SOLUCIONS SETEMBRE 2016

Solucions extretes dels llibres:

XII CONCURSO DE PRIMAVERA 2008

XV CONCURSO DE PRIMAVERA 2011

XVI CONCURSO DE PRIMAVERA 2012

Obtenibles en https://www.concursoprimavera.es/#libros

AUTORS: Col·lectiu "Concurso de Primavera". Comunitat de Madrid.

Setembre, 1: Trobar l'àrea de la regió generada per la corba formada pels punts (x, i) tals que

$$|x-1|+|y-1|=1$$

Nivell: Batxillerat

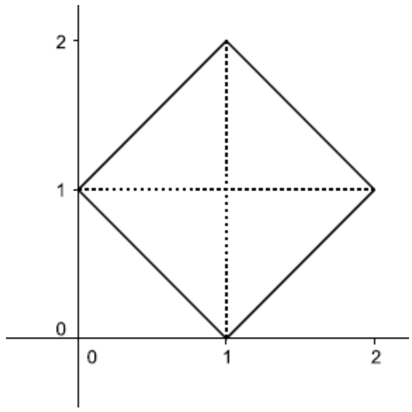
Solució: Dibuixem la corba $|x-1| + |y-1| = 1$

$$\text{Si } x, y \geq 1 \Rightarrow \begin{Bmatrix} |x-1| = x-1 \\ |y-1| = y-1 \end{Bmatrix} \Rightarrow |x-1|+|y-1| = x-1+y-1 = 1 \Rightarrow \mathbf{y+x=3}$$

$$\text{Si } x < 1, y \geq 1 \Rightarrow \begin{Bmatrix} |x-1| = 1-x \\ |y-1| = y-1 \end{Bmatrix} \Rightarrow |x-1|+|y-1| = 1-x+y-1 = 1 \Rightarrow \mathbf{y-x=1}$$

$$\text{Si } x \geq 1, y < 1 \Rightarrow \begin{Bmatrix} |x-1| = x-1 \\ |y-1| = 1-y \end{Bmatrix} \Rightarrow |x-1|+|y-1| = x-1+1-y = 1 \Rightarrow \mathbf{x-y=1}$$

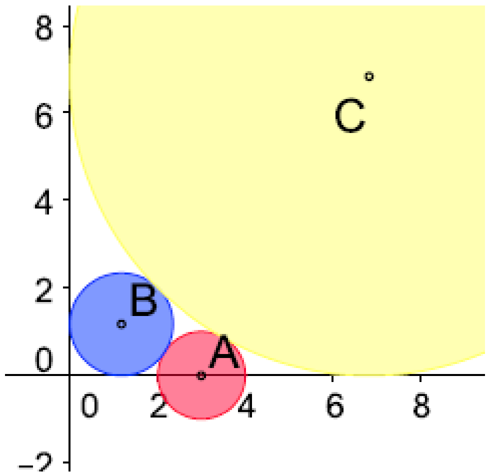
$$\text{Si } x, y < 1 \Rightarrow \begin{Bmatrix} |x-1| = 1-x \\ |y-1| = 1-y \end{Bmatrix} \Rightarrow |x-1|+|y-1| = 1-x+1-y = 1 \Rightarrow \mathbf{y+x=1}$$



La corba resulta ser un quadrat de costat $\sqrt{2}$

La seua àrea és 2

Setembre, 2-3: Hi ha dos circumferències tangents a la part positiva dels eixos de coordenades i tangents exteriors a la circumferència de centre A(3, 0) i de radi 1. Trobar els radis



Nivell: Batxillerat. Segon cicle de l'ESO

Solució: Tindrem dels dos triangles rectangles de la figura:

