SOLUCIONES MARZO 2017

Autor: Rafael Martínez Calafat. Profesor jubilado de Matemáticas

Marzo 1: Hallar los valores de k de manera que $5n^3+4n+k$ sea múltiplo de 3 para todo n natural

Nivel: Preparación Olimpiada Matemática Española (OME).

Solución: Como se trata de la divisibilidad por 3, consideramos restos módulo 3. Tenemos:

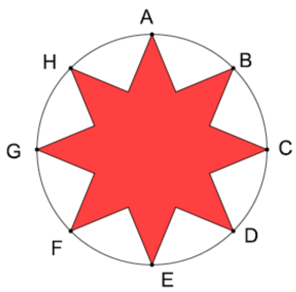
$$n = 0(3) \;\Rightarrow\; \left.\begin{cases} 5n^3 = 0(3) \\ 4n = 0(3) \\ k = k(3) \end{cases}\right\} \Rightarrow 5n^3 + 4n + k = k(3)$$

$$n = 1(3) \;\Rightarrow\; \left.\begin{cases} 5n^3 = 2(3) \\ 4n = 1(3) \\ k = k(3) \end{cases}\right\} \Rightarrow 5n^3 + 4n + k = k(3)$$

$$n = 2(3) \;\Rightarrow\; \left.\begin{cases} 5n^3 = 1(3) \\ 4n = 2(3) \\ k = k(3) \end{cases}\right\} \Rightarrow 5n^3 + 4n + k = k(3)$$

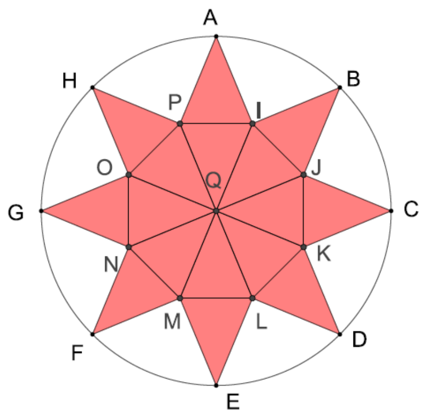
Por tanto, $5n^3+4n+k$ es múltiplo de 3 para todo n natural sii k es múltiplo de 3

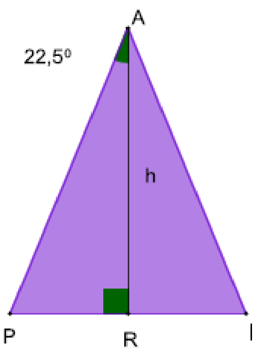
Marzo 2, 3: Calcular el área y el perímetro de una estrella regular de ocho puntas inscrita en una circunferencia de radio 1



Nivel: A partir de 4ESO.

Solución: La estrella se descompone en 16 triángulos isósceles iguales con altura sobre el lado desigual, igual a ½ (pues dos alturas coinciden con el radio de la circunferencia inicial). Además, el ángulo desigual, por ejemplo, $\angle$A es igual al doble del ángulo inscrito $\angle$FAE, que es el ángulo central $\angle$FQE (=360°/8) = 45°





Tendremos:

$$\operatorname{tg}(22{,}5°) = \begin{cases} = \sqrt{\dfrac{1-\cos(45°)}{1+\cos(45°)}} = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{2}/2}{1+\sqrt{2}/2}} = \sqrt{3-2\sqrt{2}} \\ = \dfrac{\mathrm{PI}/2}{1/2} = \mathrm{PI} \end{cases}$$

$$A_e = 16 \cdot A_t = 16 \cdot \frac{\mathrm{PI} \cdot h}{2} = 4\sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

Para el perímetro tenemos:

$$\cos(22{,}5°) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1+\cos(45°)}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}/2}{2}} = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}} \\ = \dfrac{h}{\mathrm{AP}} = \dfrac{1}{2 \cdot \mathrm{AP}} \end{cases}$$

$$P_e = 16 \cdot \mathrm{AP} = \frac{16}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

(*) Si para calcular tg (22,5°) utilizamos:

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}(x)+\operatorname{tg}(y)}{1-\operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y} \Rightarrow 1 = \operatorname{tg}(45°) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg}(22{,}5°)}{1-\operatorname{tg}^2(22{,}5°)} \Rightarrow 1 = \frac{2z}{1-z^2} \Rightarrow z$$
$$= 1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow \operatorname{tg}(22{,}5°) = \sqrt{2}-1 \text{ (pues } \operatorname{tg}(22{,}5°) > 0)$$

se llega a:

$$A_e = 16 \cdot A_t = 16 \cdot \frac{\mathrm{PI} \cdot h}{2} = 4\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Marzo 4: ¿Qué elementos tienen en común las sucesiones: $a_n = 13n - 2$; $b_k = 11k - 7$?

Nivel: Preparación OME.

Solución: Veamos si ambas colecciones tienen algún elemento en común. Si 13n – 2 = 11k – 7, tendremos que 13n + 5 = 11k

n	13n + 5	k = (13n + 5)/11
1	18	18/11
2	31	31/11
3	44	4

Es decir, en las dos colecciones está el número 37 (para n = 3 y k = 4). Los elementos de las colecciones pueden reescribirse como:

$a_m = 13m + 37$, con $m \in \{-2, -1, 0, 1, \ldots\}$ ($a_1 = 11 = 13m + 37 \Rightarrow m = -2$)

$b_q = 11q + 37$, con $q \in \{-3, -2, -1, 0, \ldots\}$ ($b_1 = 4 = 11q + 37 \Rightarrow q = -3$)

Si hay más elementos en común deben verificar: 13m + 37 = 11q + 37 $\Rightarrow$ 13m = 11q. Y esto último se verifica si: m = 11r y q = 113s. Es decir, los elementos comunes a ambas colecciones son:

$$c_t = 11\cdot 13\cdot t + 37 = 143\cdot t + 37, \text{ para } t\in N$$

Marzo 5: Calcular las tres últimas cifras de 2017^{2017}

Nivel: Preparación OME.

Solución: Tenemos por el binomio de Newton:

$$(2017)^{2017} = (2000+17)^{2017} = \sum_{k=0}^{2017}\binom{2017}{k}\cdot 2^k\cdot 1000^k\cdot 17^{2017-k}$$

$$= \binom{2017}{0}17^{2017} + \left(\sum_{k=1}^{2017}\binom{2017}{k}\cdot 2^k\cdot 1000^{k-1}\right)\cdot 1000$$

Por lo tanto, las tres últimas cifras de 20017^{2017} son las tres últimas cifras de 17^{2017}.

