SOLUCIONES MAYO 2017

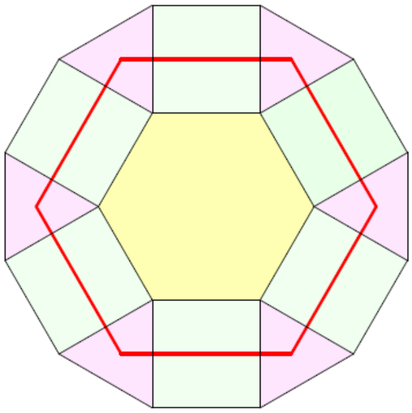
Soluciones extraídas de los libros:

XVI CONCURSO DE PRIMAVERA 2012

XVII CONCURSO DE PRIMAVERA 2013

Obtenibles en http://www.concursoprimavera.es#libros

AUTORES: Colectivo “Concurso de Primavera”. Comunidad de Madrid.



Mayo 1, 2.- Hemos rodeado el hexágono regular central de la figura con cuadrados y triángulos equiláteros. Si el lado de ese hexágono mide 2, ¿cuál es el área del hexágono regular cuyos vértices son los centros de los triángulos equiláteros?

Nivel: A partir de 4ESO.

Solución: La relación entre la apotema y el lado del hexágono es la misma que entre la altura y el lado de un triángulo equilátero, esto es: $cos(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Observamos que la apotema del hexágono grande es una unidad mayor que la del pequeño. Como sabemos el lado del hexágono pequeño, podemos calcular el lado y la apotema del grande.

$$\mathrm{A_P} = \mathrm{L_P}\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{A_G} = \mathrm{A_P} + 1 = 1 + \sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{L_G} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot \mathrm{A_G} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}}$$

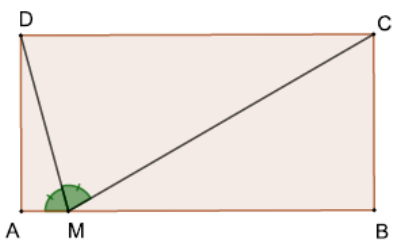
Por tanto, el área del hexágono es:

$$\frac{1}{2}\text{Perímetro}\cdot \mathrm{A_G} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot \mathrm{L_G}\cdot \mathrm{A_G} = 3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)^2 = 8\sqrt{3}+12$$

Mayo 3.- En el rectángulo ABCD con AB = 6 y BC = 3, elegimos un punto M en el lado AB de forma que ∠AMD = ∠CMD. ¿Cuánto mide ese ángulo?

Nivel: A partir de 4ESO.

Solución: Si ∠AMD = ∠CMD = α, en la figura tenemos ∠CMB = ∠MCD =180° - 2α, por alternos internos. Así que el triángulo ΔCMD es isósceles con MC = 6. De aquí: $sen(\angle CMB) = \frac{3}{6} \Rightarrow \angle CMB = 30° \Rightarrow \alpha = 75°$



Mayo 4, 5.- Sean a, b, c, d y e enteros positivos tales que:

$$a + b + c + d + e = 2015$$

y sea M la mayor de las sumas a + b, b + c, c + d y d + e; ¿cuál es el menor valor para M?

Nivel: Bachillerato.

Solución: En primer lugar, repartimos la mayor cantidad posible entre a, c y e. Para ello, dividimos 2011 entre 3, lo que da cociente 670 y resto 1. Como b y d deben ser positivos, asignamos 669 para a, c y e respectivamente y quedan 4 por repartir entre b y d. El mínimo valor del máximo de las sumas a + b, b + c, c + d y d + e resulta ser 669 + 2 = 671.

Mayo 6.- En un triángulo de lados a, b y c se verifica:

$$(a + b + c)\cdot(a + b - c) = 3ab$$

Hallar el valor del ángulo opuesto al lado c

Nivel: A partir de 4ESO.

