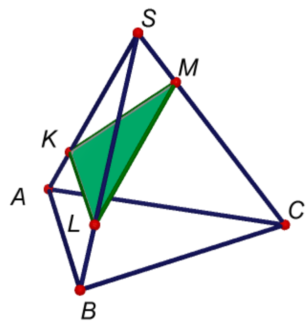
SOLUCIONES ABRIL 2016

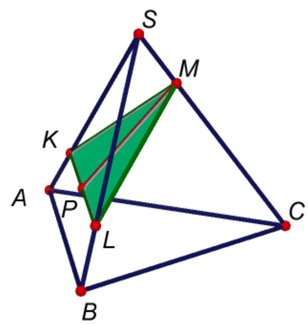
Autor: Ricard Peiró i Estruch

Abril 1



Sea el tetraedro regular ABCS.
Sean K, L, M de las aristas $\overline{AS}$, $\overline{BS}$, $\overline{CS}$, respectivamente, tal que,
$\overline{AK} = \overline{BL} = \overline{SM} = \frac{1}{4}a$.
Determinar el área del triángulo $\overset{\Delta}{KLM}$.

Solución:



Los triángulos equiláteros $\overset{\Delta}{ABS}$, $\overset{\Delta}{KLS}$ son semejantes.
Aplicando el teorema de Tales:
$\overline{KL} = \frac{3}{4}a$.

Aplicando el teorema del coseno al triangulo $\overset{\Delta}{LMS}$:

$$\overline{LM}^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{9}{16}a^2 - 2\frac{1}{4}a\frac{3}{4}a \cdot \cos 60^{\circ} .$$

$$\overline{LM}^2 = \frac{7}{16}a^2 .$$

$$\overline{LM} = \overline{KM} = \frac{\sqrt{7}}{4}a .$$

Sea P el punto medio del segmento $\overline{KL}$.

$$\overline{PL} = \frac{1}{2}\overline{KL} = \frac{3}{8}a .$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triangulo rectángulo $\overset{\Delta}{PLM}$:

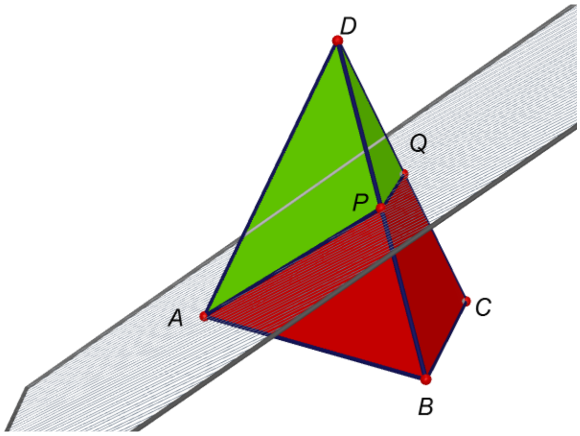
$$\overline{PM} = \frac{\sqrt{19}}{8}a .$$

El área del triángulo $\overset{\Delta}{KLM}$ es:

$$S_{KLM} = \frac{1}{2}\overline{KL} \cdot \overline{PM} = \frac{1}{2}\frac{3}{4}a\frac{\sqrt{19}}{8}a = \frac{3\sqrt{19}}{64}a^2 .$$

Abril 2, 9:

Sea el tetraedro ABCD. Sean P i Q eso puntos medios de les aristas $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, respectivamente. La sección que pasa por los puntos A, P, Q divide el tetraedro en dos partes.
Determinar la proporción entre los volúmenes de las dos partes.



Solución:

$\overline{PQ}$ es la paralela mediana del triángulo $\overset{\Delta}{BCD}$.
El plano que pasa por los puntos A, P, Q divide el tetraedro ABCD en dos pirámides, PQDA y BCQPA de bases $\overset{\Delta}{PQD}$, BCQP, respectivamente.
Las dos pirámides tienen la misma altura h sobre las bases anteriores.
Los triángulos $\overset{\Delta}{BCD}$, $\overset{\Delta}{PQD}$ son semejantes y de razón 2:1.
Aplicando el teorema de Tales:

$$S_{PQD} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 S_{BCD} = \frac{1}{4} S_{BCD}.$$

$$S_{BCQP} = S_{BCD} - S_{PQD} = \frac{3}{4} S_{BCD}.$$

El volumen de la pirámide PQDA es:

$$V_{PQDA} = \frac{1}{3} S_{PQD} \cdot h = \frac{1}{3}\frac{1}{4} S_{BCD} \cdot h..$$

El volumen de la pirámide BCQPA es:

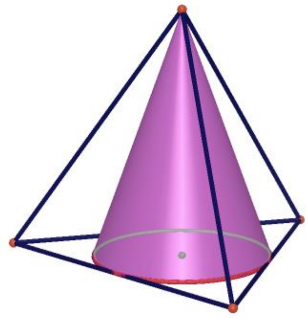
$$V_{BCQPA} = \frac{1}{3} S_{BCQD} \cdot h = \frac{1}{3}\frac{3}{4} S_{BCD} \cdot h.$$

