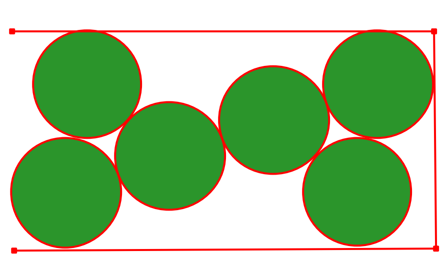
SOLUCIONS OCTUBRE 2016

Autor: Ricard Peiró i Estruch

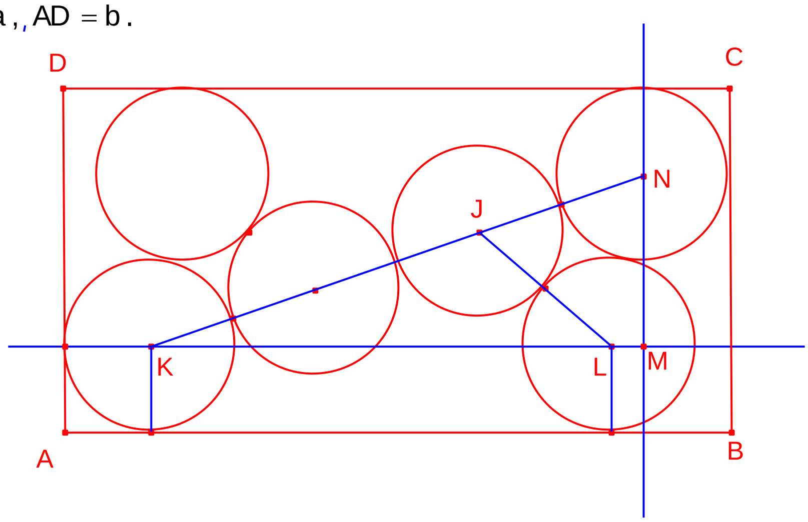
Octubre 1-2

Dins d'un rectangle s'han inscrit 6 circumferències d'igual radi r (veure figura).
Determineu la mesura dels costats del rectangle.



Solució:

Siga el rectangle ABCD de costats $\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=b$.



El triangle $\overset{\Delta}{JLN}$ de costat $\overline{JL}=2r$,

$\angle NJL = 60^o$.

$\angle KJL = 120^o$, $\overline{KJ}=4r$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{JKL}$:

$\overline{KL}^2 = (4r)^2 + (2r)^2 - 2\cdot 4r\cdot 2r\cdot\cos 120^o$.

Simplificant:

$\overline{KL} = 2\sqrt{7}\,r$.

Siga $\alpha = \angle JKL$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{JKL}$:

$(2r)^2 = (4r)^2 + \left(2\sqrt{7}\,r\right)^2 - 2\cdot 4r\cdot 2\sqrt{7}\,r\cdot\cos\alpha$. Simplificant:

$\cos\alpha = \dfrac{5\sqrt{7}}{14}$.

Siga M la projecció de N sobre la recta KL. $\overline{KM}=a-2r$. $\overline{KN}=6r$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KMN}$:

$\dfrac{a-2r}{6r} = \cos\alpha = \dfrac{5\sqrt{7}}{14}$. Resolent l'equació:

$a = \left(2+\dfrac{15\sqrt{7}}{7}\right)$.

$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

$\overline{MN}=b-2r$. $\overline{KN}=6r$.

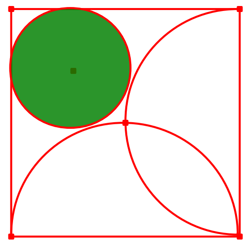
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KMN}$:

$\dfrac{b-2r}{6r} = \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{14}$. Resolent l'equació:

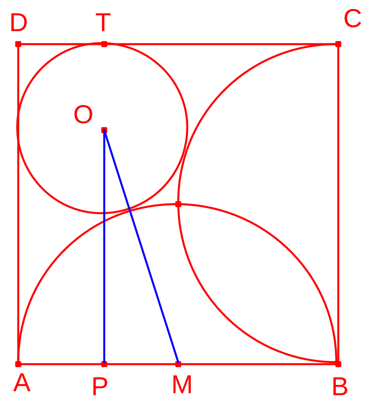
$b = \left(2+\dfrac{3\sqrt{21}}{7}\right)$.

Octubre 3-4 (I)

En un quadrat sobre dos costats s'han dibuixat dues semicircumferències (veure figura). Una circumferència és tangent exterior a les dues semicircumferències i als altres dos costats.
Determineu el radi de la circumferència.



Solució:



Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = c$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$ centre de la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB}$.

Siga O el centre de la circumferència. Siga $\overline{OT} = r$ el seu radi.

Siga P la projecció de O sobre el costat $\overline{AB}$,

$\overline{OM} = \frac{c}{2} + r$, $\overline{OP} = c - r$, $\overline{PM} = \frac{c}{2} - r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPM}$:

$$\left(\frac{c}{2} + r\right)^2 = \left(\frac{c}{2} - r\right)^2 + (c - r)^2 .$$

Simplificant:

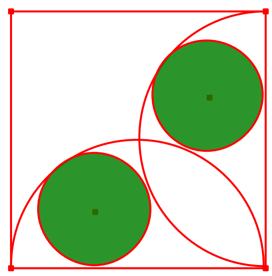
$r^2 - 4cr + c^2 = 0$.

Resolent l'equació:

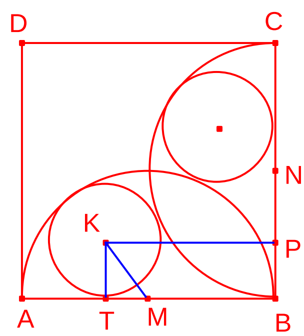
$r = \left(2 - \sqrt{3}\right)c$.

Octubre 3-4 (II)

En un quadrat de costat c s'han dibuixat dos semicircumferències de diàmetre dos costats del quadrat.
Dos circumferències, cadascuna d'elles, es tangent a les semicircumferències i a un costat del quadrat.
Determineu el radi de les circumferències.



Solució:



Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = c$.

Siguen M, N els punts migs dels costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, respectivament.