Tenemos por el binomio de Newton:

$$(17)^{2017} = (10+7)^{2017} = \sum_{k=0}^{2017}\binom{2017}{k}\cdot 10^k\cdot 7^{2017-k}$$

$$= 7^{2017} + 10\cdot\binom{2017}{1}\cdot 7^{2016} + 100\cdot\binom{2017}{2}\cdot 7^{2015} + 1000N$$

Por lo tanto, las tres últimas cifras de 17^{2017} son las tres últimas cifras de 7^{2017} más las dos últimas cifras de ($7^{2016}\cdot 2017$) multiplicadas por 10 más la última cifra de ($2033136\cdot 7^{2015}$) multiplicada por 100. Buscamos las tres últimas cifras de 7^n por cálculo directo:

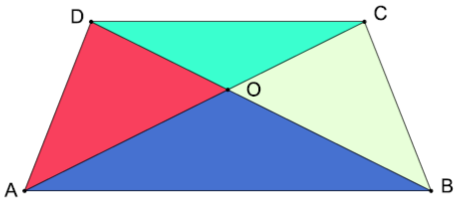
n	7^n acaba en
0, 20, …..(n = 0(20)	001
1, 21, ….(n = 1(20))	007
2, 22, ….(n = 2(20))	049
3, 23, …(n = 3(20))	343
4, 24, ….(n = 4(20))	401
5, 25, … (n = 5(20))	807
6, 26, ….(n = 6(20))	649
7, 27, ….(n = 7(20))	543
8, 28, …(n = 8(20))	801
9, 29, ….(n = 9(20))	607
10, 30, ….(n = 10(20))	249
11, 31, …(n = 11(20))	743

12, 32, ...(n = 12(20))	201
13, 33, ...(n = 13(20))	407
14, 34, ...(n = 14(20))	849
15, 35, ...(n = 15(20))	943
16, 36, ...(n = 16(20))	601
17, 37, ...(n = 17(20))	207
18, 38, ...(n = 18(20))	449
19, 39, ...(n = 19(20))	143

Como 2017 = 20·100 + 17 tenemos que 2017 = 17(20); 2016 = 16(20); 2015=15(20). Y con ello: Las tres últimas cifras de 7^{2017} son 207. Las dos últimas cifras de $2017 \cdot 7^{2016}$, multiplicadas por 10 son las dos últimas cifras de 2017 multiplicadas por las últimas cifras de $7^{20º6}$, multiplicadas por 10, es decir (....601·2017·10 =) 170. La última cifra de $2033136 \cdot 7^{2015}$, multiplicada por 100 son (.....136·.....943·100 =) 800.

Es decir, las tres últimas cifras de 2017^{2017} son 177

Marzo 6, 7: Sea dado un trapecio equilátero ABCD. Si AB = 11; CB = DA = DC = 5 Hallar áreas y perímetros de los triángulos △ADO, △ADB y △ADC



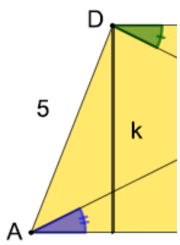
Nivel: Preparación OME y OMS.

Solución: Hallando la altura del trapecio, tenemos:

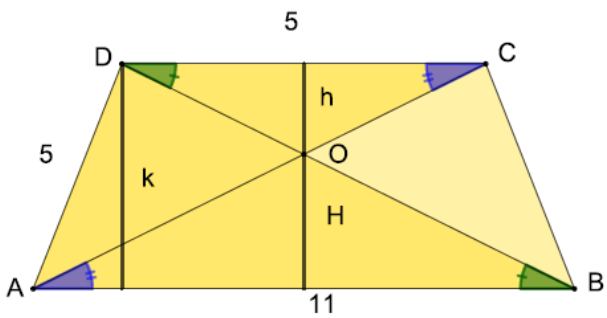
$k^2 + 9 = 25 \Rightarrow k = 4$

Además, tenemos que ΔDOC es semejante al ΔAOB pues los ángulos de color verde y azul son iguales por alternos internos. De aquí:

$$\frac{5}{11} = \frac{h}{H} \Rightarrow 5H = 11h$$



$$\frac{11-5}{2} = 3$$

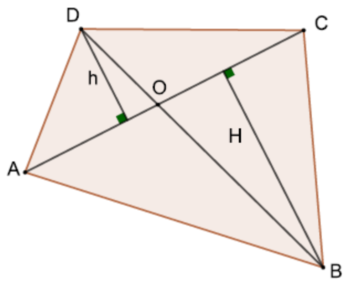


Queda planteado el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} h + H = 4 \\ 5H = 11h \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{11}{4}; \quad h = \frac{5}{4}$$

De aquí:

$$A_{\Delta ODC} = \frac{5 \cdot {}^{5}/_{4}}{2} = \frac{25}{8}; \quad A_{\Delta ABO} = \frac{11 \cdot {}^{11}/_{4}}{2} = \frac{121}{8}$$



Recordemos, ahora que, en un cuadrilátero ABCD se cumple: $A_{\Delta AOD} \cdot A_{\Delta OBC} = A_{\Delta AOB} \cdot A_{\Delta DOC}$ pues:

$$A_{\Delta AOD} \cdot A_{\Delta OBC} = \frac{AO \cdot h}{2} \cdot \frac{OC \cdot H}{2} = \frac{OC \cdot h}{2} \cdot \frac{AO \cdot H}{2}$$
$$= A_{\Delta DOC} \cdot A_{\Delta ABO}$$

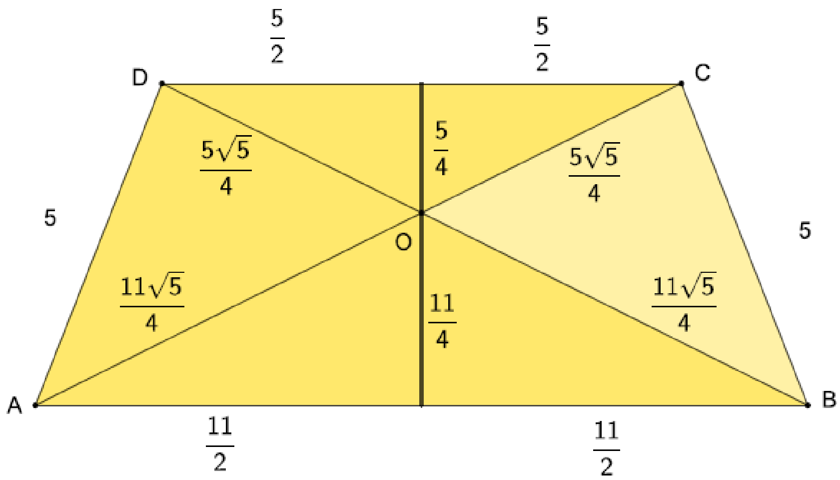
Aplicando lo anterior, al caso que tenemos entre manos, tenemos, ya que $A_{\Delta DOC} = A_{\Delta COB}$ (por simetría) = x

$$\frac{25}{8} \cdot \frac{121}{8} = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{3025}{64}} = \frac{55}{8}$$

Para los demás triángulos tenemos:

$$A_{\Delta ADC} = A_{\Delta DAO} + A_{\Delta DOC} = \frac{55}{8} + \frac{25}{8} = 10; \quad A_{\Delta ADB} = A_{\Delta DAO} + A_{\Delta AOB} = \frac{55}{8} + \frac{121}{8} = 22$$

Para los perímetros, aplicando Pitágoras a los triángulos rectángulos, una vez conocidas h y H:



$$P_{\Delta ADO} = 5 + \frac{11\sqrt{5}}{4} + \frac{5\sqrt{5}}{4} = 5 + \sqrt{5}\,; \quad P_{\Delta ADB} = 5 + 11 + 4\sqrt{5} = 16 + 4\sqrt{5}; \quad P_{\Delta ADC} = 5 + 5 + 4\sqrt{5} = 10 + 4\sqrt{5}$$

Marzo 8: ¿Qué números tienen en común las sucesiones $a_n = 2n - 16$ y $b_k = 5 \cdot 15^{k-1}$

Nivel: Preparación OME.

Solución: Si suponemos que hay algún elemento en común en las dos colecciones, tenemos:

$$2n - 6 = 5^k \cdot 3^{k-1}$$

Pero esto es imposible pues el miembro de la derecha es un número impar (al ser el producto de impares: 3 y 5) y el de la izquierda es par

Marzo 9: Resolver

$$\left. \begin{array}{r} |x^2 - y^2| = 2 \\ x^2 + y^2 = -2xy \end{array} \right\}$$

Nivel: A partir de 4ESO.