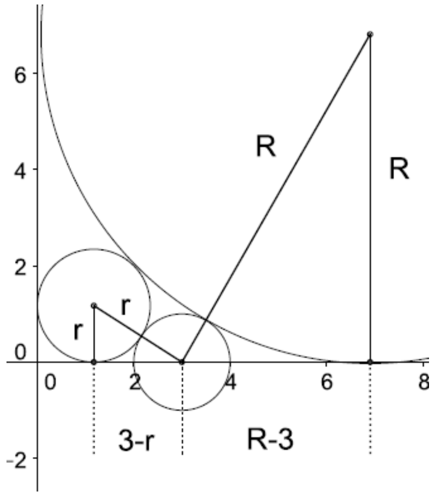
$$R^2 + (R-3)^2 = (R+1)^2$$

$$(r+1)^2 = r^2 + (3-r)^2$$

Per tant, R i r són solucions de l'equació

$$(x+1)^2 = x^2 + (x-3)^2$$

es dir, de l'equació $x^2 - 8x + 8 = 0$, les solucions de la qual són $4 + 2\sqrt{2} = \mathrm{R}$ i $4 - 2\sqrt{2} = \mathrm{r}$



Setembre 4: En el segment BC siguen D i E que el divideixen en tres segments iguals. Trobar k tal que $BD^2 + BE^2 = k \cdot BC^2$

Nivell: Segon cicle de l'ESO

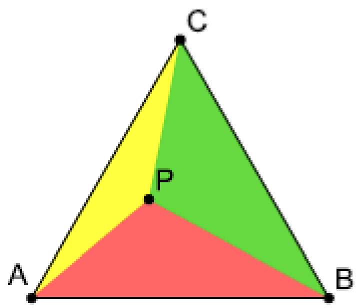
Solució:

x	x	x	
B	D	E	C

L'exigència de l'enunciat equival a: $x^2 + (2x)^2 = k\cdot(3x)^2 \Rightarrow x^2 + 4x^2 = k\cdot 9x^2 \Rightarrow 5x^2 = 9kx^2$

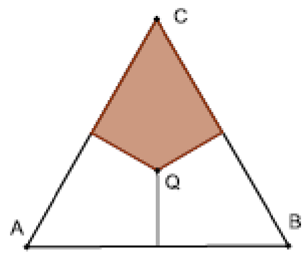
$\Rightarrow \quad 5 = 9k \Rightarrow k = \frac{5}{9}$

Setembre, 5-6: En l'interior d'un triangle equilàter ABC es tria un punt P. Quina és la probabilitat que l'àrea del triangle ABP siga major que la del triangle ACP i la del triangle BCP?



Nivell: Batxillerat. Preparació OME

Solució 1: Si Q és l'ortocentre del triangle tenim que els casos favorables són la regió ombrejada i els casos possibles són tots els punts del triangle ∆ABC. Per tant la probabilitat sol·licitada és 1/3



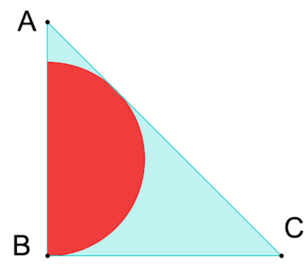
Solució 2: Ordenant les àrees dels tres triangles de major a menor hi ha 6 ordenacions possibles de què l'àrea del triangle DABP estarà en primer lloc en dos ordenacions. Com l'elecció de P és aleatòria, la probabilitat sol·licitada és 2/6 = 1/3

Setembre 7: Trobar els valors enters de p tals que: $\mathbf{4}^{\left(\frac{p-1}{p+1}\right)} \in \mathbb{Z}$

Nivell: segon cicle de l'ESO

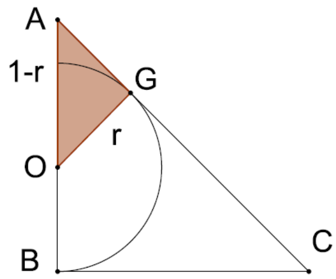
Solució: $4^{\left(\frac{p-1}{p+1}\right)} = 2^{\left(\frac{2p-2}{p+1}\right)}$, serà enter només quan $\frac{2p-2}{p+1} = 2 - \frac{4}{p+1}$ siga un enter major o igual a zero. Deurà ocórrer que $|p+1|$ siga un divisor de 4 tal que $2 \geq \frac{4}{p+1}$. Axina que p + 1 ∈{-1, -2, -4, 2, 4}, per lo que resultaran 5 valors de p, a saber: -2, -3, -5, 1, 3