Solución: De la condición del enunciado se tiene:

$$(a + b + c)\cdot(a + b - c) = 3ab \Rightarrow (a+b)^2 - c^2 = 3ab \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = ab$$

Y por el teorema de los cosenos:

$$\cos(C) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, el ángulo vale 60°.

Mayo 7.- Resolver:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 625 \\ x \cdot y = 168 \end{array}\right\}$$

Nivel: A partir de 4ESO.

Solución: Si a la primera ecuación le sumamos el doble de la segunda llegamos a: $(x + y)^2 = 961$. Por tanto, x + y = ±31. Y el sistema propuesto es equivalente a:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = \pm 31 \\ x \cdot y = 168 \end{array}\right\}$$

Para el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 31 \\ x \cdot y = 168 \end{array}\right\}$$

tenemos al despejar y en la primera y sustituir en la segunda: $x^2 - 31x + 168 = 0$, que aporta x = 24, x = 7. Por tanto, son soluciones del sistema (24, 7) y (7, 24)

Para el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x + y = -31 \\ x \cdot y = 168 \end{array}\right\}$$

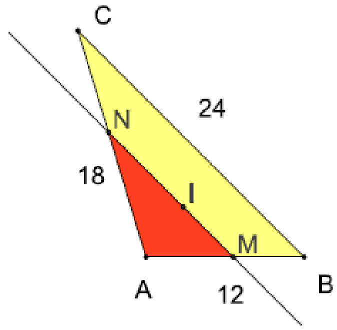
tenemos al despejar y en la primera y sustituir en la segunda: $x^2 + 31x + 168 = 0$, que aporta x = - 24, x = - 7. Por tanto, son soluciones del sistema (-24, -7) y (-7, -24)

Mayo 8.- En una reunión de 52 personas, ¿cuál es el mayor valor de n para el que la afirmación "al menos n personas de la reunión cumplen años el mismo mes" sea verdadera

Nivel: Preparación OME.

Solución: Puesto que 48 = 12·4, por el Principio de Dirichlet (del palomar) podemos afirmar que al menos 5 personas de entre las 52 cumplen años el mismo mes.

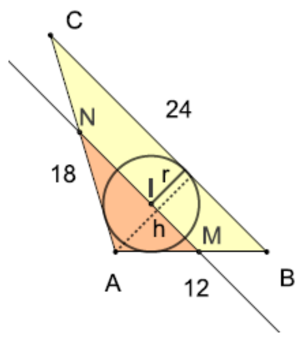
Mayo 9, 10.- En al triángulo △ABC, AB = 12, BC = 24 y AC = 18. Sea I el incentro del triángulo. Si la recta paralela a CB que pasa por I corta a AC y AB en N y M respectivamente, calcular el perímetro del triángulo △AMN



Nivel: Preparación OME.

Solución: Como MN es paralelo a BC los triángulos ΔABC y ΔAMN son semejantes. Sea h la altura sobre BC en ΔABC, como MN y BC son paralelas, la altura sobre MN en ΔAMN es h – r y además la razón de semejanza es $\frac{h-r}{r}$. Hallemos esta razón.

El perímetro de ΔABC es 2p = 12 + 24 + 18 = 54 y su área es r·p = 27r. Pero también el área es $\frac{1}{2} \cdot \mathrm{BC} \cdot \mathrm{h} = 12\mathrm{h}$. De aquí 27r = 12h, y como consecuencia:



$$\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{h}} = \frac{4}{9} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{h}-\mathrm{r}}{\mathrm{h}} = 1 - \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{h}} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

Como el perímetro del triángulo ΔABC es 54, entonces el perímetro del triángulo ΔAMN es $54 \cdot \frac{5}{9} = 30$

Mayo 11.- Al calcular a·b siendo a un número de dos cifras, Laia cambió el orden de las cifras de a y obtuvo 161. ¿Cuál es el resultado correcto del producto?