Solución: El sistema propuesto es equivalente a los sistemas:

$$1.- \begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = -2xy \end{cases} \qquad 2.- \begin{cases} x^2 - y^2 = -2 \\ x^2 + y^2 = -2xy \end{cases}$$

Para el primero tenemos:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = -2xy \end{cases} \Rightarrow \; x^2 = 2 + y^2 \quad 2 + y^2 + y^2 = -2y\sqrt{2 + y^2} \;\Rightarrow\; (1 + y^2)^2$$

$$= y^2(2 + y^2) \;\Rightarrow\; 1 + 2y^2 = 2y^2 \;\Rightarrow \text{Sin solución}$$

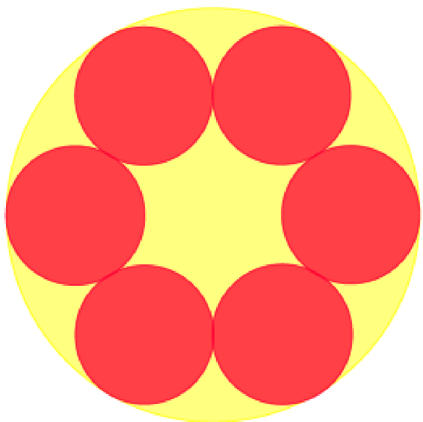
Para el segundo tenemos:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -2 \\ x^2 + y^2 = -2xy \end{cases} \Rightarrow \; x^2 = -2 + y^2 \quad -2 + y^2 + y^2 = -2y\sqrt{-2 + y^2} \;\Rightarrow\; (-1 + y^2)^2$$

$$= y^2(-2 + y^2) \;\Rightarrow\; 1 - 2y^2 + y^4 = y^4 - 2y^2 \;\Rightarrow \text{Sin solución}$$

Por lo tanto, el sistema propuesto no tiene solución.

Marzo 10, 11.- ¿Qué condición debe cumplir el radio de una circunferencia R para que puedan dibujarse dentro de ella seis círculos iguales y de radio 1, tangentes entre ellos y tangentes a la circunferencia dada? ¿Y si se pide dibujar ocho círculos con la misma condición?

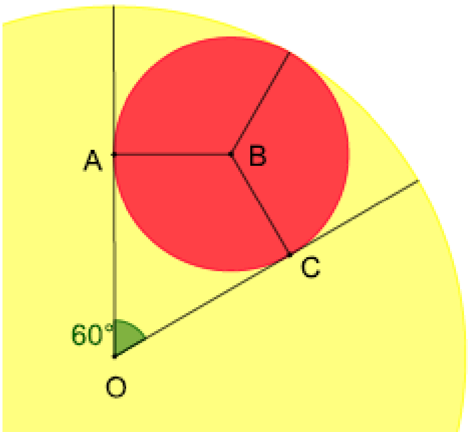


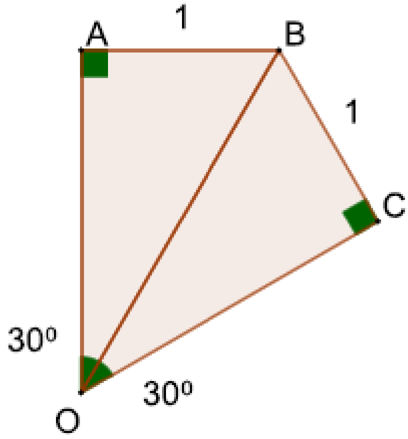
Nivel: Bachillerato. Preparación OME.

Solución: Sea R el radio del círculo en cuyo interior se ajustan los círculos de radio 1. Probaremos:

$$R = 3 \;\Leftrightarrow\; (*) \begin{cases} \text{Se pueden ajustar seis círculos de} \\ \text{radio 1 que sean entre sí tangentes} \\ \text{y tangentes al círculo de radio R.} \end{cases}$$

Si se cumple la condición (*) cada círculo de radio 1 cada se ajusta en una cuña de ángulo central (360°/6 =) 60°

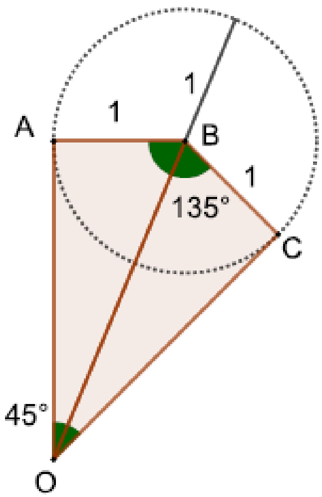


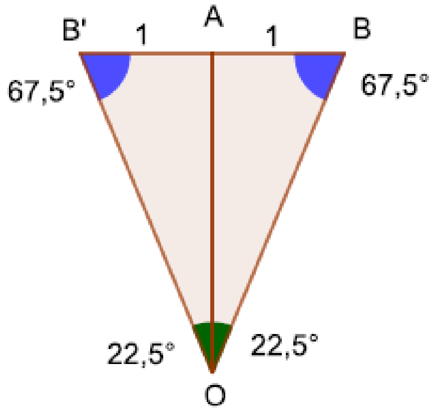


Ahora, los triángulos ΔOAB y ΔOBC son iguales pues AB = BC (= 1), OB es común a los dos y son rectángulos en A y C, Luego necesariamente ∠AOB = ∠BOC = 30°. Por lo tanto, ΔOAB (ΔOBC) es un triángulo 30° - 60° - 90°. Así que OB = 2 y R = 3.

La otra implicación se demuestra siguiendo al revés el razonamiento anterior.

Para el caso de ocho círculos, tenemos que cada circulo de radio 1 ha de estar dentro de un sector circular de ángulo central (360°/8 =) 45°





Por el teorema de los senos:

$$\frac{\mathrm{B'B}}{\mathrm{sen}\ (45°)} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{sen}(67{,}5°)} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{OB} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Puesto que:

$$\mathrm{sen}(67{,}5°) = \sqrt{\frac{1-\cos(135°)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos(45°)}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$

Y por tanto R $=\sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} + 1$

Marzo 12: ¿Qué valores hacen que $y=2x+m^2$ e $y=mx-2m$ se corten en el tercer cuadrante?

Nivel: Bachillerato.

Solución: Exigiremos que las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} y = 2x + m^2 \\ y = mx - 2m \end{cases}$$

cumplan que $x \leq 0$ e $y \leq 0$. Tenemos:

$$2x + m^2 = mx - 2m \;\Rightarrow\; 2x - mx = -m^2 - 2m \;\Rightarrow\; (2 - m)x = -m(m + 2)$$

Si m = 2 las rectas consideradas resultan ser y = 2x + 4 e y = 2x – 4, que son rectas paralelas y por tanto no se cortan. Para m = 2, tenemos

$$x = \frac{m(m+2)}{m-2} \;;\quad y = 2\frac{m(m+2)}{m-2} + m^2 = \frac{m(m^2+4)}{m-2}$$

Si m – 2 > 0 entonces m > 2 > 0 y resulta x > 0. Si m – 2 < 0 puede ser $m \in [0, 2[$, en cuyo caso x e y son negativos (al ser ambos $\frac{+}{-}$). Si m < 0 tenemos que y > 0 (ya que es $\frac{-}{-}$). Luego para $m \in [0, 2[$ las rectas se cortan en el tercer cuadrante

Marzo 13: Se genera el número N escribiendo, uno a continuación de otro, los primeros 2016 números naturales. ¿Cuál es el residuo de dividir N por 288?

Nivel: Preparación de OME.

Solución: Como $288 = 2^5 \cdot 9$, escribiremos N como un número múltiplo de 2^5 y de 9 más otro natural (menor de 288). Por la unicidad de la división tendremos que ese segundo natural será el residuo pedido por el problema.