Siga K el centre de la circumferència tangent al costat $\overline{AB}$.

Siga T el punt de tangència. Siga $\overline{KT} = r$ el radi.

Siga $\overline{MT} = x$.

Siga P la projecció de K sobre el costat $\overline{BC}$.

$\overline{MK} = \frac{c}{2} - r$, $\overline{KN} = \frac{c}{2} + r$, $\overline{PN} = \frac{c}{2} - r$, $\overline{KP} = x + \frac{c}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KTM}$:

$\left(\frac{c}{2} - r\right)^2 = r^2 + x^2$. Simplificant:

$$4cr = c^2 - 4x^2 \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KPN}$:

$\left(\frac{c}{2}+r\right)^2=\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}-r\right)^2$. Simplificant:

$8cr=c^2+4x^2+4cx \qquad (2)$

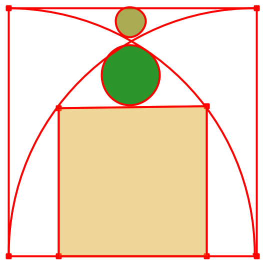
Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

$\begin{cases}4cr=c^2-4x^2\\8cr=c^2+4x^2+4cx\end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases}x=\frac{1}{6}c\\r=\frac{2}{9}c\end{cases}$.

Octubre 5-6

En la figura, el quadrat exterior té costat c.
Dues circumferències són tangents als dos arcs quadrats i la menuda tangent al quadrat gran i la gran tangent al quadrat menut.
Determineu el radi de les dues circumferències.



Solució:

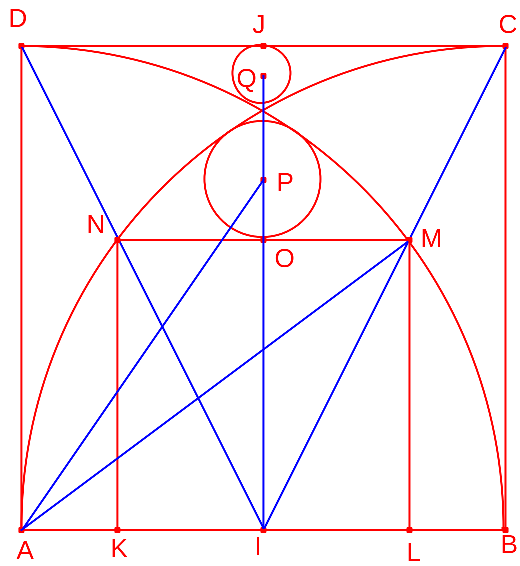
Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB}=c$.

Siguen I, J els punts migs dels costats $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, respectivament.

Siga KLMN el quadrat de costat $\overline{KL}=x$.

Siga O el punt mig del costat $\overline{MN}$.

$\overline{AM}=c$, $\overline{AL}=\frac{c+x}{2}$, $\overline{LM}=x$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ALM}$:

$c^2=\left(\frac{c+x}{2}\right)^2+x^2$. Resolent l'equació:

$x=\frac{3}{5}c$.

Siga P el centre de la circumferència gran.
Siga Q el centre de la circumferència menuda.
Siga $\overline{PO}=r$ radi de la circumferència gran.

$\overline{IP}=x+r=\frac{3}{5}c+r$, $\overline{AP}=c-r$, $\overline{AI}=\frac{c}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AIP}$:

$(c-r)^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{5}c+r\right)^2$. Resolent l'equació:

$r=\frac{39}{320}c$.

Siga $\overline{QJ}=s$ radi de la circumferència menuda.

$\overline{IQ}=c-s$, $\overline{AQ}=c-s$.

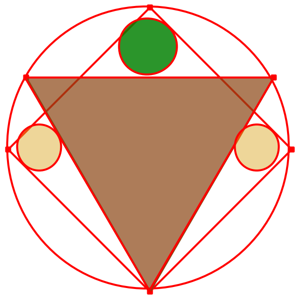
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AIQ}$:

$(c+s)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + (c-s)^2$. Resolent l'equació:

$s = \frac{1}{16}c$.

Octubre 7-8

En la figura, la circumferència té radi R.
S'ha dibuixat un quadrat i un triangle equilàter.
Determineu el radi de les tres circumferències.



Solució:

Siga la circumferència de radi R i centre O.
Siga el quadrat ABCD inscrit en la circumferència.

$\overline{OA} = R$

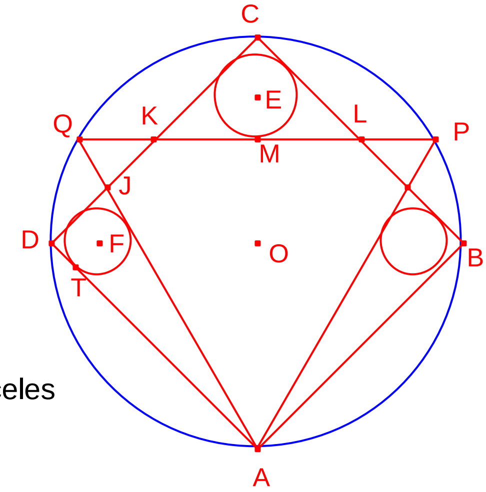
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{APQ}$ inscrit en la circumferència.

Siga M el punt mig del costat $\overline{PQ}$.

O és el baricentre del triangle. Aplicant la propietat del baricentre:

$\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{OA}$. $\overline{AM} = \overline{OA} + \overline{OM} = \frac{3}{2}R$.

$\overline{CM} = \overline{KM} = \frac{1}{2}c$. $\overline{KL} = 2 \cdot \overline{KM} = R$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{KCL}$:

$\overline{CK} = \overline{CL} = \frac{\sqrt{2}}{2}R$.

Siga $\overline{EO} = r$ el radi de la circumferència de centre E.

El radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{KCL}$ és:

$r = \frac{\overline{CK} + \overline{CL} - \overline{KL}}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)R$.

