SOLUCIONES JUNIO 2017

Autor: José Colón Lacalle. Profesor jubilado

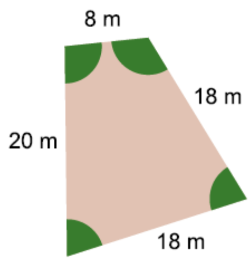
Colección preparada en el año 2001 para la Olimpiada de Secundaria (OMS) del primer ciclo de la ESO.

Junio 1.- Los participantes en un desfile pueden desfilar en filas de 3, o en filas de 5 o en filas de 25, pero no pueden hacerlo en filas de 4 ni en filas de 9. Si participan entre 1000 y 2000, ¿cuál es el número de participantes?

Nivel: Preparación OMS (primer ciclo)

Solución: Se calcula el m.c.m. de 3, 5 y 25, que es 75. Se buscan los múltiplos de 75 entre 1000 y 2000. De ellos, se tachan los que sean múltiplos de 4 (las dos últimas cifras forman un número múltiplo de 4) y los múltiplos de 9 (la suma de todas las cifras es un múltiplo de 9). Los que quedan son los números buscados, que son: 1050, 1275, 1425, 1650, 1725, 1875 y 1950.

Junio 2, 3.- En un pueblo, la plaza tiene forma de un cuadrilátero como el de la figura. El alcalde quiere construir parterres en las cuatro esquinas de radio 3,5 m. Si el coste por m^2 de parterre es 150 €, ¿cuánto tendrá que gastarse el municipio?



Nivel: Preparación OMS (primer ciclo)

Solución: Puesto que la suma de ángulos entre aristas consecutivas de un cuadrilátero como el de la figura es 360 (pues una diagonal del cuadrilátero forma dos triángulos cuyos ángulos suman 2·180° = 360°), los cuatro parterres forman un círculo de radio 3,5 m, cuya área es $\pi \cdot (3{,}5)^2 \approx$ 38,49 m^2, cuyo coste ascenderá a (38,48·150 =) 5772,68 €.

Junio 4.- ¿Qué dígitos faltan en el producto?

$$\begin{array}{cccc} & 2 & * & * \\ \times & & * & * \\ \hline & * & 6 & 1 \\ * & * & * & \\ \hline * & * & 0 & 1 \end{array}$$

Nivel: Preparación OMS (primer ciclo)

Solución:

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 8 & 7 \\ \times & & 2 & 3 \\ \hline & 8 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 4 & \\ \hline 6 & 6 & 0 & 1 \end{array}$$

Junio 5.- En una biblioteca la tercera parte de los libros son de matemáticas. Hay 30 libros de Lengua y 24 de Ciencias Sociales. Si de Ciencias Naturales hay tantos como de Lengua. ¿Cuántos libros hay en total?

Nivel: Preparación OMS (primer ciclo)

Solución: Si los libros de matemáticas son un tercio del total, todos los demás son dos tercios. Luego hay:

$$\frac{3}{2}\cdot(30+24+30)=126$$

libros en total.

Junio 6.- En un saco blanco hay 2000 alubias blancas y en un saco rojo hay 3000 alubias rojas. Del saco blanco se sacan 50 alubias y se mezclan con las del rojo. Del rojo se sacan 50 alubias que se dejan en el saco blanco. ¿Hay más alubias blancas en el saco blanco o en el rojo?

Nivel: Preparación OMS (primer ciclo)

Solución: Después de la primera extracción habrá 1950 alubias blancas en el saco blanco y 3000 alubias rojas y 50 alubias blancas en el saco rojo. Después de la segunda extracción (y alubias blancas y 50 – y alubias rojas) quedarán 1950 + y alubias blancas y 50 – y alubias rojas en el saco blanco y 2950 + y alubias rojas y 50 – y alubias blancas en el saco rojo. Como y varía entre 0 y 50, hay más alubias blancas en el saco blanco que en el saco rojo. Si la pregunta hubiese sido ¿hay más alubias blancas en el saco rojo o alubias rojas en el saco blanco?, la contestación hubiese sido: hay el mismo número de alubias blancas en el saco rojo que alubias rojas en el saco blanco.

Junio 7.- La cebra, el elefante y el conejo comen zanahorias en el pienso. El conejo come en todo un año las mismas que el elefante en dos días y las que come la cebra en cinco días son las que come el elefante en un día. Si entre los tres comen 55 kg de zanahorias por día. ¿Cuánto come cada uno de ellos por día?