Para que un número sea múltiplo de 2^5, las últimas cinco cifras ha de ser múltiplo de 2^5 (= 32). Las últimas cinco cifras de N son 52016. Como 52016 = 1625·32 + 16 (= 52000 + 16), tenemos que cualquier número que termine en 52000 es múltiplo de 32. Tendremos:

N = 1234·······20152016 = 1234·······20152000 + 16 = N’ + 16 con N’ múltiplo de 32

Veamos ahora si N’ es múltiplo de 9:

$$\sum = \begin{Bmatrix} \text{suma de los 2015} \\ \text{primeros naturales} \end{Bmatrix} = \frac{1+2015}{2} \cdot 2015 = 2031120$$

$$\sum_{N'} = 2031120 + 2 = 2031122, \text{que no es múltiplo de 9} \;\Rightarrow\; N' \text{ no es múltiplo de 9}$$

Restamos a N’, 32 y pasamos a N’’

N = 1234·······20152016 = 1234·······20151968 + 48 = N’’ + 48 con N’’ múltiplo de 32

$$\sum_{N''} = 2031120 + 24 = 2031144, \text{que no es múltiplo de 9} \;\Rightarrow\; N'' \text{ no es múltiplo de 9}$$

Volvemos a restar a N’’, 32 y pasamos a N’’’

N = 1234·······20152016 = 1234·······20151936 + 80 = N’’’ + 80 con N’’’ múltiplo de 32

$$\sum_{N'''} = 2031120 + 19 = 2031139, \text{que no es múltiplo de } 9 \;\;\Rightarrow\;\; N''' \text{ no es múltiplo de } 9$$

Volvemos a restar a N''', 32 y pasamos a N''''

N = 1234·······20152016 = 1234·······20151904 + 112 = N'''' + 112 con N'''' múltiplo de 32

$$\sum_{N''''} = 2031120 + 14 = 2031134, \text{que no es múltiplo de } 9 \;\;\Rightarrow\;\; N'''' \text{ no es múltiplo de } 9$$

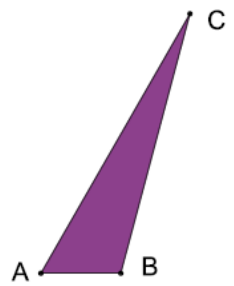
Volvemos a restar a N'''', 32 y pasamos a N^v

N = 1234·······20152016 = 1234·······20151872 + 144 = N^v + 144 con N^v múltiplo de 32

$$\sum_{N^V} = 2031120 + 18 = 2031138, \text{que es múltiplo de } 9 \;\;\Rightarrow\;\; N^V \text{ es múltiplo de } 9$$

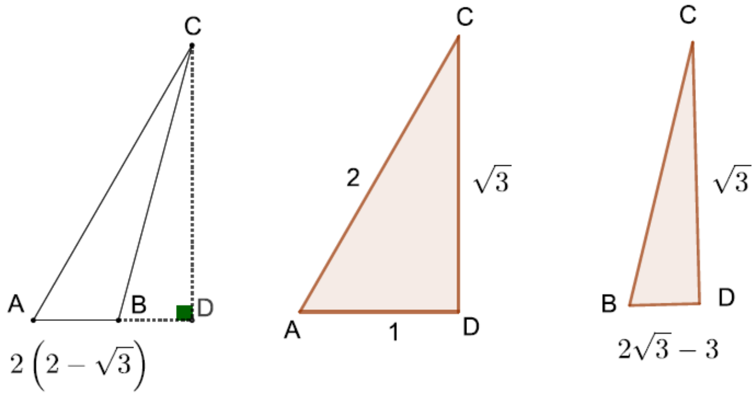
Por lo tanto, el resultado de dividir N por 288 es 144

Marzo 15, 16: En el triángulo de la figura se tiene AC = 2, AB = $2\left(2-\sqrt{3}\right)$. Si su área es $2\sqrt{3}-3$, hallar BC y los ángulos del triángulo



Nivel: 4ESO.

Solución:



Tendremos al calcular el área:

$$A = \begin{cases} = 2\sqrt{3}-3 \\ = \dfrac{AB \cdot CD}{2} \end{cases} \;\;\Rightarrow\;\; 2\sqrt{3}-3 = \left(2-\sqrt{3}\right)\cdot CD \;\;\Rightarrow\;\; CD = \frac{2\sqrt{3}-3}{2-\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Por Pitágoras (en ΔACD) $CD^2 + AD^2 = AC^2$; $3 + AD^2 = 4$ $\Rightarrow$ ΔACD es un triángulo 30°-60°-90° $\Rightarrow$ ∠A = 60°. Ahora en ΔBDC:

$$BC = \sqrt{3 + \left(2\sqrt{3}-3\right)^2} = \sqrt{24 - 12\sqrt{3}} = 2\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$$

Ahora por el teorema de los senos:

$$\frac{2\left(2-\sqrt{3}\right)}{\mathrm{senC}}=\frac{2\sqrt{6-3\sqrt{3}}}{\mathrm{sen}60^\circ}\ \Rightarrow\ \mathrm{senC}=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\mathrm{sen}60^\circ}{\sqrt{6-3\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}}{2}\Rightarrow \mathrm{C}$$

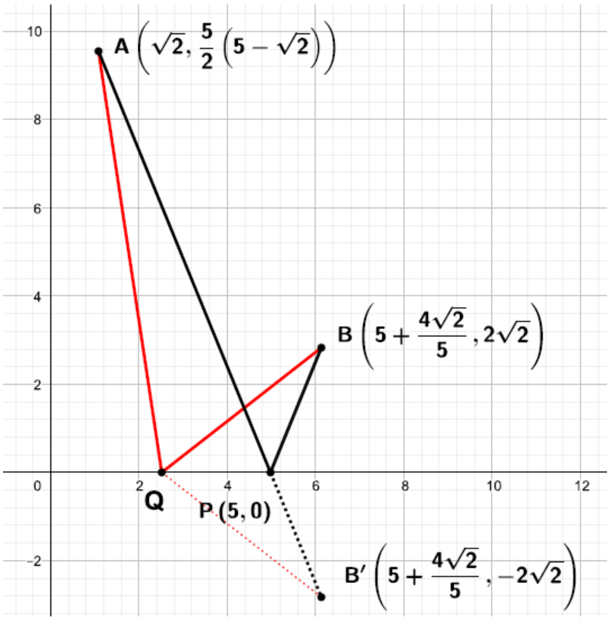
$$=\mathrm{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)=15^\circ$$

Por último: ∠B = 180° - 2(∠A + ∠C) = 180° - (60° + 15°) = 105°

Marzo 17: Consideremos en el plano los puntos A$\left(\sqrt{2},\ \frac{5}{20}\left(5-\sqrt{2}\right)\right)$ y B$\left(5+\frac{4\sqrt{2}}{5},\ 2\sqrt{2}\right)$. Hallar el punto P del eje X tal que es mínima la suma de distancias de P a A y la de P a B

Nivel: Bachillerato.