La proporción entre los dos volúmenes es:

$$\frac{V_{PQDA}}{V_{BCQPA}} = \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{4} S_{BCD} \cdot h}{\frac{1}{3}\frac{3}{4} S_{BCD} \cdot h} = \frac{1}{3}.$$

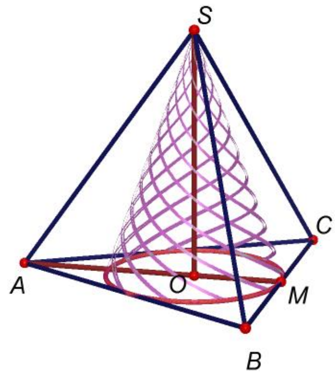
Abril 3

Sea un cono inscrito en un tetraedro regular.
Calcular la proporción entre el volumen del cono y del tetraedro.



Solución:

Sea el tetraedro regular ABCS de arista $\overline{AB} = a$.
Sea O el baricentro de la base.
O es el centro de la base del cono inscrito.
Sea M el punto medio del lado $\overline{BC}$.



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABM}$:

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Aplicando la propiedad del baricentro:

$\overline{OM} = \frac{1}{3}\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, radio de la base del cono.

El área del triángulo equilátero $\overset{\Delta}{ABC}$ es:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

El volumen del tetraedro es:

$$V_T = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot \overline{OS}.$$

El volumen del cono es:

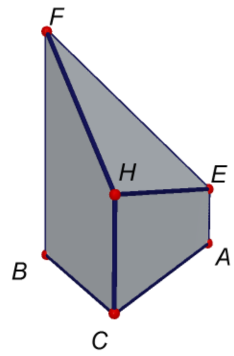
$$V_C = \frac{1}{3}\pi\overline{OM}^2 \cdot \overline{OS}.$$

La proporción entre los volúmenes es:

$$\frac{V_C}{V_T} = \frac{\frac{1}{3}\pi\overline{OM}^2 \cdot \overline{OS}}{\frac{1}{3}S_{ABC} \cdot \overline{OS}} = \frac{\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0.6046 .$$

Abril 4, 5:

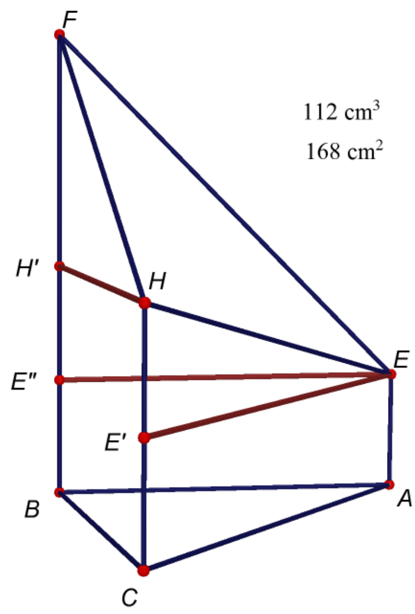
Sea el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{AC} = 10$.
Perpendicularmente al plano que determina el triángulo se levantan $\overline{AE} = 2$, $\overline{BF} = 8$, $\overline{CH} = 4$. Determinar el área y el volumen del sólido ABCEFH.



Solución:

El triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es rectángulo en B ya que $10^2 = 6^2 + 8^2$.
El sólido es un prisma triangular recto truncado.
El volumen es:

$$V_{ABCEFH} = S_{ABC} \frac{\overline{AE} + \overline{BF} + \overline{CH}}{3} = \frac{1}{2}(6 \cdot 8) \cdot \frac{2 + 8 + 4}{3} = 112 .$$



Sea E' la proyección de E sobre la arista $\overline{CH}$.
$\overline{E'H} = 2$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{EE'H}$:
$\overline{EH} = 2\sqrt{26}$.

Sea E'' la proyección de E sobre la arista $\overline{BF}$.
$\overline{E''F} = 6$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{EE''F}$:
$\overline{EF} = 6\sqrt{2}$.

Sea H' la proyección de H sobre la arista $\overline{BF}$.
$\overline{H'F} = 4$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{HH'F}$:
$\overline{FH} = 4\sqrt{5}$.

Sea $\alpha = \angle EFH$. Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{EFH}$:

$$\left(2\sqrt{26}\right)^2 = \left(4\sqrt{5}\right)^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot 4\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{2} \cos\alpha .$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} . \ \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} .$$

El área del triángulo $\overset{\Delta}{EFH}$ es:

$$S_{EFH} = \frac{1}{2}\overline{EF} \cdot \overline{FH} \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} 6\sqrt{2} 4\sqrt{5} \frac{3}{\sqrt{10}} = 36 .$$

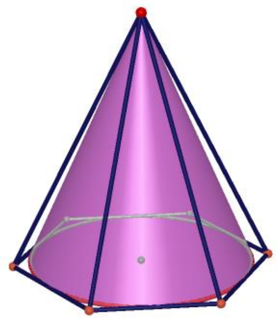
El área del sólido ABCEFH es:

$$S_{ABCEFH} = S_{ABC} + S_{BCHF} + S_{CAEH} + S_{BAEF} + S_{EFH} .$$

$$S_{ABCEFH} = \frac{1}{2}(6 \cdot 8) + \frac{8+4}{2} 8 + \frac{2+4}{2} 10 + \frac{8+2}{2} 6 + 36 = 168 .$$

Abril 6

Determinar la proporción entre los volúmenes de un cono inscrito en una pirámide regular hexagonal.