$\angle PAQ = 60^o$, aleshores, $\angle DAQ = \angle PAB = 15^o$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADC}$:

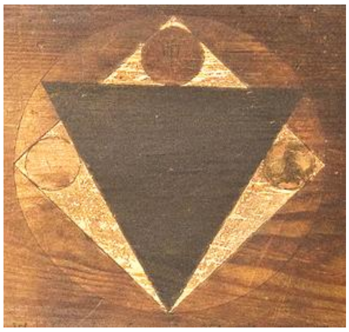
$\overline{AD} = R\sqrt{2}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADJ}$:

$\frac{\overline{DJ}}{R\sqrt{2}} = \text{tg}15^o = \text{tg}(45^o - 30^o) = 2-\sqrt{3}$. Aleshores, $\overline{DJ} = \left(2\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)R$

$\frac{R\sqrt{2}}{\overline{AJ}} = \cos 15^o = \cos(45^o - 30^o) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Aleshores, $\overline{AJ} = \left(2\sqrt{3}-1\right)R$.

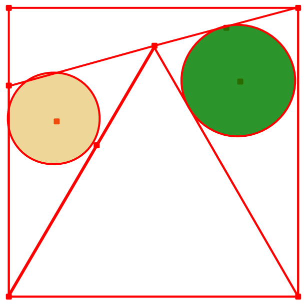
Siga $\overline{FT} = s$ el radi de la circumferència de centre F.



El radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ADJ}$ és:

Octubre 9-16

En la figura, el quadrat té costat c i el triangle és equilàter.
Calculeu la mesura dels radis de les dues circumferències.



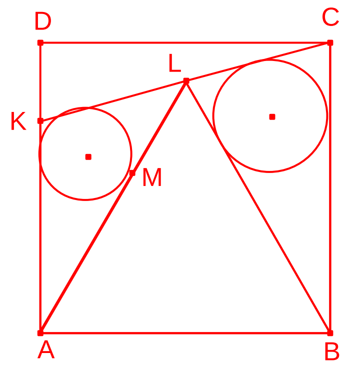
Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$.

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABL}$.

La recta CL talla el costat $\overline{AD}$ en el punt K.

Siga M la projecció de K sobre $\overline{AL}$.



$\angle LBC = \angle KAL = 30^{\circ}$.

$\angle CLC = \angle BCL = 75^{\circ}$.

$\angle KLA = 180^{\circ} - (60^{\circ} + 75^{\circ}) = 45^{\circ}$.

Siga $\overline{CL} = x$. Aplicant el teorema del cosinus al triagle $\overset{\Delta}{BCL}$:

$x^2 = c^2 + c^2 - 2c^2 \cos 30^{\circ}$.

$x^2 = \left(2 - \sqrt{3}\right)c^2$.

Siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{BCL}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCL}$ és:

$$S_{BCL} = \frac{1}{2}c^2 \sin 30^{\circ} = \frac{c + c + x}{2} r \, .$$

$$S_{BCL} = \frac{1}{2}c^2 \frac{1}{2} = \frac{2c + c\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} r \, .$$ Resolent l'equació:

$$r = \frac{1}{2\left(2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)} c \, .$$

Siga $y = \overline{KM} = \overline{LM}$.

$\overline{KL} = y\sqrt{2}$, $\overline{AK} = 2y$, $\overline{AM} = c - y$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMK}$:

$(2y)^2 = y^2 + (c - y)^2$. Resolent l'equació:

$$y = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} c \, .$$

Siga s el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ALK}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ALK}$ és:

$$S_{ALK} = \frac{1}{2}c\cdot\frac{-1+\sqrt{3}}{2}c = \frac{c+2y+y\sqrt{2}}{2}s.$$

$\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}c = \dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}s$. Resolent l'equació:

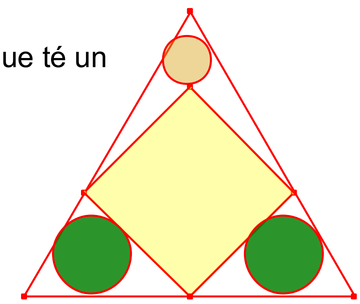
$$s = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{6}}c.$$

Octubre 10-17

En la figura, dins d'un triangle equilàter de costat c hi ha un quadrat que té un vèrtex en el put mig d'un costat i l'altre vèrtex en l'altura sobre aquest costat.

S'han dibuixat dos circumferències inscrites en dos triangles i una tercera tangent al triangle equilàter que passa pel vèrtex superior del quadrat.

Determineu el radi de les tres circumferències.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$.

Siga KLMN el quadrat.

$\angle NMB = 45^o$

Siga J la projecció de N sobre el costat $\overline{AB}$.

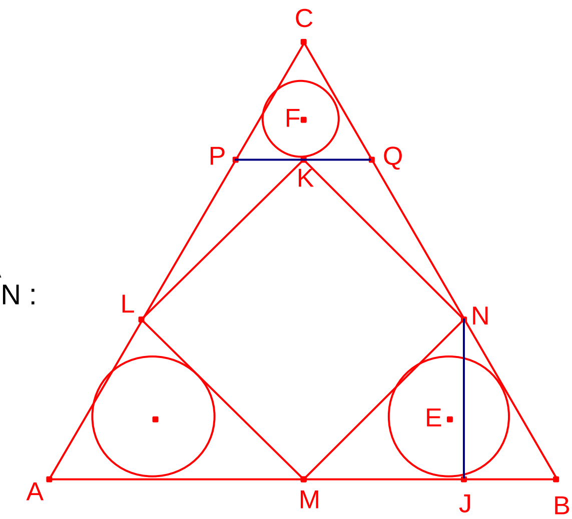
Siga $\overline{MJ} = \overline{NJ} = x$. $\overline{JB} = \dfrac{c}{2} - x$.

$\overline{BN} = 2\overline{JB} = c - 2x$. $\overline{MN} = x\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BJN}$:

$x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(c-2x)$. Resolent l'equació:

$$x = \frac{3-\sqrt{3}}{4}c.$$



Siga r el radi de la circumferència inscrita als triangles $\overset{\Delta}{MBN}$, $\overset{\Delta}{AML}$.

$$S_{MBN} = \frac{1}{2}\frac{c}{2}x = \frac{x\sqrt{2}+x+\frac{c}{2}}{2}r. \quad \frac{1}{2}\frac{c}{2}\frac{3-\sqrt{3}}{4}c = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{4}c\left(1+\sqrt{2}\right)+\frac{c}{2}}{2}r.$$

Resolent l'equació: $r = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2\left(5+3\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)}c$.