Solución:



Consideremos $\mathrm{B}'\left(5+\frac{4\sqrt{2}}{5},-2\sqrt{2}\right)$, el simétrico de B respecto al eje X. El punto P buscado es el punto en que se intersectan el segmento AB' y el eje X, pues si Q ≠ P es cualquier otro punto del eje X tenemos al considerar el triángulo ΔAQB' (desigualdad triangular)

$$\begin{aligned}\mathrm{AQ}+\mathrm{QB}=\mathrm{AQ}+\mathrm{QB}'&>\mathrm{AB}'\\&=\mathrm{AP}+\mathrm{PB}'\\&=\mathrm{AP}+\mathrm{PB}\end{aligned}$$

La recta que pasa por A$\left(\sqrt{2},\ \frac{5}{20}\left(5-\sqrt{2}\right)\right)$ y $\mathrm{B}'\left(5+\frac{4\sqrt{2}}{5},-2\sqrt{2}\right)$ es:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},\qquad \frac{y-\frac{5}{2}\left(5-\sqrt{2}\right)}{x-\sqrt{2}}=\frac{-2\sqrt{2}-\frac{5}{2}\left(5-\sqrt{2}\right)}{5+\frac{4\sqrt{2}}{5}-\sqrt{2}},$$

$$\frac{2y-25+5\sqrt{2}}{2x-2\sqrt{2}}=-\frac{5}{2},\ \ y=-\frac{5}{2}x+\frac{25}{2}$$

La intersección de esta recta con el eje X es:

$$\left.\begin{array}{r}y=-\frac{5}{2}x+\frac{25}{2}\\ y=0\end{array}\right\}\ 0=-5x+25,\ \ x=5$$

Luego el punto P buscado es P(5,0) y la mínima suma de distancias es:

$$d(P,A)+d(P,B)=\sqrt{\left(\sqrt{2}-5\right)^2+\frac{25}{4}\left(5-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(5-5-\frac{4\sqrt{2}}{5}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{41}\left(5-\sqrt{2}\right)}{2}+\frac{2\sqrt{58}}{5}=14{,}5264\ \ldots.$$

Marzo 18: Consideremos la ecuación diofántica $28a^2 - 14b^2 = 2016$. Calcular el mcd(a,b)

Nivel: Preparación OME.

Solución 1: (Sin resolver la ecuación) Sea d un divisor de a y de b $\Rightarrow$ $d^2|a^2$, $d^2|b^2$ y por tanto $14d^2|28\cdot a^2$ y $14d^2|14b^2$ $\Rightarrow$ $14d^2|28\cdot a^2 - 14b^2$ y de aquí $14d^2|2016$ ($2016 = 2^5\cdot 3^2\cdot 7$) $\Rightarrow$ $d^2|2^4\cdot 3^2$. Por la unicidad de la descomposición factorial en producto de primos tenemos las siguientes posibilidades:

$$\left.\begin{array}{c} d^2=1 \quad\Rightarrow\quad d=1 \\ d^2=2^2 \quad\Rightarrow\quad d=2 \\ d^2=3^2 \quad\Rightarrow\quad d=3 \\ d^2=2^4 \quad\Rightarrow\quad d=4 \\ d^2=2^4\cdot 3^2 \quad\Rightarrow\quad d=12 \end{array}\right\} \Rightarrow\ \mathrm{mcd}(a,b)=12$$

Solución 2: (Resolviendo la ecuación)

$$28a^2-14b^2=2016;\quad 2^2\cdot 7a^2-2\cdot 7b^2=2^5\cdot 3^2\cdot 7;\quad 2\cdot 7(2a^2-b^2)$$
$$=2^5\cdot 3^2\cdot 7;\quad 2a^2-b^2=2^4\cdot 3^2\ \ (*)$$

Y una solución particular es $a = b = 2^4\cdot 3^2$, pues:

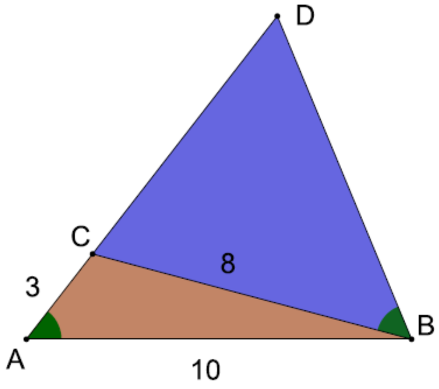
$$2a^2-b^2=2\cdot(2^4\cdot 3^2)^2-(2^4\cdot 3^2)^2=\ 2^4\cdot 3^2$$

Si d = mcd (a, b) entonces 12|d (pues 12 divide a a y a b): Sea d =12Q (**). Como d|a y d|b sea a =Kd y b = Pd entonces:

$$\left.\begin{array}{r} a=K12Q \quad\Rightarrow\quad 2a^2=2K^2 12^2 Q^2 \\ b=P12Q \quad\Rightarrow\quad b^2=P^2 12^2 Q^2 \end{array}\right\} \overset{(*)}{\Rightarrow} 2^4\cdot 3^2=2a^2-b^2=2K^2 12^2 Q^2-P^2 12^2 Q^2$$
$$=12^2Q^2(2K^2-P^2)=12^2\ \Rightarrow\ Q^2(2K^2-P^2)=1\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{c} Q^2=1 \\ 2K^2-P^2=1 \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow \left(\text{de } (**)\right)\ \Rightarrow\ d=12\cdot 1=12$$

Luego mcd (a, b) = 12

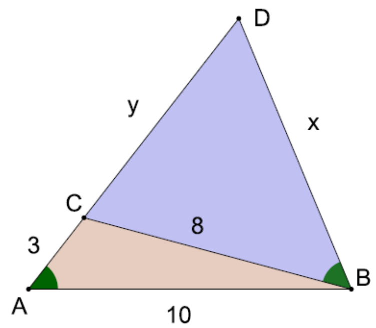
Marzo 19, 26: En la figura se conocen los lados del triángulo △ABC: AB = 10, AC = 3 y CB = 8. Se sabe, además que ∠CBD = ∠CAB. Calcular perímetro y área del triángulo △CBD



Nivel: Preparación OMS.

Solución: Los triángulos ΔDCB y ΔDAB son semejantes ya que tienen el ángulo ∠CDB en común y ∠DCB = {suma de los ángulos del ΔABC =180°} = ∠CAB + ∠ABC = {∠CAB = ∠CBD} = ∠CBD + ∠ABC = ∠ABD. De aquí:

$$\frac{8}{10} = \frac{y}{x} = \frac{x}{y+3}$$



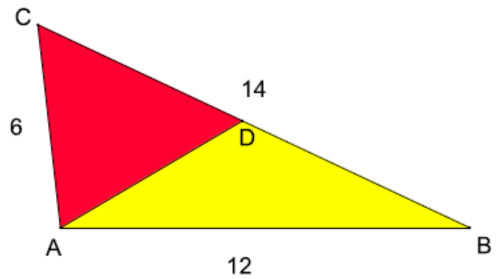
De las dos primeras: 4x = 5y. De la primera y de la última: 4y + 12 = 5x. Resolviendo el sistema que generan tenemos $x = \frac{20}{3}$, $y = \frac{16}{3}$. Por lo tanto, el perímetro del triángulo ΔCBD es:

$$8 + \frac{16}{3} + \frac{20}{3} = 20$$

Y su área es (apelando a la fórmula de Heron):

$$A_{\Delta CBD} = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = \frac{20\sqrt{7}}{3}$$

Marzo 20, 21: Consideremos el triángulo △ABC, con AB = 12, BC = 14 y AC = 6. ¿Qué punto D, del lado CB, hace máximo el producto de áreas de los triángulos △ACD y △ADB?



Nivel: Preparación OMS.