Solución:

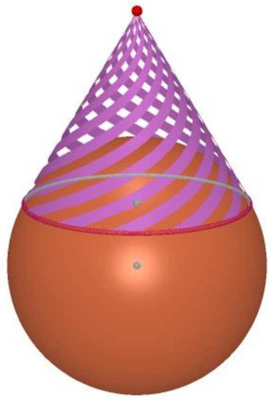
La proporción entre los volúmenes de un cono y una pirámide que tienen la misma altura son proporcionales a las bases.
Sea a la arista de la base de la pirámide.
La apotema del polígono es igual al radio del círculo inscrito.
La apotema del hexágono es $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.
La proporción entre los volúmenes es:

$$\frac{V_{con}}{V_{piràmide}} = \frac{S_{cercle}}{S_{hexàgon}} = \frac{\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}{6\frac{\sqrt{3}}{4}a^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.9069 \ .$$

Abril 7, 8:

Una esfera es tangente a la base de un cono equilátero de radio r (el diámetro de la base es igual a la generatriz).

Determinar el volumen de la parte del cono que está fuera de la esfera.



Solución:

Sea $\overline{AB} = 2r$ diámetro del cono.

$\overline{SA} = \overline{SB} = 2r$.

Sea M el punto medio del segmento $\overline{AB}$ centro de la base del cono.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triangulo rectángulo $\overset{\Delta}{AMS}$:

$\angle ASM = 30^{o}$.

$\overline{MS} = r\sqrt{3}$.

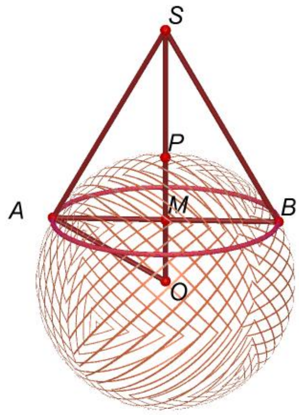
Sea O el centro de la esfera tangente a la generatriz en el punto A.

Sea $\overline{OA} = R$ el radio.

Sea $\overline{OM} = x$.

$\angle MAO = 30^{o}$.

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} r \\ R = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} r \end{cases} .$$



El segmento $\overline{OS}$ corta la esfera en el punto P.

El volumen de la parte del cono que está fuera de la esfera es igual al volumen del cono menos el volumen del casquete esférico de radio R y altura $h = \overline{MP}$.

$$h = \overline{MP} = \overline{OP} - \overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{3} r .$$

El volumen del cono es:

$$V_{con} = \frac{1}{3}\pi r^{2} \cdot r\sqrt{3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} r^{3} .$$

El volumen del casquete es:

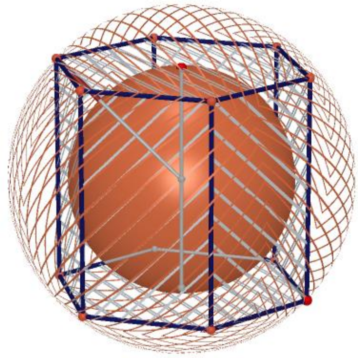
$$V_{casquet} = \pi h^{2}\left(R - \frac{h}{3}\right) = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3} r\right)^{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} r - \frac{\sqrt{3}}{9} r\right) = \frac{\pi 5\sqrt{3}}{27} r^{3} .$$

El volumen de la parte del cono que está fuera de la esfera es:

$$V = V_{con} - V_{casquet} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} r^{3} - \frac{\pi 5\sqrt{3}}{27} r^{3} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{27} r^{3} .$$

Abril 10, 11:

Un prisma hexagonal regular está inscrito en una esfera de radio R.
Calcular su área sabiendo que el prisma está circunscrito a una esfera.