Nivel: Preparación OMS (primer ciclo)

Solución: Si suponemos que el conejo come x (zanahorias por día), tenemos que el elefante come $\frac{365}{2}\mathrm{x}$ (zanahorias por día) y que la cebra come $\frac{365}{10}\mathrm{x}$ (zanahorias por día). Como entre los tres comen 55 kg de zanahorias por día, tenemos que:

$$\mathrm{x} + \frac{365\mathrm{x}}{2} + \frac{365\mathrm{x}}{10} = 55 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \text{ kg de zanahorias por día}$$

Lo que lleva a que el elefante coma $\frac{365}{8}$ (= 45,625) kg de zanahorias por día y que la cebra coma $\frac{73}{8}$ (= 9,125) kg de zanahorias por día.

Junio 8.- Laia piensa en tres números. Sumados dos a dos dan 38, 44 y 52. ¿Cuáles son?

Nivel: Preparación OMS (primer ciclo)

Solución: Sean A; B y C los números pensados por Laia. Entonces: A + B = 38, B + C = 44 y A + C = 52. Sumando las tres ecuaciones tenemos 2(A + B + C) = 134. D donde A + B + C = 67. Por último: A = (A + B + C) – (B + C) = 67 – 44 = 23; B = (A + B + C) – (A + C) = 67 – 52 = 15 y C = (A + B + C) – (B + A) = 67 – 38 = 29.

Junio 9.- La APAC tiene 50 socios. Este sábado cada socio presente plantó 17 árboles y el domingo cada socio presente plantó 20 árboles. En total se han plantado 1545 árboles. ¿Cuántos socios faltaron el sábado y cuántos el domingo?

Nivel: Preparación OMS (primer ciclo)

Solución: Sea x (y) el número de socios que faltó el sábado (domingo). Del enunciado tenemos: 17·(50 – x) + 20·(50 – y) = 1545. Qué, tras simplificar, se convierte en: 17x + 20 y = 305. Y además está, obviamente, la condición de qué x e y sean naturales (incluyendo el cero). Como

$$\mathrm{y} = \frac{305 - 17\mathrm{x}}{20}$$

e y ha de ser natural tendremos:

1.- 305 – 17x ha de ser múltiplo de 20 y por tanto de 5. Lo que implica que (como 305 es múltiplo de 5) 17x es múltiplo de 5 y, como 17 es primo, que x es múltiplo de 5, es decir que x termina en 0 o 5

2.- La expresión anterior corresponde a una recta con pendiente negativa (- 0,85) y ordenada en el origen 15,25, que corta al eje X en x = $\frac{305}{17} < 17{,}95$, por lo que x $\in$ {0, 1, 2, …, 17}

De 1 y 2 tenemos que las posibles soluciones de x son 0, 5, 10 o 15. Estudiemos estas posibilidades:

Si x = 0, entonces y = 15,25 que no es admisible.

Si x = 5 entonces y = 11 que es admisible.

Si x = 10, entonces y = 27/4 que no es admisible.

Si x = 15, entonces y = 5/2 que no es admisible.

Por lo tanto, el sábado faltaron 5 socios y el domingo faltaron 11 socios.

Junio 10.- ¿Cómo medirías 12 minutos con dos relojes de arena, uno de 15 minutos y otro de 9 minutos?

Nivel: Preparación OMS (primer ciclo)

Solución: Tendremos:

00:00. Ponemos los dos relojes a la vez.

00:09. Damos la vuelta al reloj de nueve minutos.

00:15. Damos la vuelta al reloj de quince minutos.

00:18. Termina el reloj de nueve minutos. Empezamos a contar los doce minutos.

00:30. Termina el reloj de quince minutos. Termina el periodo de doce minutos.

Junio 11.- Cada día Aitana se come el 20% de las galletas del bote. Si el miércoles se come 16, ¿cuántas había el lunes?

Nivel: Preparación OMS (primer ciclo)

Solución: Sea x el número de galletas de las que dispone Laia el lunes. Después de comer el 20% de ellas queda el 80% de ellas, es decir quedan 0,8·x galletas. El martes, después de comer su ración, quedan el 80% de las que quedaban el lunes, es decir quedan 0,8·0,8·x. El miércoles come el 20% de las que quedan el martes, es decir come 0,2·0,8·0,8·x que debe ser 16. De aquí:

$$\mathrm{x} = \frac{16}{0{,}2 \cdot 0{,}8^2} = 125$$

Junio 12.- Aitana, Laia y Viki van de excursión. Aitana lleva 5 botes de refresco, Laia lleva 4 y Viki ninguno. A la hora de comer se reparten a partes iguales los refrescos. Como Viki no traía botes da 20 €. ¿Cómo deben repartirse Laia i Aitana el dinero?