Setembre 8-9: En la figura ABC és un triangle rectangle en B, amb AB = BC = 1. Calcular la radi del semicercle



Solució: Si O és el centre de la semicircumferència i G el punt de tangència tenim que $\Delta ABC \approx \Delta AOG$ (al ser rectangles i tindre un angle comú). D'ací:

$$\frac{1-r}{r}=\frac{\sqrt{2}}{1} \Rightarrow r=\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$$



Setembre 10: Trobar:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{99}{100!}$$

Nivell: Preparació OME

Solució: Afegim $\frac{1}{100!}$ a la suma demanada i aleshores la suma resulta ser 1, hi ha que:

$$\left(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{98}{99!}+\frac{99}{100!}\right)+\frac{1}{100!}=\left(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{98}{99!}\right)+\frac{100}{100!}$$
$$=\left(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{98}{99!}\right)+\frac{1}{99!}=\cdots\cdots=\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}=1$$

Per tant, la suma val $1-\frac{1}{100!}$

Setembre 11: Resoldre:

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}}$$

Nivell: Batxillerat. 4ESO

Solució:

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}} \Rightarrow \sqrt{2}=1+\frac{2+x}{4+2x+1}=\frac{3x+7}{2x+5} \Rightarrow x=\frac{7-5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-3}=\sqrt{2}-1$$

Setembre 12: Resoldre:

$$x+\sqrt{x^2+\sqrt{x^3+1}}=0$$

Nivell: Batxillerat. 4ESO

Solució:

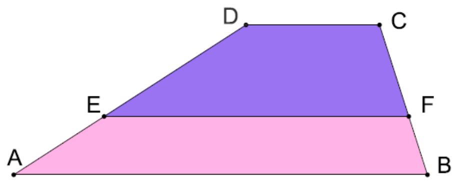
$$x+\sqrt{x^2+\sqrt{x^3+1}}=0 \Rightarrow x^2+\sqrt{x^3+1}=(-x)^2 \Rightarrow \sqrt{x^3+1}=0 \Rightarrow x=-1$$

Setembre 13: Pera una certa successió, la suma S_n, dels n primers termes ve donada per: $S_n = n^3+3$**.** Calcular el dècim terme de la successió

Nivell: Segon cicle de l'ESO

Solució: Òbviament $a_n = S_n - S_{n-1}$. Per tant: $a_{10} = S_{10} - S_9 = 1003 - 732 = 271$

Setembre 14-15: En els trapezis de la figura DC = 3, AB = 9, AD = 6, BC = 4 i els trapezis EFCD i ABFE tenen el mateix perímetre i bases paral·leles. Trobar AE i ED



Nivell: Segon cicle de l'ESO. Preparació OMS

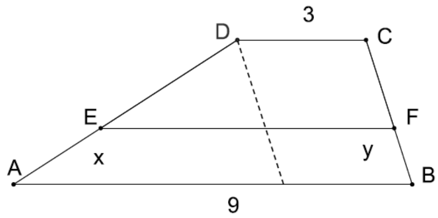
Solució: Anomenem x a AE e y a FB, llavors la condició de l'enunciat ens porta a:

$9 + x + y = 6 - x + 3 + 4 - y \Rightarrow x + y = 2$ (*)

D'altra banda, traçant per D la paral·lela a CB, obtenim dos triangles semblants, que ens permeten escriure $\frac{6-x}{6} = \frac{4-y}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{2}y\ (**)$

El sistema format per (*) i (**) porta a

$x = \frac{6}{5}, ED = 6 - \frac{6}{5} = \frac{24}{5}$



Setembre 16: Siga n el menor enter positiu divisible per 20, amb n^2 cub perfecte i n^3 quadrat perfecte. Trobar n

Nivell: Preparació OMS i OME

Solució: Siga $n = 20k = 2^2 \cdot 5 \cdot k$. Si n^2 ha de ser un cub perfecte i n^3 un quadrat perfecte, el valor mínim per a k és $2^4 \cdot 5^5$ (*), de manera que el natural buscat és $n = 2^6 \cdot 5^6 = 10^6 = 1_1000.000$.