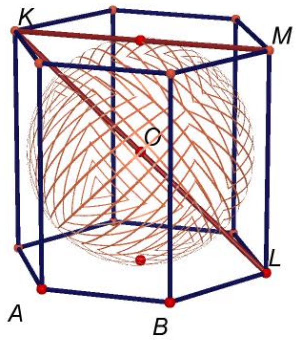


Solución:

Sea r el radio de la esfera inscrita en el prisma.
La altura del prisma es 2r.
La apotema del hexágono base es igual al radio de la circunferencia inscrita.
La arista de la base del prisma es:

$$a = \frac{2\sqrt{3}}{3} r .$$

$$\overline{PQ} = 2R ,\ \overline{KM} = 2\overline{AB} = \frac{4\sqrt{3}}{3} r ,\ \overline{LM} = 2r .$$



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{KLM}$:

$$(2R)^2 = (2r)^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} r\right)^2 .$$

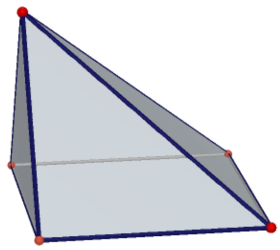
$$r^2 = \frac{3}{7} R^2 .$$

El área del prisma es:

$$S = 2\left(6\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} r\right)^2\right) + 6 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} r \cdot 2r = 12\sqrt{3}\, r^2 = \frac{36\sqrt{3}}{7} R^2 .$$

Abril 12

La base de una pirámide es un cuadrado de lado a y una cara lateral es perpendicular a la base y es un triángulo equilátero.
Determinar el área y el volumen de la pirámide.



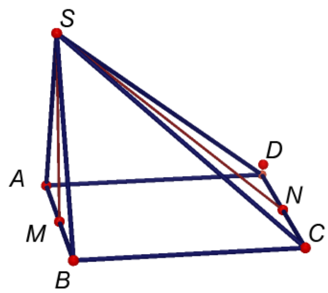
Solución:

Sea la pirámide ABCDS de base el cuadrado ABCD de lado $\overline{AB} = a$.

Sea $\overset{\Delta}{ABS}$ la cara que es un triángulo equilátero y perpendicular a la base.

$\overline{AS} = \overline{BS} = a$.

$\angle SBC = \angle SAD = 90º$.



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles $\overset{\Delta}{SBC}$:

$\overline{SC} = \overline{SD} = a\sqrt{2}$.

Sea M el punto medio de la arista $\overline{AB}$.

$\overline{MS}$ es la altura de la pirámide.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AMS}$:

$$\overline{MS} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

El volumen de la pirámide es:

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot \overline{MS} = \frac{1}{3}a^2\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a^3.$$

El área del triángulo equilátero $\overset{\Delta}{ABS}$ es:

$$S_{ABS} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

El área del triángulo rectángulo isósceles $\overset{\Delta}{BCS}$ es:

$$S_{BCS} = \frac{1}{2}a^2.$$

Sea N el punto medio de la arista $\overline{CD}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{CNS}$.

$$\overline{NS} = \frac{\sqrt{7}}{2}a.$$

El área del triángulo isósceles $\overset{\Delta}{CDS}$ es:

$$S_{CDS} = \frac{1}{2}a\frac{\sqrt{7}}{2}a = \frac{\sqrt{7}}{4}a^2.$$

El área total de la pirámide es:

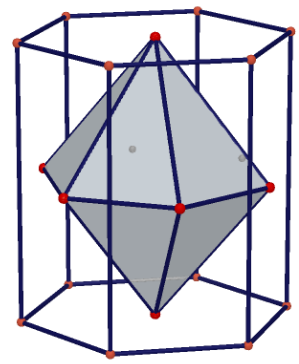
$$S_{total} = S_{ABCD} + 2 \cdot S_{BCS} + S_{ABS} + S_{CDS} = a^2 + 2\frac{1}{2}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{7}}{4}a^2 =$$

$$= \left(2 + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{4}\right)a^2.$$

Abril 13, 20:

Sea el prisma regular hexagonal.

Determinar la proporción entre el volumen del poliedro dual del prisma (aquel que tiene por vértices los puntos medios de las caras) i el volumen del prisma.



Solución:

Sea el prisma regular hexagonal ABCDEFA’B’C’D’E’F’ de arista de la base a y altura h.

El poliedro SIJKLMNS’ dual es una dipirámide.

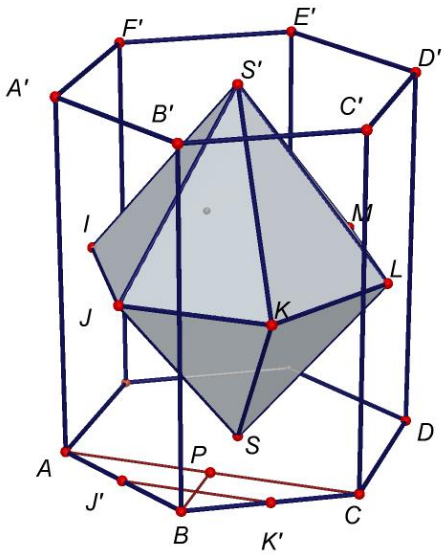
Sea J’ la proyección de J sobre la arista $\overline{AB}$.

Sea K’ la proyección de K sobre la arista $\overline{BC}$.

Sea P el punto medio del segmento $\overline{AC}$.

$\overline{JK} = \overline{J'K'} = \overline{AP}$.

$\angle CAB = 30^o$.