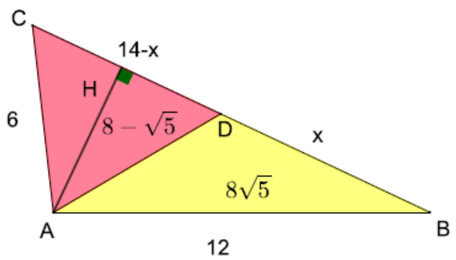
Solución: Utilizamos la fórmula de Heron para calcular el área del triángulo ΔABC:

$$A_{\Delta ABC} = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} = 16\sqrt{5}$$

Sea ahora x =$A_{\Delta ADB}$ e y =$A_{\Delta ACD}$, hemos de maximizar x·y sujeto a que x + y = $16\sqrt{5}$. Esto equivale a maximizar $x\cdot\left(16-\sqrt{5}\right) = f(x) = -x^2 + 16\sqrt{5}x$. Como f(x) es una función polinómica de segundo grado, su representación gráfica es una parábola invertida (pues a = - 1 < 0) y de aquí que su vértice corresponda a un máximo. Tenemos:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-16\sqrt{5}}{-2} = 8\sqrt{5}, \quad y_v = 16\sqrt{5} - x = 8\sqrt{5}$$

El producto de áreas máximo será: $xy = 8\sqrt{5}\cdot 8\sqrt{5} = 320$



Para localizar el punto D, hallamos la distancia de B a D. Tenemos:

$$\Delta ABC \Rightarrow \left\{\begin{matrix} A = 16\sqrt{5} \\ A = \dfrac{14\cdot H}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow H = \frac{16\sqrt{5}}{7}$$

Y para ΔADB

$$\Delta ADB \Rightarrow \left\{\begin{matrix} A = 8\sqrt{5} \\ A = \dfrac{x\cdot H}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 8\sqrt{5} = \frac{8x\sqrt{5}}{7} \Rightarrow x = 7$$

Es decir, el punto D es el punto medio del lado BC.

Marzo 22: ¿Cuántos valores de p hay para los que $3^p - 1$ divide a $3^{2016} - 1$?

Nivel: Preparación OME

Solución: Sabemos que x – 1 divide a $x^k - 1$, pues:

$$\begin{array}{lllll|l}
x^k & & & & -1 & x-1 \\
\cline{6-6}
-x^k & +x^{k-1} & & & & x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+x+1 \\
\hline
 & x^{k-1} & & & -1 & \\
 & -x^{k-1} & +x^{k-2} & & & \\
\hline
 & & x^{k-2} & & -1 & \\
 & & & \cdots\cdots\cdots & & \\
\hline
 & & & x & -1 & \\
 & & & -x & +1 & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Luego $3^p - 1$ divide a $3^{pk} - 1$. Por lo tanto, hay tantos divisores de p que cumplan el enunciado como divisores tenga 2016 (= $2^5\cdot3^2\cdot7$). Los divisores de 2016 son de la forma $2^r\cdot3^s\cdot7^t$ con r ∈ {0, 1, 2, 3, 4, 5}, s ∈ {0, 1, 2} y t ∈ {0, 1}. Por tanto, hay (5 + 1)·(2 + 1)·(1 + 1) = 36 valores posibles de p tales que $3^p - 1$ divide a $3^{2016} - 1$.

Marzo 23: Hallar los puntos de la gráfica de:

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y}=\frac{1}{8}$$

cuyas coordenadas son números enteros

Nivel: Preparación OME.

Solución: El problema propuesto es equivalente a resolver en Z la ecuación:

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y}=\frac{1}{8}$$

Tenemos:

$$\frac{y-x^2}{x^2}=\frac{1}{8},\;\; 8y-8x^2=x^2y,\;\; y=\frac{8x^2}{8-x^2}=\frac{8x^2-64+64}{8-x^2}=-8+\frac{64}{8-x^2}$$

Como $y \in Z$ tenemos que 64 (= 2^6) ha de ser divisible por $8-x^2$. En otras palabras $8-x^2$ ha de ser un divisor de 64. Los posibles valores de $8-x^2$ son $\{\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16, \pm32, \pm64\}$

$$8-x^2=1;\;\; x^2=7;\;\; x\notin\mathbb{Z}$$

$$8-x^2=2;\;\; x^2=6;\;\; x\notin\mathbb{Z}$$

$$8-x^2=4;\;\; x^2=4;\;\; x=\pm2;\;\; y=-8+\frac{64}{4}=8;\;\; \mathbf{(2,8);\;\; (-2,8)\ son\ soluciones}$$

$$8-x^2=8;\;\; x^2=0;\;\; \text{imposible pues x es un denominador}$$

$$8-x^2=16;\;\; x^2<0$$

$$8-x^2=32;\;\; x^2<0$$

$$8-x^2=64;\;\; x^2<0$$

$$8-x^2=-1;\;\; x^2=9;\;\; x=\pm3;\;\; y=-8+\frac{64}{-1}$$

$$=-72;\;\; \mathbf{(3,-72);\;\; (-3,-72)\ son\ soluciones}$$

$$8-x^2=-2;\;\; x^2=10;\;\; x\notin\mathbb{Z}$$

$$8-x^2=-4;\;\; x^2=12;\;\; x\notin\mathbb{Z}$$

$$8-x^2=-8;\;\; x^2=16;\;\; x=\pm4;\;\; y=-8+\frac{64}{-8}$$

$$=-16;\;\; \mathbf{(4,-16);\;\; (-4,-16)\ son\ soluciones}$$

$$8-x^2=-16;\;\; x^2=24;\;\; x\notin\mathbb{Z}$$

$$8-x^2=-32;\;\; x^2=40;\;\; x\notin\mathbb{Z}$$

$$8-x^2=-64;\;\; x^2=72;\;\; x\notin\mathbb{Z}$$

Luego hay seis puntos que están en la gráfica de la función cuyas coordenadas son ambos números enteros.

Marzo 24: ¿Hay algún dígito d de manera que N = 909d sea un número primo?

Nivel: Preparación OMS.

Solución: Desde luego d no puede ser no 0, ni 2, ni 4, ni 6, ni 8, ya que en cualquiera de esos casos N sería divisible por 2. Tampoco puede ser d = 5 ya que, en este caso, N no sería divisible por 5. Tampoco d puede ser múltiplo de 3 (d ≠ 3, d ≠ 9) ya que en estos casos N sería divisible por 3, al ser la suma de sus dígitos 18 + d. Caben entonces dos posibilidades:

1.- d = 7. Entonces N = 9097 y N sería múltiplo de 11 ya que la diferencia entre sus cifras que ocupan lugar par y las que ocupan lugar impar sería (18 – 7 = 11) múltiplo de 11, y por tanto N sería múltiplo de 11.

2.- d = 1. Entonces N = 9091. Para ver que es primo debemos de comprobar que no es divisible por cualquier primo inferior a $\left(\sqrt{9091} <\right) 100$. Los primos inferiores a 100 son (por la criba de Eratóstenes) {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97}. Ahora por división directa o utilizando algún criterio de divisibilidad (para cada primo del conjunto anterior menos los ya probados) tenemos que 9091 es primo

Por ejemplo: ¿9091 es múltiplo de 13?

$$9091 = 9090 + 1 = 909\cdot 10 + 1 = 909\cdot(13 - 3) + 1 = 909\cdot 13 + 1 - 909\cdot 3 = 909\cdot 13 - 2726$$

Por tanto, 2726 es múltiplo de 13 sii 9091 es múltiplo de 13.

$$2726 = 272\cdot 10 + 26 = 272\cdot(13 - 3) + 26 = 271\cdot 13 - 810.$$

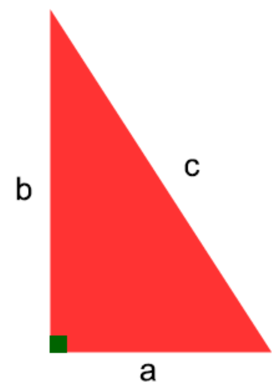
Por tanto, 2726 es múltiplo de 13 sii 810 es múltiplo de 13. Como 810 no es múltiplo de 13 (por división directa), 9091 no es múltiplo de 13.