Nivel: Preparación OMS (primer ciclo)

Solución: Cada una de las tres bebe (9/3 =) 3 botes de refresco. Por tanto, Aitana le da a Viki 2 botes y Laia le da a Viki 1 bote. Luego Aitana debe recibir $\left(\frac{2}{3} \cdot 20 =\right)$ 13,33 € y a Laia le corresponde $\left(\frac{1}{3} \cdot 20 =\right)$ 6,67 €

Junio 13.- Una gallina pone dos huevos en tres días. ¿Cuántos días se necesitan para que 4 gallinas pongan dos docenas de huevos?

Nivel: Preparación OMS (primer ciclo)

Solución: Se trata de un problema de proporcionalidad compuesta con relación directa entre todas las variables intervinientes (número de gallinas, huevos puestos y días)

gallinas		huevos		días
1	______________	2	______________	3
↓(·4)		↓(·4)		
4	______________	8	______________	3
		↓(·24/8)		↓(·24/8)
4	______________	24	______________	**9**

Junio 14, 15.- José ha comprado un pastel, pero a la hora de comérselo ya ha desaparecido. Sus cinco compañeras de piso dicen:

Laia: “Esto es obra de una sólo de nosotras.”

Aitana: “No, de dos de nosotras.”

Viki: “No, de tres de nosotras.”

Andrea: “No, de cuatro de nosotras.”

Rosa: “No, de todas nosotras”

Si las inocentes dicen la verdad y las culpables mienten, ¿quién o quienes se comieron el pastel?

Nivel: Preparación OMS (primer ciclo)

Solución: Como las afirmaciones de las cinco compañeras de piso son contradictorias entre sí, sólo una afirmación es cierta y todas las demás falsas. Las que mienten son las culpables como hay cuatro frases falsas la que dice verdad debe ser Andrea.

Junio 16.- En una tienda se vendieron cierto día cuadernos por 139,5€, unos a 4,5€ y otros a 6€. Al día siguiente de los de 4,5 se vendieron un tercio más que el día anterior y de los de 6 un tercio menos que el día anterior por un total de 138€. ¿Cuántos cuadernos se vendieron en los 2 días?

Nivel: Preparación OMS (primer ciclo)

Solución: Sean x (y) el número de cuadernos de 4,5 (6) € vendidos el primer día. Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} 4{,}5x + 6y = 139{,}5 \\ 4{,}5\left(x + \frac{x}{3}\right) + 6\left(y - \frac{y}{3}\right) = 138 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 93 \\ 3x + 2y = 69 \end{array}\right\}$$

Restando las dos ecuaciones, llegamos a 2y = 24, es decir y = 12 y sustituyendo, por ejemplo, en la primera ecuación llegamos a x = 15. En total se han vendido $\left(x + \frac{4x}{3} = 15 + 20 =\right)$ 35 cuadernos de 4,5€ y $\left(y + \frac{2y}{3} = 12 + 8 =\right)$ 20 cuadernos de 6€.

Junio 17.- Un ciclista debe hacer un viaje de 120 km. Como sale con una hora de retraso, debe aumentar en 4 Km/h su velocidad, para llegar a tiempo. ¿Cuál es la velocidad habitual del ciclista?

Nivel: Preparación OMS (primer ciclo)

Solución 1: Si x es la velocidad habitual del ciclista (en km/h) y t el tiempo (en h) que tarda habitualmente a realizar el recorrido de 120 km, tenemos:

$$\begin{cases} \mathrm{xt} = 120 \\ (\mathrm{x}+4)(\mathrm{t}-1) = 120 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathrm{xt} = (\mathrm{x}+4)(\mathrm{t}-1) \\ \mathrm{xt} = 120 \end{cases}$$

De la primera ecuación, desarrollando llegamos a: 1 + x/4 = t y sustituyendo en la segunda:

$$x \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{x}}{4}\right) = 120; \quad 4\mathrm{x} + \mathrm{x}^2 - 480 = 0; \quad \mathrm{x} = 20 \ (\mathrm{x} = -24 \text{ no tiene sentido})$$

Solución 2: Por prueba y error. Si su velocidad habitual fuese 60 km/h tardaría 2 horas y yendo a 64 debería tardar 1 hora. Como esto último no se cumple, no va a 60 km/h. Si su velocidad habitual fuese 40 km/h tardaría 3 horas y yendo a 44 debería tardar 2 horas. Como esto último no se cumple, no va a 40 km/h. Si su velocidad habitual fuese 30 km/h tardaría 4 horas y yendo a 34 debería tardar 3 horas. Como esto último no se cumple, no va a 60 km/h. Si su velocidad habitual fuese 20 km/h tardaría 6 horas y yendo a 24 debería tardar 5 horas. Como esto último se cumple, va a 20 km/h.