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{APB}$:

$$\overline{AP} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

La altura de cada una de les pirámides es $\frac{h}{2}$ y la arista de la base

$$\overline{JK} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

El volumen de la dipirámide es:

$$V_{diPiramide} = 2\left(\frac{1}{3}6\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 \cdot \frac{h}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^2h.$$

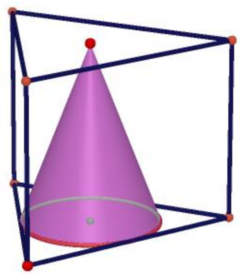
El volumen del prisma es:

$$V_{prisma} = 6\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot h.$$

La proporción de los volúmenes es:

$$\frac{V_{diPiramide}}{V_{prisma}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{8}a^2h}{6\frac{\sqrt{3}}{4}a^2h} = \frac{1}{4}.$$

Abril 14



En un prisma triangular regular hay inscrito un cono de radio r y el ángulo de la generatriz y la base es α .
Calcular el volumen del prisma.

Solución:

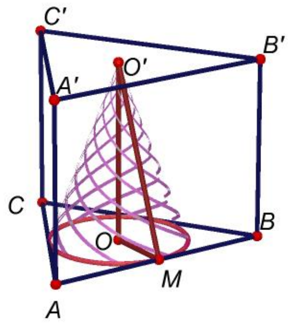
Sea el prisma ABCA’B’C’.

Sea M el punto medio de la arista $\overline{AB}$.

Sea O el baricentro del triángulo equilátero $\overset{\Delta}{ABC}$.

El área del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es:

$$S_b = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 .$$



Sea O’ el baricentro del triángulo equilátero $A'\overset{\Delta}{B'}C'$

$\overline{OM} = r$.

Sea el cono de radio r de generatriz $\overline{MO'}$, $\angle O'MO = \alpha$ ángulo que forma la generatriz y la base del cono.

Sea $\overline{AB} = a$ arista de la base, $\overline{OO'} = h$ altura del cono.

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $O'\overset{\Delta}{M}O$:

$h = r \cdot tg\alpha$.

$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $\overline{CM} = 3r$.

$a = 2r\sqrt{3}$.

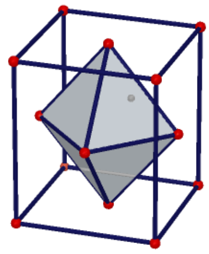
El volumen del prisma es:

$$V_{prisma} = S_b \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot r \cdot tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2r\sqrt{3}\right)^2 r \cdot tg\alpha = 3\sqrt{3} \cdot tg\alpha \cdot r^3$$

Abril 15, 16:

Sea el prisma regular cuadrangular.

Determinar la proporción entre el volumen del poliedro dual del prisma (aquel que tiene por vértices los puntos medios de les caras) y el volumen del prisma.



Solución:

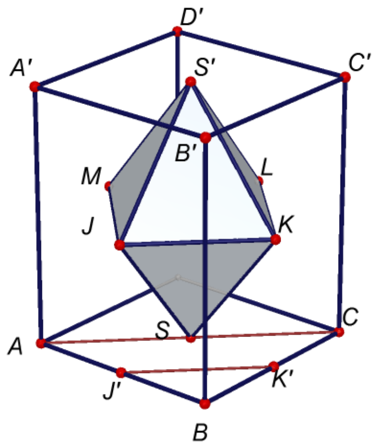
Sea el prisma regular cuadrangular ABCDA’B’C’D’ de arista de la base a y altura h.

El poliedro SJKLMS’ dual es una dipirámide.

Sea J’ la proyección de J sobre la arista $\overline{AB}$.

Sea K’ la proyección de K sobre la arista $\overline{BC}$.

$\overline{JK} = \overline{J'K'} = \frac{1}{2}\overline{AC}$.



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC} = a\sqrt{2}$.

La altura de cada una de les pirámides es $\frac{h}{2}$ y la arista de la base

$\overline{JK} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

El volumen de la dipirámide es:

$$V_{diPiramide} = 2\left(\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 \cdot \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{6}a^2h.$$

El volumen del prisma es:

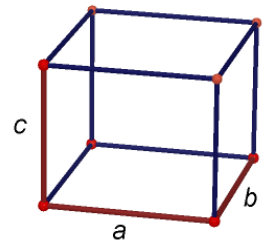
$$V_{prisma} = a^2 \cdot h.$$

La proporción de los volúmenes es:

$$\frac{V_{diPiramide}}{V_{prisma}} = \frac{\frac{1}{6}a^2h}{a^2h} = \frac{1}{6}.$$

Abril 17

El volumen de un ortoedro es $8cm^3$ y su superficie es $32cm^2$.
Si las aristas están en progresión geométrica determinar la medida de la suma de todas las aristas del ortoedro.