L'afirmació (*) pot explicar-se de la manera següent: Com a n ha de ser divisible per 20 ha de contenir en la seua descomposició factorial el factor 2 elevat a 2 i el factor 5. Busquem entre els naturals de la forma $n = 2^{2+\alpha} \cdot 5^{1+\beta}$ el definit en l'enunciat. Tenim $n^2 = 2^{2(2+\alpha)} \cdot 5^{2(1+\beta)}$ que, com, deu ser un cub perfecte, deu tenir els exponents múltiples de 3, es a dir:

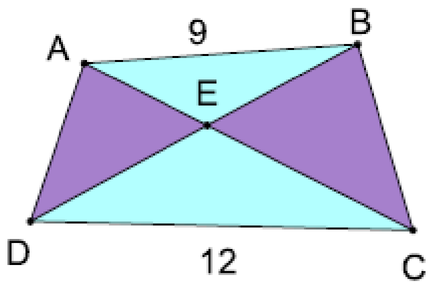
$$\begin{cases} 2(2+\alpha) = \dot{\hat{3}} \ \Rightarrow \ 2+\alpha = \dot{\hat{3}} \ \Rightarrow \ \alpha = 1(3) \ \Rightarrow \ \alpha = 1, 4, 7, 10, \ldots\ldots (A) \\ 2(1+\beta) = \dot{\hat{3}} \ \Rightarrow \ 1+\beta = \dot{\hat{3}} \ \Rightarrow \ \beta = 2(3) \ \Rightarrow \ \beta = 2, 5, 8, 11, \ldots\ldots (B) \end{cases}$$

Anàlogament $n^3 = 2^{3(2+\alpha)} \cdot 5^{3(1+\beta)}$, que, com deu ser un quadrat perfecte deu tenir tots els exponents múltiples de 2, es a dir:

$$\begin{cases} 3(2+\alpha) = \dot{\hat{2}} \ \Rightarrow \ 2+\alpha = \dot{\hat{2}} \ \Rightarrow \ \alpha = 0(2) \ \Rightarrow \ \alpha = 0, 2, 4, \ldots\ldots (C) \\ 3(1+\beta) = \dot{\hat{2}} \ \Rightarrow \ 1+\beta = \dot{\hat{2}} \ \Rightarrow \ \beta = 1(2) \ \Rightarrow \ \beta = 1, 3, 5, \ldots\ldots (D) \end{cases}$$

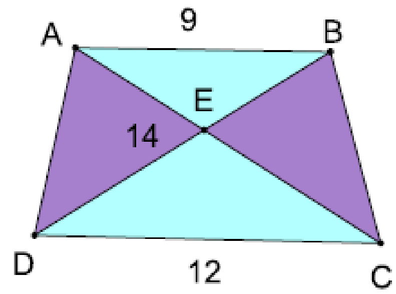
De (A) i (C) $\alpha = 4$ i de (B) i (D) $\beta = 5$

Setembre 17-18: En el quadrilàter ABCD de la figura es té AB = 9 i CD = 12. Les diagonals AC i BD es tallen en E. Si AC = 14 i els triangles AED i BEC tenen la mateixa àrea; trobar la longitud d'AE



Nivell: Preparació OMS i OME

Solució: Afegint a cada un dels triangles AED i BEC el triangle AEB tindrem que els nous triangles ADB i ABC tenen la mateixa àrea i com tenen base comuna (AB) això implica que ambdós tenen la mateixa altura. Per tant, AB//DC, o el que és el mateix, ABCD és un trapezi. Els triangles APARTE i DCE són semblants, de raó de semblança 9/12 =3/4.