Junio 18.- Compramos 10 kg de prunas para hacer mermelada. Al pelarlas y quitarles el hueso se pierde 1/5 del peso. Se pone igual cantidad de azúcar y se cuece. Durante la cocción se pierde ¼ del peso. ¿Cuántos kilos de mermelada se consiguen?

Nivel: Preparación OMS (primer ciclo)

Solución: Al pelar y quitar el hueso nos quedamos con (10 – 10/5 =) 8 kilos de masa. Al agregar igual cantidad de azúcar tendremos 16 kilos de masa. Al cocer esta masa nos quedamos con (16 – 16/4 =) 12 kilos de mermelada.

Junio 19, 20.- Hallar todos los tríos de dígitos no necesariamente diferentes, que cumple:

1.- Son la unidad o números primos.

2.- Todos los números de 2 cifras que se pueden formar con ellos son primos.

3.- Todos los números de 3 cifras que se pueden formar con ellos son primos

Nivel: Preparación OMS (primer ciclo)

Solución: Los dígitos a considerar son: 1, 2, 3, 5 y 7. Hemos de eliminar el 2 y el 5 pues los números terminados en 2 son divisibles por 2 y los terminados en 5 son divisibles por 5. Así que nos quedan: 1, 3 y 7. Con ellos ya podemos hacer un diagrama de árbol manejable:

$$\begin{array}{r}
1--111\\
1--3--113\\
7--117\\
1--131\\
1--3--3--133\\
7--137\\
1--171\\
7--3--173\\
7--177\\
1--111\\
1--3--313\\
7--317\\
1--331\\
3--3--3--333\\
7--337\\
1--371\\
7--3--373\\
7--377\\
1--711\\
1--3--713\\
7--717\\
1--731\\
7--3--3--733\\
7--737\\
1--771\\
7--3--773\\
7--777
\end{array}$$

Los tríos que buscamos no deben contener ni dos treses, ni dos sietes, ni tres treses ni tres sietes ni tres unos, pues 33 y 77 son múltiplos de 11, y 333 y 777 son múltiplos de 111 y 111 es múltiplo de 3. Nos quedan por investigar los tríos

$$1--\begin{array}{l}1--\begin{array}{l}3\\7--711 \text{ es múltiplo de } 3\end{array}\\3--7--371 \text{ es múltiplo de } 7\end{array}$$

Es decir, el único trio que cumple las condiciones es el trio formado por dos unos y un tres.

Junio 21.- Laia reparte todos sus abalorios entre sus seis amigas. Cuando se encuentra con una le da la mitad de los que le quedan más uno y así los reparte todos. ¿Cuantos abalorios tenía?
Nivel: Preparación OMS (primer ciclo)

Solución: Utilizaremos la técnica de "la marcha atrás". Como dos es el único número que es igual a su mitad más uno tenemos que antes de encontrarse con la sexta amiga tenía dos abalorios y se los da a ella. Esos 2 abalorios que tenía son la mitad de los que tenía antes de encontrar a la quinta amiga (x) menos 1. Es decir $\left(\frac{x}{2}-1=2\right)$ tenía, antes de encontrar a la quinta amiga (x =) 6 abalorios. De esos 6, la mitad más uno, es decir 4, son los que le da a la quinta amiga. Prosiguiendo de esta forma tenemos la siguiente tabla:

Amiga	Le da	Tenía antes de encontrarla
6	2	2
5	4	6
4	8	14
3	16	30
2	32	62
1	64	126

Junio 22.- Aitana reparte sus discos: A Laia le da la mitad más medio y a Viki le da la mitad de los que le quedan más medio. Así le queda todavía un disco. ¿Cuántos tenía al principio?