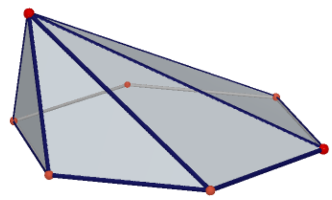


Solución:

Sean a, b, c las medidas de les aristas del cubo.
La suma de les 12 aristas es $L = 4(a + b + c)$.
Si las aristas están en progresión geométrica:
$ac = b^2$.
El volumen del ortoedro es:
$abc = 8$.
$b^3 = 8$. Resolviendo la ecuación:
$b = 2cm$
El área del ortoedro es:
$2(ab + bc + ac) = 32$.
$2a + 2c + b^2 = 16$.
$2(a + c) = 12$
$a + c = 6$.
$a + b + c = 6 + 2 = 8$.
La medida de la suma de todas les aristas es:
$L = 4(a + b + c) = 4 \cdot 8 = 32cm$

Abril 18, 19:

La base de una pirámide es un hexágono regular de lado a y una cara lateral es perpendicular a la base y es un triángulo equilátero. Determinar el área y el volumen de la pirámide.



Solución:

Sea la pirámide ABCDEFS de base el hexágono regular ABCDEF de lado $\overline{AB} = a$.

Sea $\overset{\Delta}{ABS}$ la cara que es un triángulo equilátero y perpendicular a la base.

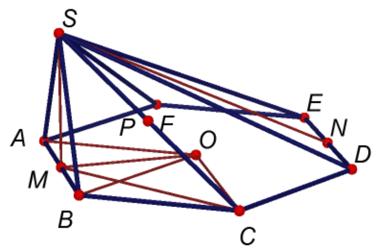
$\overline{AS} = \overline{BS} = a$.

$\angle SBD = \angle SAE = 90^{o}$.

Sea M el punto medio de la arista $\overline{AB}$.

$\angle SMC = \angle SMF = 90^{o}$

$\overline{MS}$ es la altura de la pirámide.



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AMS}$:

$$\overline{MS} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Sea O el centro del hexágono ABCDEF.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AMO}$:

$$\overline{MO} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

$$\overline{BD} = 2 \cdot \overline{MO} = a\sqrt{3}.$$

El volumen de la pirámide es:

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCDEF} \cdot \overline{MS} = \frac{1}{3}6 \cdot S_{ABO} \cdot \overline{MS} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{3}{4}a^3.$$

El área del triángulo equilátero $\overset{\Delta}{ABS}$ es:

$$S_{ABS} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles $\overset{\Delta}{SBD}$:

$\overline{SD} = \overline{SE} = 2a$.

Sea N el punto medio de la arista $\overline{CD}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{DNS}$.

$$\overline{NS} = \frac{\sqrt{15}}{2}a.$$

El área del triángulo isósceles $\overset{\Delta}{DES}$ es:

$$S_{DES} = \frac{1}{2}a\frac{\sqrt{15}}{2}a = \frac{\sqrt{15}}{4}a^2.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{MOC}$:

$$\overline{MC} = \frac{\sqrt{7}}{2}a.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{SMC}$:

$\overline{SC} = \frac{\sqrt{10}}{2}a$.

Sea P el punto medio del segmento $\overline{SC}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BPC}$:

$\overline{BP} = \frac{\sqrt{6}}{4}a$.

El área del triángulo $\overset{\Delta}{BCS}$ es:

$$S_{BCS} = \frac{1}{2}\overline{CS}\cdot\overline{BP} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{10}}{2}a\frac{\sqrt{6}}{4}a = \frac{\sqrt{15}}{8}a^2.$$

Sea $\alpha = \angle SCD$. Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{CDS}$:

$$(2a)^2 = a^2 + \left(\frac{\sqrt{10}}{2}a\right)^2 - 2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}\cos\alpha .$$

$$\cos\alpha = \frac{-\sqrt{10}}{20}.$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{390}}{20}.$$

El área del triángulo $\overset{\Delta}{CDS}$ es:

$$S_{CDS} = \frac{1}{2}\overline{CD}\cdot\overline{CS}\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}a\frac{\sqrt{10}}{2}a\frac{\sqrt{390}}{20} = \frac{\sqrt{39}}{8}a^2.$$

El área total de la pirámide es:

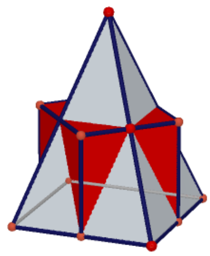
$$S_{total} = S_{ABCDEF} + 2\cdot S_{BCS} + S_{ABS} + 2\cdot S_{CDS} + S_{DES} =$$
$$= \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2\frac{\sqrt{15}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4} + 2\frac{\sqrt{39}}{8} + \frac{\sqrt{17}}{4}\right)a^2 = \left(\frac{7\sqrt{3} + 2\sqrt{15} + \sqrt{39}}{4}\right)a^2.$$

Abril 21, 22:

Sean dados un cubo y una pirámide cuadrangular regular, con arista lateral b.

Los vértices de una de las bases del cubo son los puntos medios de las aristas de la base de la pirámide, mientras que cada una de la cara opuesta del cubo corta una de las aristas laterales de la pirámide.

Determinar el volumen de la parte del cubo situada fuera de la pirámide.



