2, pues tiene el mismo lado que el octógono. El área del octógono es $\frac{2l^2}{\sqrt{2}-1}$.

Por tanto, la probabilidad solicitada es: $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Diciembre 22: Sean M, p y q positivos con q < 100. ¿Qué debe cumplirse para que si aumentamos M un p% y luego lo disminuimos un q% tengamos aún una cantidad mayor que M?

Nivel: A partir de 3ESO.

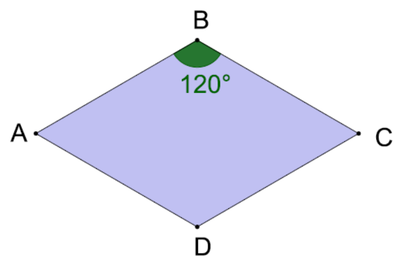
Solución: Cuándo M crece un p% y luego decrece un q%, pasa a valer $M \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{q}{100}\right)$.

Para que esta cantidad sea mayor que M debe ser:

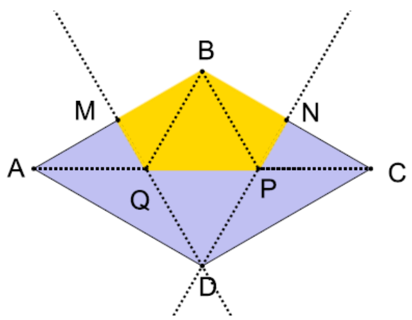
$$\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{q}{100}\right)>1 \quad\Leftrightarrow\quad 1+\frac{p-q}{100}-\frac{pq}{10000}>1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{p}{100}\left(1-\frac{q}{100}\right)>\frac{q}{100}$$

$$\Leftrightarrow \quad p>\frac{100q}{100-q}$$

Diciembre 23, 24: En el rombo ABCD, de lado 2, el ángulo B mide 120°. ¿Cuál es el área de la región interior del rombo formada por los puntos que están más cerca del vértice B que de cualquier otro vértice?



Nivel: Preparación OME.



Solución: Las mediatrices de los segmentos AB y BC junto con el segmento QP determinan la zona de puntos que están más cerca del vértice B que de cualquier otro vértice. Debemos hallar el área del pentágono BMQPN. Como el ángulo en B es de 120°, el rombo se compone de dos triángulos equiláteros de lado 2 y altura $\sqrt{3}$. Las diagonales del rombo son 2 y $2\sqrt{3}$ y su área es $2\sqrt{3}$. Como P y Q son los baricentros de los triángulos equiláteros ΔBCD y ΔABD, PC = PD = PQ = $\frac{1}{3}$AC = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

El área del triángulo ΔQPD es la tercera parte del área del triángulo ΔACD, que es la sexta parte del área del rombo ABCD, es decir:

$$A_{\Delta QPD}=\frac{1}{6}2\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Por último, el área del pentágono BMQPN es el doble del área del triángulo ΔQPD, es decir $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Diciembre 25: Si a y b son naturales con (a + 2b)·(a – b)=10, ¿cuánto vale (2a – b)?

Nivel: A partir de 2ESO.

Solución: De (a + 2b)·(a – b)=10 siendo a y b naturales caben dos opciones, por la unicidad de la descomposición factorial en primos:

1.- $\left.\begin{matrix} a+2b=10 \\ a-b=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad a=4, b=3$

2.- $\left.\begin{array}{r} a+2b=5 \\ a-b=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a=3, b=1$

Y en los dos casos 2·a – b = 5

Diciembre 26, 27: Resolver:

$$\log_{\sqrt{2}}\sqrt{\mathrm{x}}+\log_2\mathrm{x}+\log_4\mathrm{x}^2+\log_8\mathrm{x}^3+\log_{16}\mathrm{x}^4=40$$

Nivel: Bachillerato. Preparación OME.

Solución: Observemos que

$$\log_{2^n}\mathrm{x}^n=\frac{\log_2\mathrm{x}^n}{\log_2 2^n}=\frac{\mathrm{n}\log_2\mathrm{x}}{\mathrm{n}}=\log_2\mathrm{x}$$

Así pues:

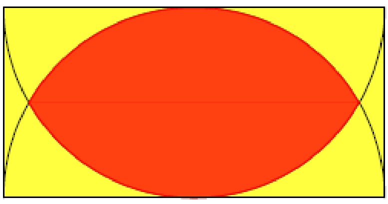
$$\log_{\sqrt{2}}\sqrt{\mathrm{x}}+\log_2\mathrm{x}+\log_4\mathrm{x}^2+\log_8\mathrm{x}^3+\log_{16}\mathrm{x}^4=40 \;\Rightarrow$$
$$\log_2\mathrm{x}+\log_2\mathrm{x}+\log_2\mathrm{x}+\log_2\mathrm{x}+\log_2\mathrm{x}=40 \quad\Rightarrow$$
$$5\log_2\mathrm{x}=40 \quad\Rightarrow\quad \log_2\mathrm{x}=8 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{x}=2^8=256$$

Diciembre 28: Dos triángulos isósceles distintos, tienen igual área. En ambos, sus lados iguales miden 26 cm. Si la base de uno mide 48 cm, hallar la base del otro

Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: La altura del triángulo cuya base mide 48 cm es: $\sqrt{26^2-24^2}=10$, y su área es (48·10/2=) 240 cm^2. Como los dos triángulos tienen igual área, la del segundo podemos expresarla como: $\frac{b\cdot h}{2}=240$, y de aquí $b=\frac{480}{h}$. Como $h=\sqrt{26^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2}$, la expresión anterior queda $b=\frac{480}{\sqrt{26^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2}}$. De aquí se deduce $b\sqrt{676-\left(\frac{b}{2}\right)^2}=480 \;\Rightarrow\; b^2\cdot\left(676-\frac{b^2}{4}\right)=480^2$. Operando queda $b^4-676\cdot 4\cdot b^2+230400\cdot 4=0$, que lleva a b = 20

Diciembre 29, 30: La base del rectángulo de la figura mide 4 y su altura 2, ¿cuál es el área de la región roja generada por dos semicircunferencias con centros en los lados largos del rectángulo?



Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: El área de la región roja es el doble del área de un segmento circular de ángulo central 120° en un círculo de radio R = 2. Como $A_{segmento}=A_{sector}-A_{triángulo}$, tendremos:

$$A_{\mathrm{segmento}}=\frac{120}{360}4\pi-\frac{\mathrm{b}\cdot\mathrm{h}}{2}=\frac{4\pi}{3}-\frac{2\sqrt{3}\cdot 1}{2}=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$$

De aquí, que el área solicitada sea $A = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$

Diciembre 31: Resolver:

$$\sqrt{5|x| + 8} = \sqrt{x^2 - 16}$$

Nivel: 4ESO. Preparación OMS.

Solución: La ecuación $\sqrt{5|x| + 8} = \sqrt{x^2 - 16}$ es equivalente a $x^2 - 5|x| - 24 = 0$. Si $x > 0$, la ecuación es $x^2 - 5x - 24 = 0$, con soluciones $x = 8$ y $x = -3$, no siendo válida esta última porque no es mayor que 0. Si $x < 0$, la ecuación es $x^2 + 5x - 24 = 0$, con soluciones $x = -8$ y $x = 3$, no siendo esta última válida porque no es menor que 0. Las soluciones válidas son 8 y – 8.