Nivel: Preparación OMS (primer ciclo)

Solución: Utilizaremos "la marcha atrás". La última persona con la que se encuentra es Viki. Como después de verla todavía tiene un disco, si x son los discos que tenía antes del encuentro, tenemos $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=1$ (ya que a Viki le da la mitad de los que tenía más medio) de donde x = 3 y da a Viki dos. Si después de encontrar a Laia, Aitana tenía 3 discos, antes de encontrarla tenía y con $\frac{y}{2}-\frac{1}{2}=3$ (ya que a Laia le da la mitad de los que tenía más medio) de donde y = 7 y da a Aitana 4. Es decir, Aitana antes de los encuentros disponía de siete discos.

Junio 23.- El paso de un puerto de montaña requiere marchar durante 6 jornadas. Sin embargo, una persona sólo puede llevar comida para 4 días. ¿Cuántas jornadas debe gastar para pasar el puerto en solitario admitiendo que puede hacer expediciones cortas para transportar vituallas?

Nivel: Preparación OMS (primer ciclo)

Solución: Sean A, B, C, D, E, F, G, los puntos que dividen la ruta en jornadas

Primera jornada: Salimos de A con 4 raciones y llegamos a B consumiendo una ración. Dejamos en B dos raciones.

Segunda jornada: Regresamos a A consumiendo la cuarta ración.

Tercera jornada: Salimos de A con 4 raciones. Consumimos una ración. Llegamos a B, cogemos una ración de las que allí había

Cuarta jornada: Llegamos a C. Consumimos una ración y como llevábamos cuatro raciones, dejamos una ración en C y cargamos con dos raciones

Quinta jornada: Regresamos a B. consumimos una ración. Nos queda una ración.

Sexta jornada: Regresamos a A. Consumimos la ración que llevamos.

Séptima jornada: Salimos de A, con 4 raciones. Llegamos a B. Consumimos una ración y cargamos con la que había en B.

Octava jornada: Llegamos a C. Consumimos una ración y cargamos la ración que había allí.

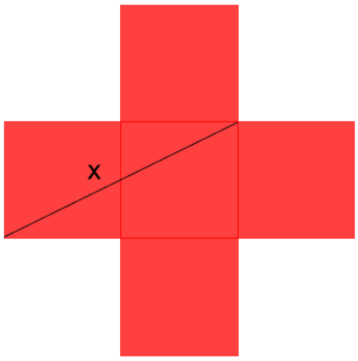
Novena jornada: Llegamos a D. Consumimos una de las cuatro raciones que llevábamos.

Décima jornada: Llegamos a E. Consumimos una de las tres raciones que llevábamos.

Undécima jornada: Llegamos a F. Consumimos una de las dos raciones que llevábamos.

Duodécima jornada: Llegamos a G. Consumimos la ración que llevábamos.

Junio 24.- Calcula el área y el perímetro de la cruz sabiendo que está formada por cinco cuadrados y que la distancia x de la figura es 10 m

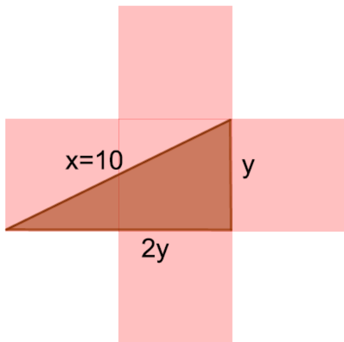


Nivel: Preparación OMS (primer ciclo)

Solución: Si y es el lado del cuadrado que genera la cruz tendremos al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo señalado: $y^2 + 4y^2 = 100, \Rightarrow y^2 =$ Área $= 20\ m^2$.

Para el perímetro P tenemos:

$$P = 12y = 12 \cdot \sqrt{20} = 24 \cdot \sqrt{5}\ m$$



Junio 25.- Laia, Aitana y Viki toman café o té, juntas todos los días, de acuerdo a las siguientes reglas: Si Laia pide café, Aitana pide lo mismo que Viki. Si Aitana pide café, entonces Laia pide lo que no ha pedido Viki. Si Viki pide té, entonces Laia y Aitana piden lo mismo ¿Cuál de ellas pide siempre lo mismo?

Nivel: Preparación OMS (primer ciclo)

Solución: Laia pide siempre té. Imaginemos que pide café. Entonces Aitana y Viki deben tomar o los dos, té o los dos, café. Aitana y Viki no pueden tomar café porque si Aitana tomase café, Viki coincidiría con Laia. Si Aitana y Viki tomasen té, Laia y Aitana deberían pedir lo mismo. Por lo tanto, es imposible que Laia tome café.

Junio 26.- Con una balanza de platillos se pueden pesar desde 1 a 13 kg utilizando sólo 3 pesas. Indica cuales han de ser estas tres pesas y como realizar cada una de las pesadas

Nivel: Preparación OMS (primer ciclo)

Solución: Las pesas son las de 1, 3 y 9 kilos.