Siga $\overline{PQ}$ paral·lel al costat $\overline{AB}$. K és el punt mig del costat $\overline{PQ}$.

Els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{PQC}$ són semblants.

Siga s el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{PQC}$.

El radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$R = \frac{\sqrt{3}}{3}c.$$

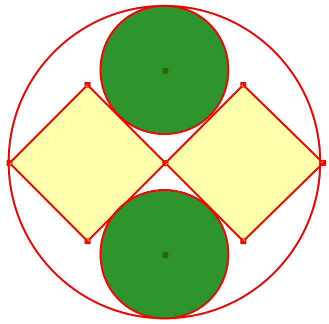
$\overline{MK} = \sqrt{2} \cdot \overline{MN} = 2x$. $\overline{CM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$, $\overline{CK} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c - 2x$.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{s}{\frac{\sqrt{3}}{3}c} = \frac{\overline{CK}}{\overline{CM}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}c - 2x}{\frac{\sqrt{3}}{2}c} \text{ . } s = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}c \text{ .}$$

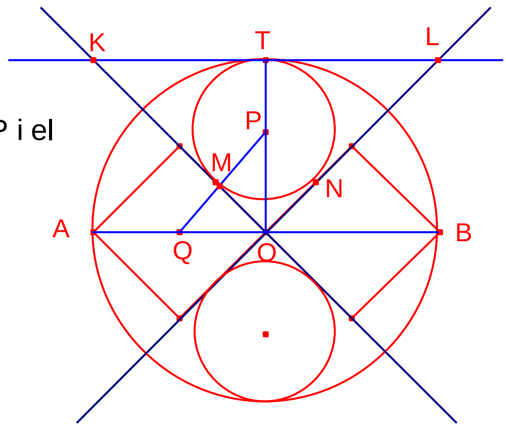
Octubre 11-12

En la figura, la circumferència exterior té radi R.
Els dos quadrats són iguals, el vèrtex comú és el centre de la circumferència i els oposats a aquest formen un diàmetre.
Determineu el radi de les dues circumferències tangents a als quadrats i a la circumferència exterior.



Solució:

Siga O el centre de la circumferència exterior i R el seu radi.
Siga P el centre de la circumferència superior i r el seu radi.
Siga Q el centre del quadrat de l'esquerra.
Siga M el punt de tangència de la circumferència de centre P i el quadrat de l'esquerra.
Siga N el punt de tangència de la circumferència de centre P i el quadrat de la dreta.
Siga T el punt de tangència de la circumferència exterior i la de centre P.
Siga la recta r tangent a la recta OT que passa pel punt T.
Siga K la intersecció de la recta r i la recta OM.
Siga L la intersecció de la recta r i la recta ON.



El triangle $\overset{\Delta}{OKL}$ és rectangle i isòsceles:

$\overline{OK} = \overline{OL} = R\sqrt{2}$.

$\overline{KL} = \sqrt{2} \cdot \overline{OM} = \dfrac{2}{8}R$.

$\overline{QM} = \overline{OM} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{OQ} = \dfrac{\sqrt{2}}{8}R$.

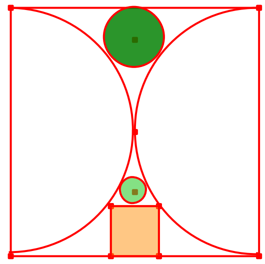
El radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKL}$

$$s = \frac{\overline{OK} + \overline{OL} - \overline{KL}}{2} \text{ .}$$

$$s = \frac{2R\sqrt{2} - 2R}{2} = \left(\sqrt{2} - 1\right)R \text{ .}$$

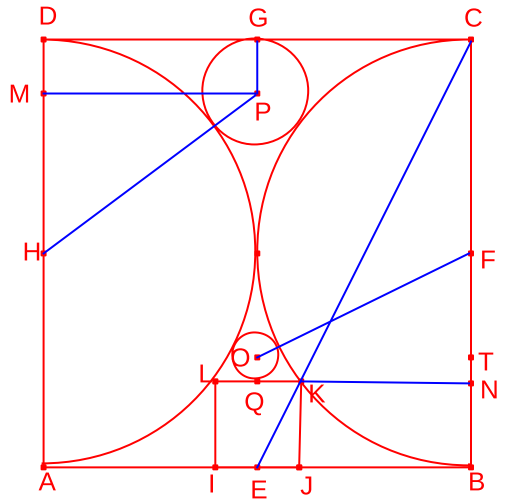
Octubre 13-20

En la figura el quadrat exterior té costat c.
Hi ha dues semicircumferències de diàmetres dos costats oposats.
Un quadrat que té els dos vèrtexs en les semicircumferències i els altres dos sobre un costat del quadrat.
Determineu el radi de les dues circumferències.



Solució:

Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = c$.
Siguen E, F, G H els punts migs dels costats del quadrat ABCD.



Siga IJKL el quadrat de costat $\overline{IJ} = x$.

Siga $\overline{PG} = r$ radi de la circumferència superior (P el centre).

Siga M la projecció de P sobre el costat $\overline{AD}$.

$\overline{PH} = \frac{c}{2} + r$, $\overline{HM} = \frac{c}{2} - r$, $\overline{PM} = \frac{c}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{HMP}$:

$\left(\frac{c}{2} + r\right)^2 = \left(\frac{c}{2} - r\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$. Resolent l'equació:

$r = \frac{1}{8}c$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EJK}$, $\overset{\Delta}{EBC}$ són semblants ja que $\frac{\overline{JK}}{\overline{EJ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CB}} = 2$.

Aleshores, E, K, C estan alineats.

Siga N la projecció de K sobre el costat $\overline{BC}$.

$\overline{KN} = \frac{c}{2} - \frac{x}{2}$, $\overline{FN} = \frac{c}{2} - x$, $\overline{FK} = \frac{c}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KNF}$:

$\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - \frac{x}{2}\right)^2$. Resolent l'equació:

$x = \frac{1}{5}c$.