Nivel: A partir de 1ESO.

Solución: Si cambió el orden de las cifras de a y obtuvo para el producto 161, multiplicó 23 por 7, cuando debía multiplicar 32 por 7, de modo que el resultado correcto es 224.

Mayo 12.- Si a, b y c son no nulos, calcular los valores de la expresión:

$$\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}+\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}+\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|}+\frac{\mathbf{abc}}{|\mathbf{abc}|}$$

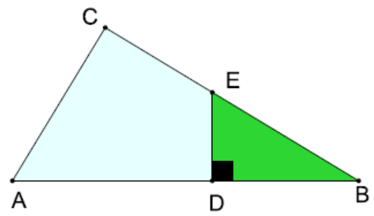
Nivel: A partir de 4ESO.

Solución 1: Los sumandos de esta expresión son ± 1, pero el valor del cuarto sumando está ligado al producto de los otros tres. Por tanto, no puede haber un número impar de signos negativos. Las posibilidades son cuatro unos, dos unos positivos y dos negativos, y cuatro negativos.

Solución 2: Con un diagrama de árbol:

$$\begin{cases} a<0 \rightarrow \begin{cases} b<0 \rightarrow \begin{cases} c<0 & \rightarrow 4 \text{ unos negativos} \\ c>0 & \rightarrow 2 \text{ unos positivos y 2 negativos} \end{cases} \\ b>0 \rightarrow \begin{cases} c<0 & \rightarrow 2 \text{ unos positivos y 2 negativos} \\ c>0 & \rightarrow 2 \text{ unos positivos y 2 negativos} \end{cases} \end{cases} \\ a>0 \rightarrow \begin{cases} b<0 \rightarrow \begin{cases} c<0 & \rightarrow 2 \text{ unos positivos y 2 negativos} \\ c>0 & \rightarrow 2 \text{ unos positivos y 2 negativos} \end{cases} \\ b>0 \rightarrow \begin{cases} c<0 & \rightarrow 2 \text{ unos positivos y 2 negativos} \\ c>0 & \rightarrow 4 \text{ unos positivos} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Mayo 13, 14.- En el triángulo $\triangle$ABC; AC = 3, CB = 4 y AB = 5. Si D es un punto de AB de manera que el triángulo rectángulo $\triangle$DBE tiene la tercera parte del área del triángulo $\triangle$ABC, ¿cuál es el perímetro del triángulo $\triangle$DEB?



Nivel: A partir de 3ESO.

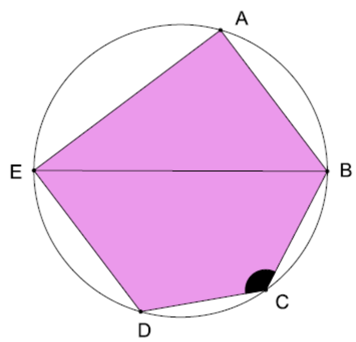
Solución: Los triángulos ΔABC y ΔEDB son semejantes (pues los dos son rectángulos y tienen el ángulo en B común) así que:

$$\frac{\mathrm{ED}}{3}=\frac{\mathrm{DB}}{4}$$

El área del triángulo ΔABC es $\frac{3\cdot 4}{2}=6$. De modo que el área del triángulo ΔEDB es:

$$\frac{\mathrm{ED}\cdot\mathrm{DB}}{2}=\frac{6}{3} \Rightarrow \frac{\mathrm{DB}\cdot\frac{3}{4}\mathrm{DB}}{2}=2 \Rightarrow \mathrm{DB}^2=\frac{16}{3} \Rightarrow \mathrm{DB}=\frac{4\cdot\sqrt{3}}{3}$$

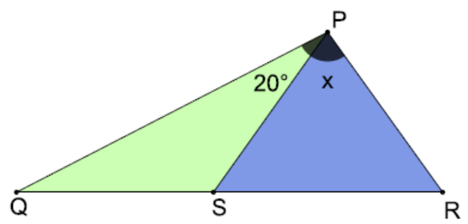
Mayo 15, 16.- En la circunferencia de diámetro EB las cuerdas AB y ED son paralelas. Si el cociente entre las medidas de los ángulos $\angle$AEB y $\angle$ABE es 4/5, ¿cuál es la medida del ángulo $\angle$DCB?