Si x = AE, llavors 14 – x = EC i $\frac{x}{14-x} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 6$

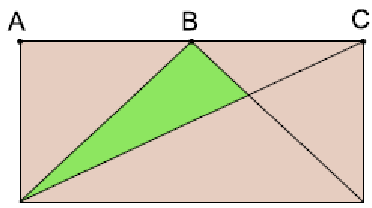
Setembre 19: Hui és l'aniversari d'Ali, Bea i Lola. La suma de les seues edats és 23 i el producte d'elles supera en 113 al producte de les seues edats ahir. Trobar la suma dels quadrats de les seues edats

Nivell: Preparació OMS

Solució: Siguen x, y i z les edats actuals. Llavors $xyz = (x-1)\cdot(y-1)\cdot(z-1) + 113$ i desenrotllant: $xy + yz + xz = x + y + z + 112 = 23 + 112 = 135$. D'altra banda:

$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = 23^2 - 2\cdot 135 = 259$.

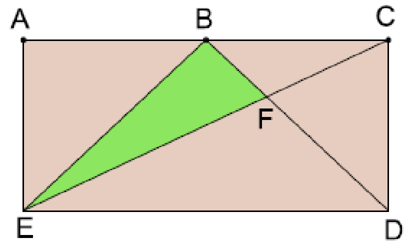
Setembre 20-21: Sabent que B és el punt mitjà d'AC, que la base del rectangle és 2 i la seua alçaria és 1, quina és l'àrea del triangle de color verd?



Nivell: Preparació OMS

Solució: Tindrem:

$A_{EBF} = A_{EBC} - A_{BFC} = \frac{BC \cdot AE}{2} - A_{BFC} = \frac{1 \cdot 1}{2} - A_{BFC}$



Els triangles EFD i BCF són semblants (iguals els angles en F (oposats pel vèrtex) i l'angle en C i en F (alterns interns)) amb raó de semblança ½, pel que les seues alçaries també mantindran la raó i seran h i 2h. Com a h + 2 h = 1 tindrem h=1/3. Amb això:

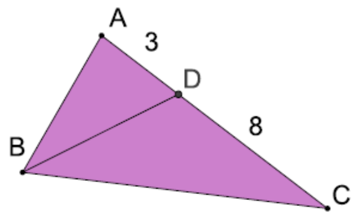
$A_{EBF} = \frac{1 \cdot 1}{2} - A_{BFC} = \frac{1}{2} - \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

Setembre 22: Resoldre: $7^{x+7} = 8^x$

Nivell: Batxillerat.

Solució: $7^{x+7} = 8^x \Rightarrow 7^x \cdot 7^7 = 8^x \Rightarrow \frac{8^x}{7^x} = 7^7 \Rightarrow \log_{\frac{8}{7}}(7^7) = x$

Setembre 23-24: En el triangle ABC de la figura, BD és la bisectriu de l'angle B. Si AD = 3, DC = 8 i les longituds dels costats són nombres enters, quin és el menor valor possible del perímetre d'ABC?



Nivell: Preparació OMS i OME

Solució: Segons el teorema de la bisectriu, els segments determinats per la bisectriu interior sobre el seu costat oposat són proporcionals als costats corresponents. Així que:

$$\frac{3}{c} = \frac{8}{a} \Rightarrow a = \frac{8c}{3}$$

Com ens demanen que els costats siguen enters, el valor mínim per a c és 6 (3 no és possible perquè no es verifica la desigualtat triangular). Per tant, el valor mínim possible para a és 16, i el valor mínim per al perímetre és 11 + 6 + 16 = 33

Setembre 25: Per a quants valors enters de k resulta que les gràfiques de $x^2 + y^2 = k^2$ i $x \cdot y = k$ no es tallen?

Nivell: Batxillerat.