Siga $\overline{OQ} = s$ radi de la circumferència inferior (O el centre).

Siga T la projecció de O sobre costat $\overline{BC}$.

$\overline{OF} = \frac{c}{2} + \frac{s}{2}$, $\overline{FT} = \frac{c}{2} - x - s = \frac{3c}{10} - s$, $\overline{OT} = \frac{c}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTF}$:

$\left(\frac{c}{2} + s\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{3c}{10} - s\right)^2$. Resolent l'equació:

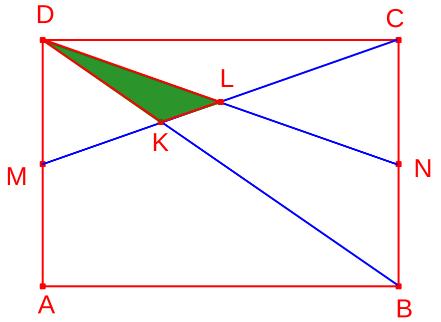
$s = \frac{9}{160}c$.

Octubre 14-15

Siga el rectangle ABCD.

Siguen M i N els punts migs dels costats $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, respectivament.

Determineu la proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{DKL}$ i el rectangle ABCD.



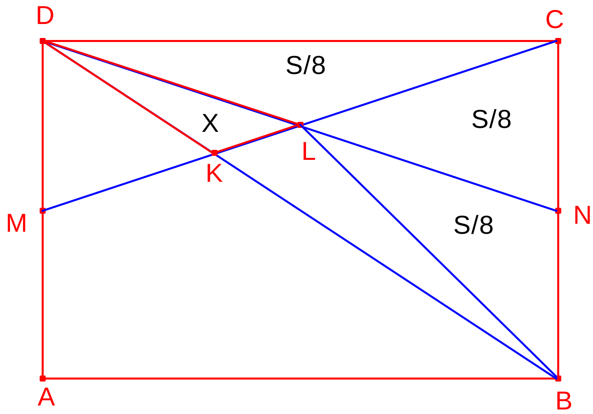
Solució 1:

Siga S l'àrea del rectangle ABCD.

L és el punt mig dels segments $\overline{CM}$, $\overline{BN}$.

Siga X l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DKL}$.

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.



$S_{DCN} = \frac{1}{4}S$.

$S_{DLC} = S_{LNC} = \frac{1}{2}S_{DCN} = \frac{1}{8}S$.

$S_{BNL} = S_{LNC} = \frac{1}{8}S$.

Els triangles $\overset{\Delta}{DLM}$, $\overset{\Delta}{NCL}$ són iguals, aleshores: $S_{DMK} = \frac{1}{8}S - X$.

Els triangles $\overset{\Delta}{DMK}$, $\overset{\Delta}{NCL}$ són semblants i de raó $1:2$.

Aleshores, $\overline{BK} = 2\overline{DK}$.

$S_{BKL} = 2 \cdot S_{DKL} = 2X$.

$S_{BCK} = 4 \cdot S_{DMK}$.

$\frac{1}{8}S + \frac{1}{8}S + 2X = 4\left(\frac{1}{8}S - X\right)$. Resolent l'equació: $X = \frac{1}{24}S$. Aleshores, $\frac{S_{DKL}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{24}$.

Solució 2:

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

$S_{DCN} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

$S_{DLC} = S_{LNC} = \frac{1}{2}S_{DCN} = \frac{1}{8}S_{ABCD}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{DLM}$, $\overset{\Delta}{NCL}$ són iguals, aleshores: $\overline{CL} = \overline{ML}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{DMK}$, $\overset{\Delta}{NCL}$ són semblants i de raó $1:2$.

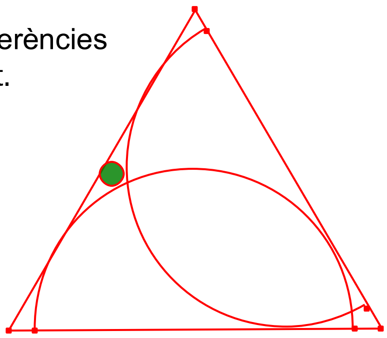
Aleshores, $\overline{CK} = 2 \cdot \overline{MK}$.

$\overline{CL} + \overline{KL} = 2 \cdot \left(\overline{CL} - \overline{KL}\right)$.

$\overline{KL} = \frac{1}{3}\overline{CL}$. $\frac{S_{DKL}}{S_{CDL}} = \frac{1}{3}$, $\frac{S_{DKL}}{\frac{1}{8}S_{ABCD}} = \frac{1}{3}$. Aleshores, $\frac{S_{DKL}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{24}$.

Octubre 18-19

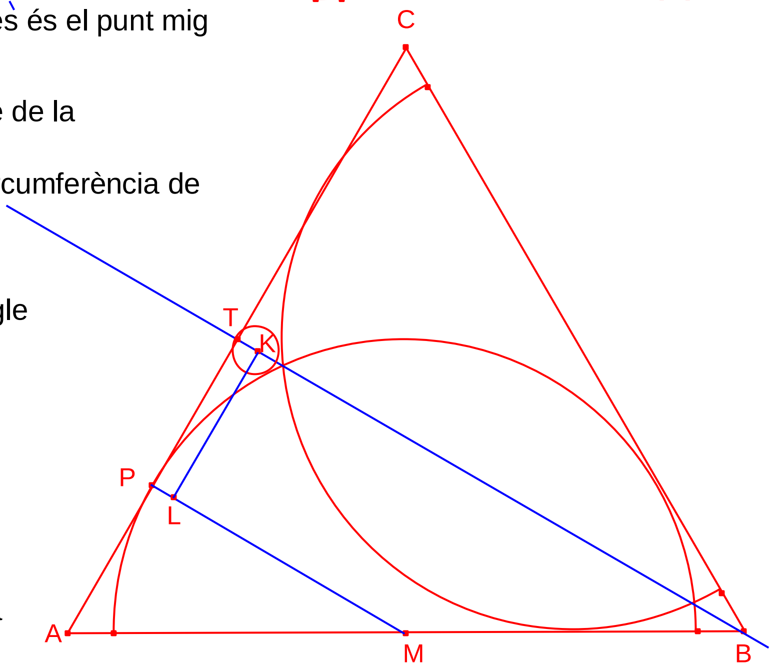
En un triangle equilàter de costat c s'ha inscrit dues semicircumferències tangents a dos costats i que tenen el diàmetre en el tercer costat.
Una circumferència es tangent exterior a les dues semicircumferències i a un costat del triangle (veure figura).
Calculeu el radi de la circumferència.