Solución:

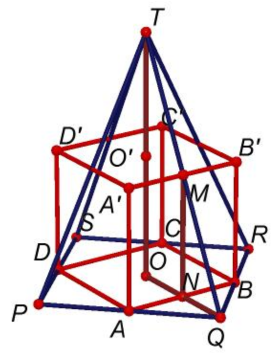
Sea PQRST la pirámide cuadrangular regular de base el cuadrado ABCD y de arista lateral $\overline{PT} = b$

Sea el cubo ABCDA’B’C’D’ de arista $\overline{AB} = x$.

Sea O el centro del cuadrado ABCD.

$\overline{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2}x$, $\overline{OQ} = x$.

$\overline{PQ} = x\sqrt{2}$.



Sea M el punto medio de la arista $\overline{A'B'}$.

Sea N el punto medio de la arista $\overline{AB}$.

$\overline{MN} = x$, $\overline{NQ} = \frac{1}{2}x$.

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{TOQ}$, $\overset{\Delta}{MNQ}$ son semejantes y de razón 2:1.

Aplicando el teorema de Tales:

$\overline{OT} = 2\overline{MN} = 2x$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{TOQ}$:

$b^2 = x^2 + (2x)^2$.

Resolviendo la ecuación:

$$x = \frac{\sqrt{5}}{5}x.$$

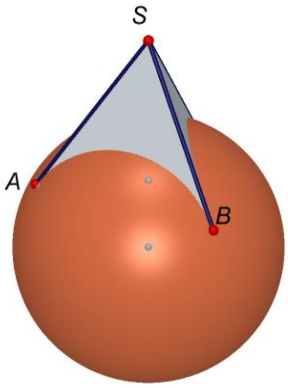
El volumen de la parte del cubo situada fuera de la pirámide es igual al volumen de cuatro pirámides triangulares de base el triángulo rectángulo de cateto $\overline{A'M} = \frac{1}{2}x$ y altura $\overline{A'A} = x$.

$$V = 4\left(\frac{1}{3}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\right)^2 x\right) = \frac{1}{6}x^3.$$

$$V = \frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}b\right)^3 = \frac{\sqrt{5}}{150}b^3.$$

Abril 23, 30

Calcular el volumen de la esfera tangente a las aristas $\overline{SA}, \overline{SB}, \overline{SC}$ del tetraedro regular SABC en los vértices A, B, C respectivamente, siendo el área del tetraedro $3\sqrt{3}\ u^2$.



Solución:

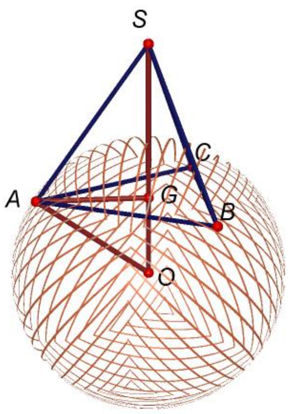
Sea $\overline{AB} = a$ arista del tetraedro.
La superficie del tetraedro es:

$4\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 3\sqrt{3}$. Resolviendo la ecuación:

$a = \sqrt{3}$.

Sea G el baricentro del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.
Aplicando la propiedad del baricentro:

$\overline{AG} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a = 1.$



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AGS}$:

$\overline{GS} = \sqrt{2}$.

Sea O el centro de la esfera.

O pertenece a la recta perpendicular a la base $\overset{\Delta}{ABC}$ que pasa por el baricentro.

Sea $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = r$ radio de la esfera.

Per ser la esfera tangente a la arista $\overline{SA}$ en el vértice A, $\overline{OA}$ es perpendicular a $\overline{SA}$.

Sea $\overline{OG} = x$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OAS}$:

$\left(\sqrt{3}\right)^2 + r^2 = \left(\sqrt{2} + x\right)^2$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OGA}$:

$r^2 = 1^2 + x^2$.

Consideremos el sistema $\begin{cases} \left(\sqrt{3}\right)^2 + r^2 = \left(\sqrt{2} + x\right)^2 \\ r^2 + 1^2 + x^2 \end{cases}$. Resolviendo el sistema:

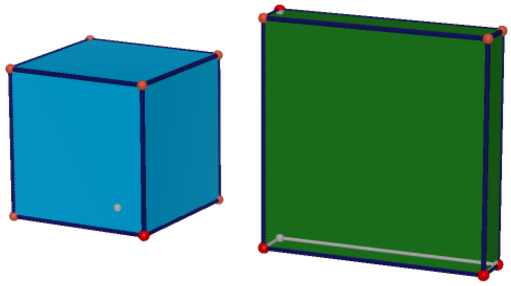
$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ r = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}.$$

El volumen de la esfera es:

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \pi\sqrt{6}\ u^3.$$

Abril 24, 25:

Un cubo y un ortoedro tienen igual las áreas.
Las dimensiones del ortoedro tienen proporción 1:6:6, y volumen 562.5dm^3.
Calcular el volumen del cubo.