Nivel: Bachillerato. Preparación OME.

Solución: Como EB es un diámetro, el triángulo ΔABE es rectángulo en A. Como el cociente entre las medidas de los ángulos ∠AEB y ∠ABE es 4/5, estos miden 40° y 50° respectivamente. Como las cuerdas AB y ED son paralelas, el ángulo ∠DEB mide también 50°. Por tanto, los arcos DE, EA y AB suman 80° + 100° + 80° = 260°. El ángulo ∠BCD es la mitad de esta suma, es decir 130°

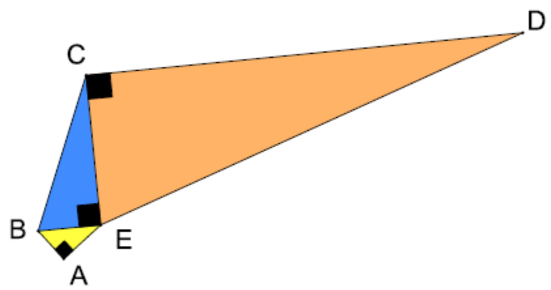
Mayo 17.- En el triángulo △PQR, S es el punto del lado QR que cumple QS=SP=PR. Si ∠QPS = 20º, ¿qué vale el ángulo ∠SPR?



Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: El ángulo en Q es de 20° ya que ΔPQS es isósceles, y eso hace que en ese mismo triángulo el ángulo en S sea de 140°. El ángulo en S del triángulo ΔPSR mide 40°, igual que el ángulo en R y de ahí el ángulo x es de 100°.

Mayo 18, 19: En la figura se ven tres triángulos rectángulos, ninguno de ellos semejante a ninguno de los otros dos, y todos ellos con lados enteros siendo AB = 3. Hallar el área del pentágono ABCDE



Nivel: Preparación OME.

Solución: Puestos que los tres triángulos son rectángulos y tienen longitudes de sus lados enteras, estos forman ternas pitagóricas. Siendo AB = 3, la única terna en la que interviene el 3 es en la terna 3, 4 y 5. Así que AE = 4 y BE = 5. Además de en esta el 5 interviene en la terna 5, 12 y 13, de modo que EC = 12 y BC = 13. Por último 12 interviene en las ternas de la forma 3k, 4k y 5k y en 12, 35 y 37. Como no hay triángulos semejantes, el último no puede tratarse de un triángulo 3k, 4k y 5k. Por tanto, CD = 35 y ED = 37. El área resulta ser:

$$A = \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{5 \cdot 12}{2} + \frac{12 \cdot 35}{2} = 246$$

Mayo 20.- Resolver en N:

$$2^{2x^2-9x+4} = 5^{x^2-x-12}$$

Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: La única forma de que una potencia de 2 coincida con una potencia de 5, es que el exponente de ambas sea 0. Así que buscamos una raíz común en ambos exponentes. Podemos resolver ambas ecuaciones y hallar la raíz común o recordar que el termino independiente es el producto de las raíces, así que buscamos un divisor común de 4 y de -12. La solución es 4.

Mayo 21.- ¿Cuántas parejas de enteros (m, n) cumplen la ecuación m + n = m·n?

Nivel: Preparación OME.