Solució:

Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle equilàter de costat $\overline{AB} = c$.
El centre de les dues semicircumferències és el punt mig dels costats $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, respectivament.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$, centre de la semicircumferència.
Siga P el punt de tangència de la semicircumferència de centre M i el costat $\overline{AC}$.
Siga $\overline{MP} = r$ el seu radi.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APM}$:

$$\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{AM} = \frac{c}{4}, \ r = \frac{\sqrt{3}}{4}c.$$



Les dues semicircumferències són simètriques respecte de la mediatriu del costat $\overline{AC}$.
Aleshores, la circumferència és simètrica respecte de la mediatriu anterior.
El punt de tangència T de la circumferència i el costat $\overline{AC}$ és el punt mig T del costat.
Siga K el centre de la circumferència i $\overline{KT} = s$ el seu radi.
Siga L la projecció de K sobre el segment $\overline{MP}$.

$$\overline{KL} = \overline{PT} = \overline{AT} - \overline{AP} = \frac{c}{4}.$$

$$\overline{MK} = r + s, \ \overline{ML} = r - s.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MLK}$:

$$(r+s)^2 = \left(\frac{c}{4}\right)^2 + (r-s)^2.$$

$$4rs = \frac{1}{16}c^2.$$

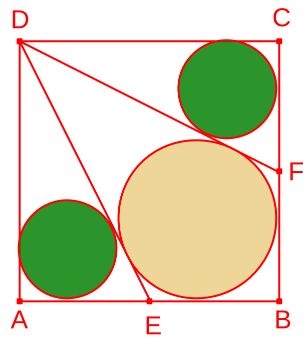
$$s = \frac{1}{64}c^2\frac{1}{r} = \frac{1}{64}c\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{48}c.$$

Octubre 21-22

Siga ABCD un quadrat de costat c.

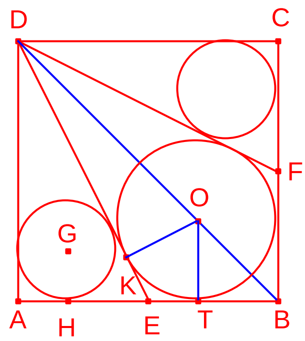
Siguen E i F els punts migs dels costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, respectivament.

Determineu el radi de les circumferències inscrites als triangles $\overset{\Delta}{AED}$, $\overset{\Delta}{FCD}$ i el quadrilàter DEBF.



Solució:

Siga G el centre de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AED}$ i $\overline{GH} = r$ el seu radi.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AED}$:

$$\overline{DE} = \frac{\sqrt{5}}{2}c.$$

El radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{AED}$ és:

$$r = \frac{\overline{AE} + \overline{AD} - \overline{DE}}{2} = \frac{\frac{c}{2} + c - \frac{\sqrt{5}}{2}c}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}c.$$

Siguen T i K punts de tangència de la circumferència inscrita al quadrilàter DEBF amb els costats $\overline{BE}$, $\overline{DE}$, respectivament.

Siga O el centre de la circumferència i $s = \overline{OT} = \overline{OK}$ el radi.

$\overline{BD} = c\sqrt{2}$, $\overline{BO} = s\sqrt{2}$.

$\overline{DO} = \overline{BD} - \overline{BO} = (c-s)\sqrt{2}$.

Siga $\alpha = \angle ADE$, aleshores, $\angle ODK = 45^{o} - \alpha$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ODK}$:

$$\sin(45^{o} - \alpha) = \frac{s}{(c-s)\sqrt{2}}.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha = \frac{s}{(c-s)\sqrt{2}}.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{s}{(c-s)\sqrt{2}}.$$

Simplificant:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{s}{(c-s)}.$$

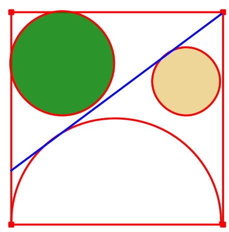
Resolent l'equació:

$$s = \frac{\sqrt{5}-1}{4}c.$$

Octubre 23

En la figura, el quadrat té costat c.

Determineu el radi de les dues circumferències.



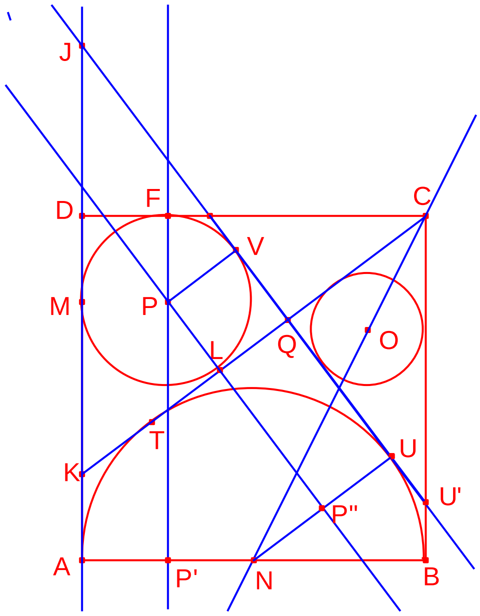
Solució:

Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = c$.

Siga O el centre de la circumferència menuda.

Siga P el centre de la circumferència gran. $\overline{QV} = \overline{QL} = x$. Siga $\alpha = \angle OCB$.
La recta CO és bisectriu de l'angle $\angle KCB$, i a més a més CK, i CB són tangents a la semicircumferència, aleshores, CO passa pel punt mig N del costat $\overline{AB}$.

$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}$. Aleshores, $\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{4}{3}$.



$\angle DKC = 2\alpha$. $\frac{\overline{CD}}{\overline{DK}} = \mathrm{tg}2\alpha = \frac{4}{3}$. Aleshores, $\overline{DK} = \frac{3}{4}c$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDK}$:
$\overline{DK} = \frac{5}{4}c$.