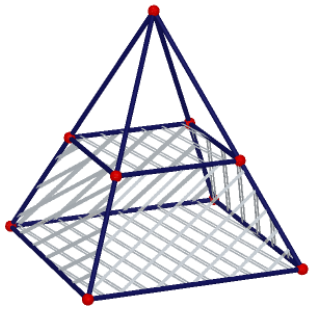


Solución:

Sean $x, 6x, 6x$ las dimensiones de las aristas del ortoedro.
El volumen del ortoedro es:
$V_o = x \cdot 6x \cdot 6x = 562.5$. Resolviendo la ecuación:
$x = 2.5$.
El área de ortoedro es:
$S_o = 2(6x^2 + 6x^2 + 36x^2) = 2(48x^2) = 600$.
Sea a la arista del cubo.
El cubo tiene la misma área que el ortoedro:
$S_c = 6a^2 = 600$. Resolviendo la ecuación:
$a = 10\text{dm}$.
El volumen del cubo es:
$V_c = a^3 = 10^3 = 1000\,\text{dm}^3 = 1\text{m}^3$.

Abril 26, 27:

En una pirámide regular cuadrangular el área de la sección paralela a la base es tres veces menor que el área de la base. Determinar la razón entre los volúmenes de los dos cuerpos en que queda dividida la pirámide por la sección.



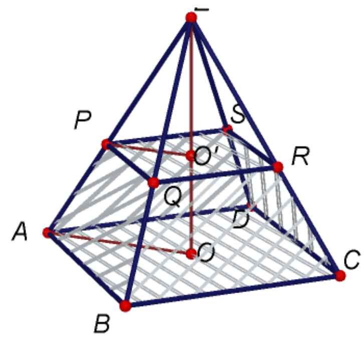
Solución:

Sea la pirámide regular cuadrangular ABCDE de base el cuadrado ABCD.

Sea la sección PQRS paralela a la base.

Sea O el centro del cuadrado ABCD.

Sea O’ el centro del cuadrado PQRS.



$\frac{S_{PQRS}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{3}$. Entonces la proporción entre los lados del cuadrado es:

$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{PO'E}$, $\overset{\Delta}{AOE}$ son semejantes y la razón s $\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, entonces:

$\frac{\overline{O'E}}{\overline{OE}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Calculemos la proporción entre los volúmenes de las pirámides PQRSE y ABCDE:

$$\frac{V_{PQRSE}}{V_{ABCDE}} = \frac{\frac{1}{3}S_{PQRS}\cdot\overline{O'E}}{\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot\overline{OE}} = \frac{\sqrt{3}}{9} \qquad (1)$$

Calculemos la proporción entre los volúmenes del tronco de pirámide ABCDPQRS y la pirámide ABCDE:

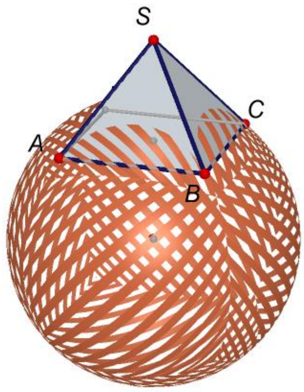
$$\frac{V_{ABCDPQRS}}{V_{ABCDE}} = \frac{V_{ABCDE} - V_{PQRSE}}{V_{ABCDE}} = 1 - \frac{V_{PQRSE}}{V_{ABCDE}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{9} \qquad (2)$$

Dividiendo las expresiones (1) (2) la proporción entre los volúmenes de la pirámide PQRSE y el tronco de pirámide ABCDPQRS es:

$$\frac{V_{PQRSE}}{V_{ABCDPQRS}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{9}}{\frac{9-\sqrt{3}}{9}} = \frac{1+3\sqrt{3}}{26}.$$

Abril 28, 29

Sea la pirámide regular ABCDS de base el cuadrado ABCD que tiene todas las aristas iguales a $\overline{AB} = a$.
Calcular la superficie de la esfera tangente a les aristas $\overline{SA}, \overline{SB}, \overline{SC}, \overline{SD}$ en los vértices A, B, C, D respectivamente.



Solución:
Aplicando el teorema de Pitágoras al triangulo rectángulo isósceles $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC} = a\sqrt{2}$.
Aplicando el teorema inverso de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles $\overset{\Delta}{ASC}$:
$\angle ASC = 90^{o}$.
Sea M el centro del cuadrado ABCD
$\angle SAM = 45^{o}$.
Sea O el centro de la esfera.
O pertenece a la recta perpendicular a la base ABCD que pasa por el centro M.
Per ser la esfera tangente a la arista $\overline{SA}$ en el vértice A, $\overline{OA}$ es perpendicular a $\overline{SA}$.
$\angle SAO = 90^{o}$.
Entonces, $\angle MA == 901 - \angle SAM = 45^{o}$.
El triángulo $\overset{\Delta}{AMO}$ es rectángulo i isósceles.
Aplicando el teorema de Pitágoras:
$\overline{OA} = a$ radio de la esfera.
La superficie de la esfera es:
$S_{esfera} = 4\pi a^{2}$.