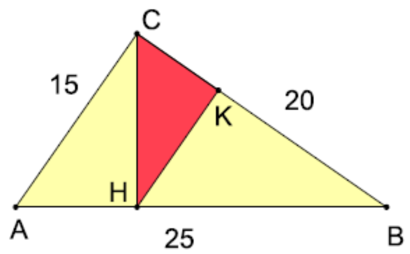
Solución: Tenemos n + m = m·n, y así, n = m·n – m = m·(n – 1). Por lo tanto, n es 0 o es divisible por n – 1, lo cual obliga a que n – 1 = ± 1, y de ahí n = 2 o de nuevo n = 0. Si n = 0 también m = 0. Si n = 2 también m = 2. Luego hay dos soluciones.

Mayo 22.- En la lista de números A, B, C, D, E, F, G y H, tres cualesquiera de ellos suman 30. Si C = 5, ¿cuál es el valor de A + H?

Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: C + D + E = 30 = D + E + F por lo que C = F = 5. 30 = F + G + h = 5 + G + H y por tanto G + H = 25.

Mayo 23, 24.- En el triángulo rectángulo △ABC de lados 15, 20 y 25, los segmentos CH y HK son perpendiculares a los lados AB y CB, respectivamente. ¿Cuál es el área del triángulo △CHK?



Nivel: Preparación OMS.

Solución: Calculemos el área del triángulo ΔABC de dos maneras:

$$2 \cdot A_{\Delta ABC} = \begin{Bmatrix} = BC \cdot AC = 15 \cdot 20 = 300 \\ = AB \cdot CH = 25 \cdot CH \end{Bmatrix} \Rightarrow CH = 12$$

Ahora los triángulos ΔABC y ΔCHK son semejantes (al ser los dos rectángulos y ser iguales los ángulos en B y H por tener los lados que los generan perpendiculares) y la razón de semejanza es la razón de hipotenusas:

$$\frac{CH}{BC} = \frac{12}{25}$$

El área del triángulo ΔABC es 150 por lo que el área del triángulo ΔCHK se obtiene multiplicando este valor por el cuadrado de la razón de semejanza:

$$A_{\Delta CHK} = 150 \cdot \left(\frac{12}{25}\right)^2 = \frac{864}{25}$$

Mayo 25.- Con esto de la crisis la paga semanal de Laia y Aitana se ha recortado un 20% y un 12% respectivamente. Antes sumaban 55 € y ahora sube a 46 €, ¿cuánto recibe cada una?

Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: Si x e y son las pagas semanales de Laia y Aitana antes de los recortes tendremos:

$$\left.\begin{array}{c} x + y = 55 \\ (x - 0{,}2x) + (y - 0{,}12y) = 46 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 30 \\ y = 25 \end{array}\right.$$

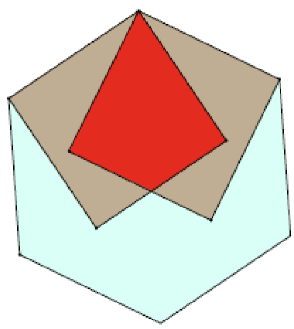
que pasan a ser 24 € y 22 € después de los recortes

Mayo 26.- ¿Cuál es el menor número múltiplo de 36 cuya suma de cifras es 36?

Nivel: Preparación OMS.

Solución: El menor número cuya suma de cifras es 36 es el 9999, pero no es múltiplo de 36, porque no es múltiplo de 4 (ya que las dos últimas cifras, 99, no son un múltiplo de 4). El siguiente número a considerar es el 19998, pero no es múltiplo de 36, porque no es múltiplo de 4 (ya que las dos últimas cifras, 98, no son un múltiplo de 4). El siguiente a considerar sería el 29988, que ya cumple todos los requisitos del enunciado.

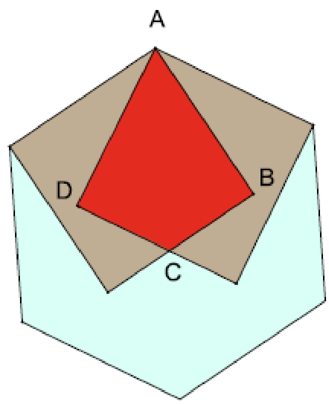
Mayo 27, 28.- Sobre dos lados contiguos de un hexágono regular de lado 1, construimos sendos cuadrados, como indica la figura. ¿Qué área tienen la región donde se solapan los dos cuadrados?