Siga r el radi de la circumferència de centre P.

El radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDK}$ és:

$$r = \overline{DM} = \frac{\overline{DK} + \overline{CD} - \overline{CK}}{2} = \frac{\frac{3}{4}c + c - \frac{5}{4}c}{2} = \frac{1}{4}c.$$

$\overline{KM} = \overline{KL} = \frac{3}{4}c - \frac{1}{4}c = \frac{1}{2}a$.

$\overline{CT} = \overline{CBL} = a$. $\overline{KL} + \overline{CT} = \overline{CK} + \overline{TL}$. $\frac{3}{2}c = \frac{5}{4}c + \overline{TL}$. Aleshores,

$\overline{TL} = \frac{1}{4}c$.

Siga P' la projecció de P sobre el costat $\overline{AB}$. Siga P" la projecció de P sobre $\overline{NU}$.

$\overline{AP'} = c - r = \frac{3}{4}c$, $\overline{P'N} = \frac{c}{2} - r = \frac{1}{4}c$, $\overline{NP''} = \frac{c}{2} - r = \frac{1}{4}c$.

Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PP'N}$, $\overset{\Delta}{PP''N}$ són iguals, aleshores:

$\overline{UV} = \overline{PP''} = \overline{PP'} = \frac{3}{4}c$.

Siga Q la intersecció de les tangents CK i UV. Siga $\overline{QV} = \overline{QL} = x$:

$\overline{QT} = \overline{QV} = x + \frac{1}{4}c$. $\overline{UV} = \frac{3}{4}c = 2x + \frac{1}{4}c$. Resolent l'equació: $\overline{QV} = \overline{QL} = x = \frac{1}{4}c$.

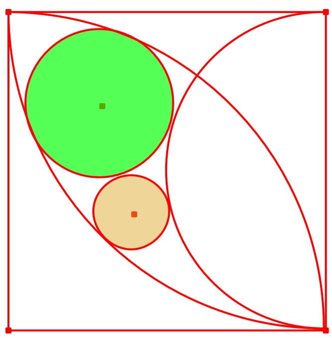
$\overline{QK} = \frac{3}{4}c$, $\overline{QC} = \frac{2}{4}c$.

Siga J la intersecció de la tangent UV i la recta AD.

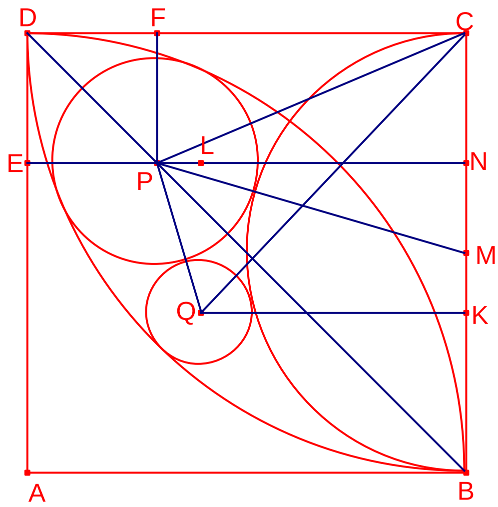
Els triangles $\overset{\Delta}{KQJ}$, $\overset{\Delta}{CQU'}$ són semblants i de raó $\overline{QK} : \overline{QC} = \frac{3}{4}c : \frac{2}{4}c = 3 : 2$.

Octubre 24/31-25

En un quadrat de costat c s'han dibuixat dos quadrant de radi el costat i una semicircumferència de diàmetre un costat.
Dos circumferències tangents, cadascuna d'elles, és tangent als quadrants i a la semicircumferència.
Determineu el radi de les circumferències.



Solució:



Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = c$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Siga P el centre de la circumferència major i r el seu radi.

P pertany a la diagonal $\overline{BD}$.

Siga E la projecció de P sobre el costat $\overline{AD}$.

Siga F la projecció de P sobre el costat $\overline{CD}$.

$\overline{PE} = \overline{PF} = x$.

Siga N la projecció de P sobre el costat $\overline{BC}$.

$\overline{PN} = c - x$, $\overline{CP} = c - r$, $\overline{CN} = x$, $\overline{PM} = \dfrac{c}{2} + r$, $\overline{MN} = \dfrac{c}{2} - x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PNC}$:

$$(c-r)^2 = x^2 + (c-x)^2 \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PNM}$:

$$\left(\frac{c}{2} + r\right)^2 = \left(\frac{c}{2} - x\right)^2 + (c-x)^2 \qquad (2)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

$\begin{cases} r^2 - 2cr = 2x^2 - 2cx \\ r^2 + cr = 2x^2 - 3cx + c^2 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{17} \\ r = \dfrac{4}{17} \end{cases}.$$

Siga P el centre de la circumferència menor i s el seu radi.

Siga K la projecció de Q sobre el costat $\overline{BC}$.

Siga L la projecció de Q sobre el segment $\overline{PN}$.

Siguen $\overline{QL} = y$, $\overline{QK} = z$.

$\overline{PQ} = r + s$, $\overline{PL} = c - x - z$, $\overline{MQ} = \dfrac{c}{2} + s$, $\overline{MK} = y - \left(\dfrac{c}{2} - x\right)$, $\overline{CQ} = c - s$, $\overline{CK} = y + x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QLP}$:

$$(r+s)^2 = y^2 + (c-x-z)^2 \qquad (3)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QKM}$:

$$\left(\frac{c}{2} + s\right)^2 = z^2 + \left(y - \frac{c}{2} + x\right)^2 \qquad (4)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QKC}$:

$$(c-s)^2 = z^2 + (y+x)^2 \qquad (5)$$

Resolent el sistema format per les expressions (3) (4) (5):

$$\begin{cases} y = \dfrac{64}{187} \\ z = \dfrac{20}{33} \\ s = \dfrac{4}{33} \end{cases}.$$

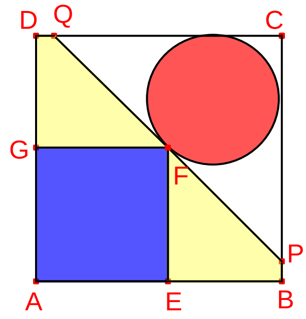
Octubre 26-27

En la figura ABCD i AEFG són quadrats.