Marzo 25: De un triángulo rectángulo se sabe que sus lados son naturales y que el cateto menor más la hipotenusa da 32. Calcular su perímetro y área

Nivel: Preparación OMS

Solución: Del enunciado tenemos la figura adjunta y que a +c = 32. Aplicando el teorema de Pitágoras

$$c^2 \left\{ \begin{matrix} = a^2 + b^2 \\ = (32-a)^2 = 32^2 - 64a + a^2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow b^2 = 32 \cdot 2(16-a) = 8^2(16-a) \Rightarrow b = 8 \cdot \sqrt{16-a}$$



Como a < b < c < 32 $\Rightarrow 8\sqrt{16-a} < 32 \Rightarrow \sqrt{16-a} < 4$

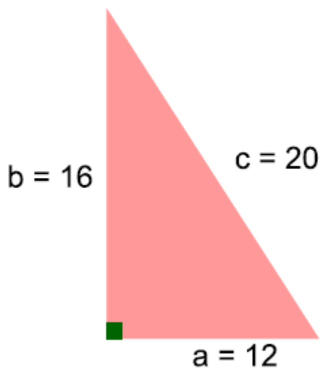
$\Rightarrow$ 16 – a ∈ {1, 2^2, 3^2}

Si 16 – a = 1 ⇒ a = 15, b = 8, c = 32 – 15 = 17. No válida, pues, debe cumplirse a < b < c.

Si 16 – a = 4 ⇒ a = 12, b = 8·2 = 16, c = 32 – 12 = 20. Solución.

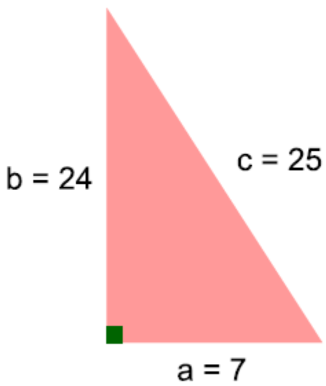
Si 16 – a = 9 ⇒ a = 7, b = 8·3 = 24, c = 32 – 7 = 25. Solución.

Hay dos triángulos que cumplen lo exigido en el enunciado:



$$\text{Perímetro} = 20 + 16 + 12 = 48$$

$$\text{Área} = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96$$



$$\text{Perímetro} = 25 + 24 + 7 = 56$$

$$\text{Área} = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{7 \cdot 24}{2} = 84$$

Marzo 27: Resolver en los naturales el sistema:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x^4 + y^2 - z^2 = 977} \\ \mathbf{x^2 \cdot y = 2025} \end{aligned}\right\}$$

Nivel: Preparación OME.

Solución 1: Tenemos $x^2 \cdot y = 2015 = 3^4 \cdot 5^2$. Por la unicidad de la descomposición factorial en números primos tenemos que sólo son posibles los siguientes casos:

1.- x = 1, y=2025. Sustituyendo en la primera ecuación: $1^4 + 2025^2 - 977 = z^2 = 4099649 \Rightarrow z \notin N$

2.- x = 3, y=225. Sustituyendo en la primera ecuación: $3^4 + 225^2 - 977 = z^2 = 49729 \Rightarrow z = 223$

3.- x = 5, y=81. Sustituyendo en la primera ecuación: $5^4 + 81^2 - 977 = z^2 = 6209 \Rightarrow z \notin N$

4.- x = 15, y=9. Sustituyendo en la primera ecuación: $15^4 + 9^2 - 977 = z^2 = 49729 \Rightarrow z = 223$

5.- x = 45, y=1. Sustituyendo en la primera ecuación: $45^4 + 1^2 - 977 = z^2 = 4099649 \Rightarrow z \notin N$

Luego las soluciones del sistema son: x = 3, y = 225, z = 223 y x = 15, y = 9, z = 223

Solución 2: Tenemos:

$$\begin{aligned}(x^2 + y + z) \cdot (x^2 + y - z) &= (x^2 + y)^2 - z^2 = x^4 + y^2 - z^2 + 2yx^2 = 977 + 2 \cdot 2025 \\ &= 5027 = 11 \cdot 457\end{aligned}$$

Y otra vez por la unicidad de la descomposición factorial en factores primos y dado que $x^2 + y + z \in N$ y ha de ser mayor que $x^2 + y - z$ tenemos las siguientes posibilidades:

1.- $x^2 + y - z = 1$; $x^2 + y + z = 5027$. Sumando ambas ecuaciones y simplificando: $x^2 + y = 2514$.

Tenemos entonces el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y = 2514 \\ x^2 \cdot y = 2015 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(y = \frac{2015}{x^2}\right);\ x^2 + \frac{2025}{x^2} = 2015;\ \Rightarrow\ x^2 \notin \mathrm{N}$$

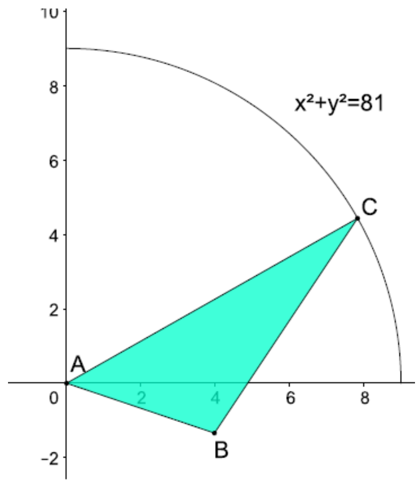
2.- $x^2 + y - z = 11$; $x^2 + y + z = 457$. Sumando ambas ecuaciones y simplificando: $x^2 + y = 234$.

Tenemos entonces el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y = 234 \\ x^2 \cdot y = 2015 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(y = \frac{2015}{x^2}\right);\ x^2 + \frac{2025}{x^2} = 234;\ \Rightarrow \begin{cases} x = 15;\ y = 9 \\ x = 3;\ y = 225 \end{cases}$$

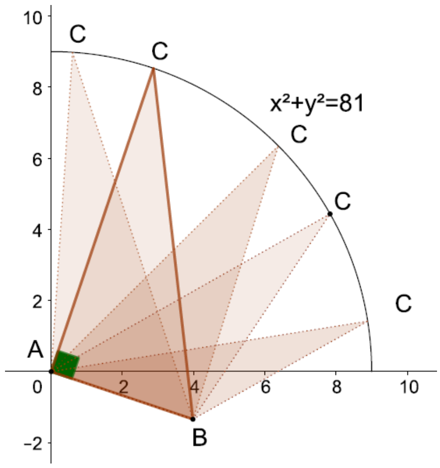
Y por último $z = x^2 + y - 11 = 234 - 11 = 223$

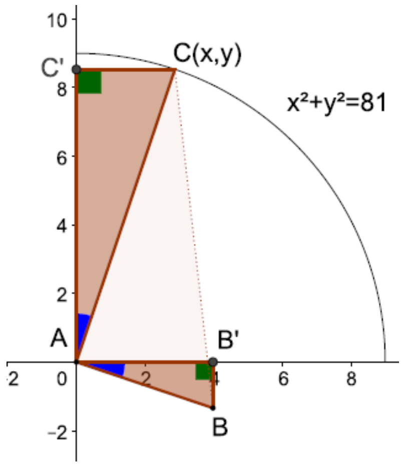
Marzo 28, 29: Consideremos los puntos $A(0,0)$ y $B\left(4, -\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$. Hallar el punto C, del primer cuadrante de $x^2 + y^2 = 81$ tal que es máxima el área del triángulo $\triangle ABC$. Hallar área y perímetro de este triángulo.



Nivel: Preparación OME.