Nivel: Preparación OMS.

Solución: Tenemos:

$$A_{ABCD} = 2 \cdot A_{\Delta ACB}$$



Como el ángulo entre dos aristas consecutivas de un hexágono es de 120°, el ángulo ∠CAB = 30°. Así, que, el triángulo ΔCAB es un triángulo 30°-60°-90°, con AB = 1. Si CB = x, entonces AC = 2x y al aplicar Pitágoras obtenemos $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Con ello:

$$A_{ABCD} = 2 \cdot A_{\Delta ACB} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Mayo 29.- ¿Cuántos números de tres cifras cumplen que una cifra es el producto de las otras dos?

Nivel: Preparación OMS.

Solución: Elaboramos una tabla teniendo en cuenta cuál es la cifra producto.

Cifra producto	Las otras cifras	Las tres cifras	Número de casos
0	01, 02, …., 09	100, 200,…., 900	9
1	11	111	1
2	12	122, 212, 221	3
3	13	133, 313, 331	3
4	14, 22	441, 224	3+3
5	15	155, 515, 551	3
6	16, 23	616, 623	3+6
7	17	177, 717, 771	3
8	18, 24	818, 824	3+6
9	19, 33	919, 933	3+3

En total, 52.

Mayo 30.- Las rectas $x - y = 2$ y $mx + 3 = y$ se cortan en un punto de coordenadas positivas, ¿cuál es el mayor y menor valor de m?

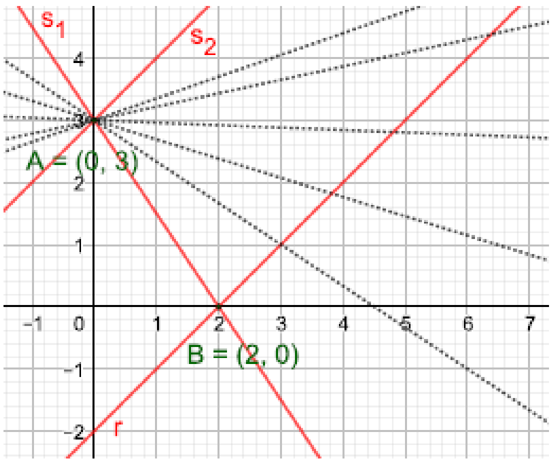
Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: Representamos la recta r: $y = x - 2$.

Todas las rectas de ecuación $y = mx + 3$ pasan por (0, 3).

Para que el punto de corte de las dos rectas tenga coordenadas positivas, dicho punto ha de estar en el primer cuadrante.

Las rectas $y = mx + 3$ serán cualesquiera de las rectas que estén entre las rectas s_1 y s_2 de la figura.



La recta s_1 pasa por B(2, 0) $\Rightarrow 2m + 3 = 0 \Rightarrow m = - 3/2$.

La recta s_2 es paralela a la recta $y = x - 2$, por lo que tienen la misma pendiente $m = 1$.

Por lo tanto $-3/2 < m < 1$

Mayo 31.- Sean x e y los naturales más pequeños posibles para que 360x sea un cuadrado perfecto y 360y sea un cubo perfecto. Hallar x e y

Nivel: A partir de 2ESO.

Solución: En la descomposición factorial de un cuadrado perfecto (cubo) todos los exponentes deben ser pares (múltiplos de tres). Como $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

- Para conseguir un cuadrado perfecto debemos añadir un factor 2 y un factor 5 $\Rightarrow$ $x = 10$.
- Para conseguir un cubo debemos añadir un factor 3 y dos factores 5 $\Rightarrow$ $y = 75$