Solució: Els punts d'intersecció de les dos corbes s'obtenen al resoldre el sistema format per les dos equacions de les corbes:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=k^2 \\ x\cdot y=k \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+\frac{k^2}{x^2}=k^2 \Rightarrow x^4-k^2x^2+k^2=0$$

Esta equació no té solucions si el seu discriminant és negatiu, és a dir si $k^4 - 4k^2 = k^2 \cdot (k^2 - 4) < 0$, que porta a què $k^2 - 4 < 0$. Hi ha tres valors enters que compleixen esta última condició: - 1, 0, 1, però per a k = 0 no hi ha les corbes, per tant, només hi ha dos valors enters per als que les corbes no es tallen: - 1 i 1

Setembre 26: En un triangle ABC es verifica:

cos(2A-B) + sen(A+B) = 2

Si AB mesura 4, calcular els altres costats del triangle.

Nivell: Batxillerat. 4ESO

Solució: La suma d'un cosinus i un sinus només pot valdre 2 si ambdós valen 1. Per al cosinus implica que l'angle ha de ser 0°, mentre que, per al sinus, l'angle ha de ser 90°. Per tant:

$$\left.\begin{array}{r} 2A-B=0 \\ A+B=90 \end{array}\right\} \Rightarrow A=30^\circ, \qquad B=60^\circ$$

Per tant, es tracta de un triangle 30°-60°-90°, rectangle en C. Per tant, CB = 2 i AC = $\sqrt{4^2-2^2} = 2\sqrt{3}$

Setembre 27: En una PG els tres primers termes són a_1 = sen x, a_2 = cos x i a_3 = tg x, per a algun x. Trobar els huit primers termes de la progressió

Nivell: 4ESO, Batxillerat.

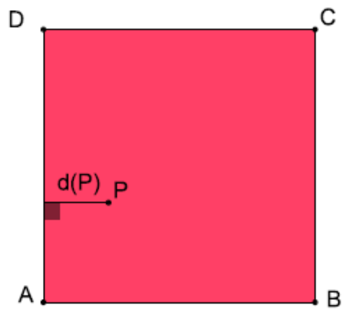
Solució: Si r és la raó de la progressió tindrem:

$$r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2} \Rightarrow r=\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

I utilitzarem una o altra segons convinga. Els següents termes de la progressió seran:

$$a_4=1, \qquad a_5=\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad a_6=\frac{1}{\cos x}, \qquad a_7=\frac{1}{\operatorname{sen} x}, \quad a_8=\frac{1}{\cos^2 x}$$

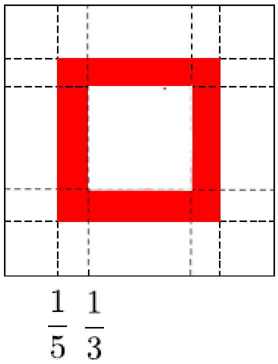
Setembre 28-29: En l'interior d'un quadrat de costat 1 es tria a l'atzar un punt P. Siga d(P) la distància de P al costat més pròxim al punt P. Calcular la probabilitat que el punt P compleixca la condició $\frac{1}{5} \leq d(P) \leq \frac{1}{3}$



Nivell: Batxillerat. Preparació OMS

Solució: La probabilitat sol·licitada és la probabilitat que el punt es trobe en la zona roja, que es pot calcular com a quocient d'àrees:

$$p = \frac{\text{área zona roja}}{\text{área total}} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}{1} = \frac{56}{225}$$



Setembre 30: Quin és el menor nombre de naturals que cal eliminar entre 1 i 100 perquè el producte de què queden acabe en 2?

Nivell: Preparació OMS i OME

Solució: Perquè el producte acabe en 2 cal llevar tots els múltiples de 5, que "forcen" la terminació en 0 o 5. Estos són 20. D'esta manera queden 10 números que acaben en 1, 10 en 2, 10 en 3, 10 en 4, 10 en 6, 10 en 7, 10 en 8 i 10 en 9, per la qual cosa el producte acaba en 6. És necessari llevar un número que acabe en 3 perquè el producte acabe en 2. En total, cal eliminar com a mínim 21 números