Peso desconocido	Primer platillo	Segundo platillo
1	1	**1**
2	3	1 + **2**
3	3	**3**
4	3 + 1	**4**
5	9	3 + 1 + **5**
6	9	3 + **6**
7	9 + 1	3 + **7**
8	9	1 + **8**
9	9	**9**
10	9 + 1	**10**
11	9 + 3	1 + **11**
12	9 + 3	**12**
13	9 + 3 + 1	**13**

Junio 27.- El 20% de la humanidad dispone del 80% de la riqueza. Estima cuántas veces es más rica una persona de este 20% que otra del resto de la humanidad?

Nivel: Preparación OMS (primer ciclo)

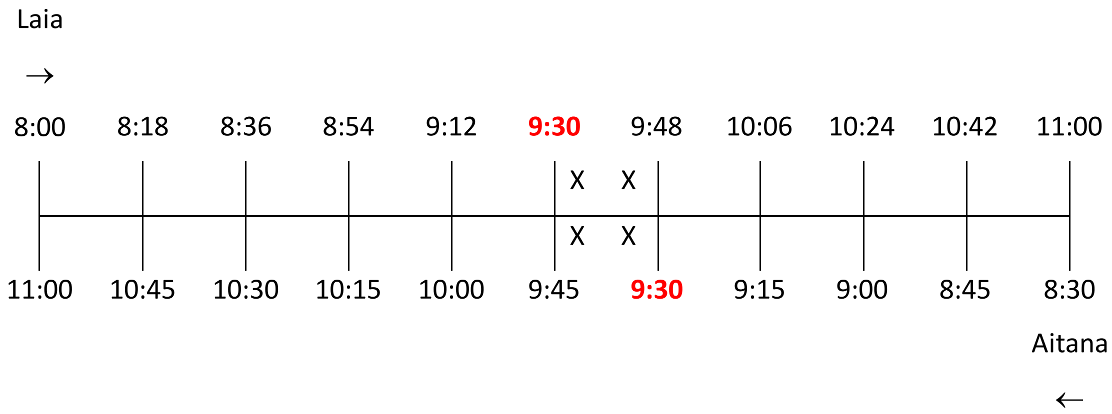
Solución: Cada persona del grupo del 20% tiene (80/20 =) 4 veces la unidad de medida de la riqueza. Cada persona del grupo del 80% tiene (20/80 =) ¼ veces la unidad de medida de la riqueza. Como (1/4)·16 = 4, cada persona del grupo del 20% es 16 veces más rica que una persona del grupo del 80%

Junio 28, 29.- Laia y Aitana pasaron la noche en los refugios A y B, respectivamente. A La mañana siguiente, Laia camina hacia B y Aitana hacia A, las dos a velocidades constantes y por un sendero que atraviesa una arboleda. Laia salió de A a las 8 h y llegó a B a las 11, mientras que Aitana salió de B a las 8:30 y llegó a A, a las 11. Las dos entraron en la arboleda a la misma hora cada una siguiendo su dirección y una de ellas salió de la arboleda 3 minutos antes que la otra. ¿A qué hora salió Laia de la arboleda?

Nivel: Preparación OMS (primer ciclo)

Solución:

Laia tarda tres horas (180 minutos) en recorren todo el camino. Aitana tarda dos horas y media (150 minutos) en recorrer todo el camino. Como Aitana recorre todo el camino en 30 minutos menos que Laia y el bosque en 3 minutos menos que Laia, podemos dividir todo el trayecto en (30/3 =) diez trozos. Laia recorre cada trozo en 18 minutos y Aitana recorre cada trozo en 15 minutos. Podemos hacer un esquema como el de abajo



Vemos que la arboleda empiezan a recorrerla a las 9:30, y Laia sale de ella a las 9:48

Junio 30.- Las tres caras distintas de un ortoedro tienen 6, 8 y 12 dm^2 de área. ¿Cuál es su volumen?

Nivel: Preparación OMS (primer ciclo)

Solución: Si las tres dimensiones del ortoedro son a, b y c, tenemos: $a \cdot b = 6$; $b \cdot c = 8$; $c \cdot a = 12$. Y multiplicando las tres ecuaciones: $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 6 \cdot 8 \cdot 12$. De donde:

$$V = a \cdot b \cdot c = \sqrt{6 \cdot 8 \cdot 12} = 24$$