Solución 1: Puesto que todos los triángulos tienen la misma base, el triángulo con mayor área será el que tenga mayor altura, y este es, el triángulo rectángulo en A. Para este triángulo tenemos que los triángulos $\Delta ACC'$ y $\Delta ABB'$ son semejantes por ser rectángulos y tener igual el ángulo de color azul, cumpliéndose:





$$AB = \sqrt{16 + \frac{16}{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}};\ AC = 9;\ \frac{x}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{y}{4} = \frac{9}{\frac{8}{\sqrt{3}}}\ \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x = \frac{9}{2} \\ y = \frac{9\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\}\ C\left(\frac{9}{2};\ \frac{9\sqrt{3}}{2}\right)$$

Y esto nos permite hallar área y perímetro del triángulo solicitado en el enunciado:

$$A = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{\frac{8}{\sqrt{3}} \cdot 9}{2} = 12\sqrt{3}; \ \ P = AB + AC + \sqrt{AB^2 + AC^2} = \frac{8}{\sqrt{3}} + 9 + \sqrt{\frac{64}{3} + 81}$$

$$= \frac{8\sqrt{921}}{3}$$

Solución 2: En vez de localizar C por semejanza de triángulos podemos localizar C como la intersección de la circunferencia con la recta perpendicular al segmento AB que pasa por A. Tendremos:

1.- Pendiente de la recta que pasa por A y B:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{0 + \frac{4}{\sqrt{3}}}{0 - 4} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

2.- Recta perpendicular a la recta que pasa por A y B, que pasa por A:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{1}{m} = \sqrt{3} \ \Rightarrow \ y = \sqrt{3}x$$

3.- Intersección de esta recta con la circunferencia:

$$\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = 81 \\ y = \sqrt{3}x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ x^2 + 3x^2 = 81 \ \Rightarrow \ x = \frac{9}{2} \text{ (la solución negativa se desprecia); } y$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

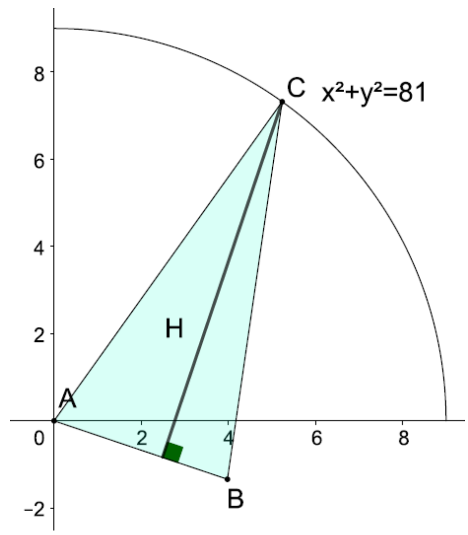
Solución 3: Tendremos

$$A = \frac{AB \cdot H}{2} = \frac{\frac{8}{\sqrt{3}} \cdot H}{2}$$

H es la distancia del punto C(x, y) a la recta que pasa por AB

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}; \ \frac{y - 0}{x - 0}$$

$$= \frac{-\frac{4}{\sqrt{3}} - 0}{4 - 0}; \ y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$$



La distancia de C(x, y) a esta recta es:

$$d = (P(x_0; \ y_0); \ \ Ax + By = C) = \frac{|Ax_0 + By_0 - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$H = \left\{ \begin{matrix} (x; y), \text{ está en el primer cuadrante} \\ \Downarrow \\ \left| y + \frac{x}{\sqrt{3}} \right| = y + \frac{x}{\sqrt{3}} \end{matrix} \right\} = \frac{y + \frac{x}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}y + x}{2}$$

Por lo tanto, hemos de maximizar:

$$A = \frac{\frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}y + x}{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}y + x\right)$$

Sujeto a que $x^2 + y^2 = 81$. Esto equivale a maximizar f(x), donde:

$$f(x) = \left\{y = \sqrt{81 - x^2}\right\} = \sqrt{3}\sqrt{81 - x^2} + x$$

Por derivación:

$$f'(x) = 1 - \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{81 - x^2}} = 0 \;\Rightarrow\; 1 = \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{81 - x^2}} \;\Rightarrow\; \sqrt{81 - x^2} = \sqrt{3}x \;\Rightarrow\; 81 - x^2 = 3x^2$$

$$\Rightarrow \text{(considerando sólo soluciones positivas) } x = \frac{9}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{\sqrt{3}\sqrt{81 - x^2} + \frac{x\sqrt{3}x}{\sqrt{81 - x^2}}}{81 - x^2} = -\frac{81\sqrt{3}}{(81 - x^2)^{\frac{3}{2}}} < 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{9}{2} \text{ aporta máximo}$$

Por tanto $C\left(\frac{9}{2};\ \frac{9\sqrt{3}}{2}\right)$

Marzo 30: Hallar los naturales n que al dividir a 2017 dan resto 17

Nivel: Preparación OMS.

Solución: Tendremos 2017 = nq + 17 (con n > 17) $\Leftrightarrow$ 2000 = nq (con n > 17). Es decir, buscamos los divisores de 2000 mayores que 17. Como $2000 = 2^4 \cdot 5^3$, tendremos:

$$\left\{\begin{array}{l}
2^0 \rightarrow \left\{\begin{array}{ll} 5^0 & \rightarrow 1 \\ 5^1 & \rightarrow 5 \\ 5^2 & \rightarrow 25 \\ 5^3 & \rightarrow 125 \end{array}\right. \\
2^1 \rightarrow \left\{\begin{array}{ll} 5^0 & \rightarrow 2 \\ 5^1 & \rightarrow 10 \\ 5^2 & \rightarrow 50 \\ 5^3 & \rightarrow 205 \end{array}\right. \\
2^2 \rightarrow \left\{\begin{array}{ll} 5^0 & \rightarrow 4 \\ 5^1 & \rightarrow 20 \\ 5^2 & \rightarrow 100 \\ 5^3 & \rightarrow 500 \end{array}\right. \\
2^3 \rightarrow \left\{\begin{array}{ll} 5^0 & \rightarrow 8 \\ 5^1 & \rightarrow 40 \\ 5^2 & \rightarrow 200 \\ 5^3 & \rightarrow 1000 \end{array}\right. \\
2^4 \rightarrow \left\{\begin{array}{ll} 5^0 & \rightarrow 16 \\ 5^1 & \rightarrow 80 \\ 5^2 & \rightarrow 400 \\ 5^3 & \rightarrow 2000 \end{array}\right.
\end{array}\right.$$

Hay ((4 + 1)·(3 + 1) =) 20 divisores, de los cuales (1, 2, 4, 5, 10, 16) son menores o iguales que 17.

Hay, por tanto, (20 – 7 =) 13 números que son las soluciones del problema

Marzo 31: La suma de 13 naturales consecutivos da 1859, ¿cuántos primos hay entre ellos?

Nivel: Preparación OMS.

Solución: Sean x, x + 1, x + 2, ………, x + 12, los naturales consecutivos. Como sabemos que su suma vale 1859, tendremos:

$$1859 = 13\,\mathrm{x} + (1 + 2 + 3 + \cdots + 12) = 13\mathrm{x} + \frac{1+12}{2} \cdot 12 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x} = 137$$

Por tanto, los naturales consecutivos son:

137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149.

Ahora vamos a ver cuáles de ellos son primos, es decir no son divisibles por los primos menores que $\left(\sqrt{149} \approx 12{,}20\right)$ 12, es decir, no divisibles por 2, 3, 5, 7, 11.

138, 140, 142, 144, 146, 148 son divisibles por 2.

141, 147, son divisibles por 3 (pues la suma de sus dígitos es múltiplo de 3)

145 es divisible por 5 (termina en 0 o 5)

147 es divisible por 7 (pues 14·3 + 7 = 49 es múltiplo de 7)

143 es divisible por 11 (pues $\sum_{\text{pares}} - \sum_{\text{impares}} = \widehat{\dot{11}}$)

Nos quedan: 137, 139 y 149, que son los primos preguntados por el enunciado