La circumferència és tangent als costats $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ i passa pel punt F.

$\angle QPC = 45^o$, i la recta PQ és tangent a la circumferència.

Si el costat del quadrat AEFG és igual al diàmetre 2r de la circumferència, determineu la mesura del costat ABCD.



Solució:

$\overline{AE} = \overline{EF} = 2r$

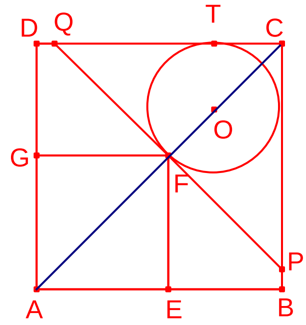
Siga O el centre de la circumferència.

Siga T el punt de tangència de la circumferència i el costat $\overline{CD}$.

$\overline{OF} = \overline{OT} = \overline{CT} = r$.

F és el punt mig del segment $\overline{PQ}$.

Aleshores, el centre O pertany a la diagonal $\overline{AC}$ del quadrat ABCD.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEF}$:

$\overline{AF} = 2\sqrt{2}\,r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CTO}$:

$\overline{OC} = \sqrt{2}\,r$.

Siga $\overline{AB} = c$ costat del quadrat ABCD.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC} = \sqrt{2}\,c$

$\overline{AC} = \overline{AF} + \overline{OF} + \overline{OC}$.

$\sqrt{2}\,c = 2\sqrt{2}\,r + r + \sqrt{2}\,r$.

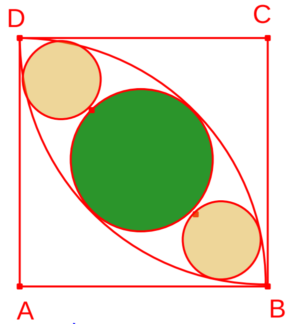
Resolent l'equació:

$$c = \frac{1+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} r = \frac{6+\sqrt{2}}{2} r.$$

Octubre 28

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$.

Determineu el radi de les tres circumferències de la figura.

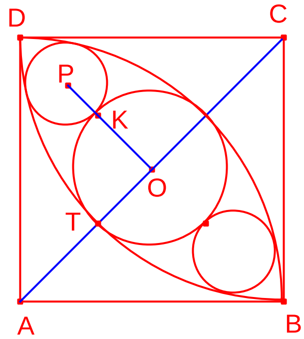


Solució:

Siga O el centre del quadrat ABCD i centre de la circumferència.

Siga T el punt de tangència de la circumferència i el quadrat de centre C.

$\overline{CT} = c$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{BOC}$:

$\overline{CO} = \overline{AO} = \frac{\sqrt{2}}{2} c$.

El radi de la circumferència és:

$$r=\overline{OT}=\overline{CT}-\overline{CO}=c-\frac{\sqrt{2}}{2}c=\frac{2-\sqrt{2}}{2}c\,.$$

Siga P el centre de la circumferència superior.
Siga K el punt de tangència de la circumferència central i la superior.
Siga $s=\overline{PK}$ radi de la circumferència superior.

$$\overline{OP}=r+s=s+\frac{2-\sqrt{2}}{2}c\,.$$

$$\overline{AP}=c-s\,.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOP}$

$$(c-s)^2=\left(s+\frac{2-\sqrt{2}}{2}c\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2.$$

$\left(4-\sqrt{2}\right)cs=\left(\sqrt{2}-1\right)c^2$ Resolent l'equació:

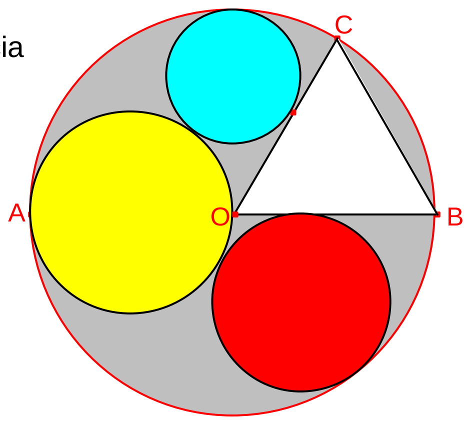
$$s=\frac{-2+3\sqrt{2}}{14}c\,.$$

Octubre 29-30

1635.- En la figura, $\overline{AB}=2r$ és diàmetre de la circumferència de centre O.

$\overset{\Delta}{OBC}$ és un triangle equilàter.

Determineu el radi de les altres tres circumferències.



Solució:

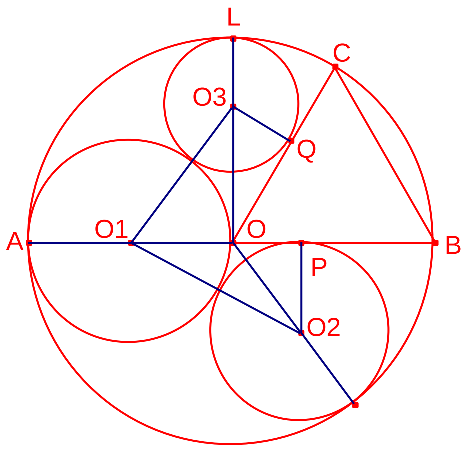
Siga O_1 la circumferència de diàmetre $\overline{AO}$ el seu radi és

$$\overline{O_1A}=\overline{O_1O}=\frac{1}{2}r\,.$$

Siga P el punt de tangència de la circumferència de centre O_2 i el triangle $\overset{\Delta}{OBC}$.

Siga $\overline{O_2P}=r_2$ el seu radi.

$\overline{OO_2}=r-r_2$. $\overline{O_1O_2}=\frac{1}{2}r+r_2$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{O_1PO_2}$:

$$\overline{OP}^2=(r-r_2)^2-r_2^2 \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPO_2}$:

$$\left(\frac{1}{2}r+r_2\right)^2=\left(\frac{1}{2}r+\overline{OP}\right)^2+r_2^2 \qquad (2)$$

$$r\cdot r_2=\overline{OP}^2+r\overline{OP} \qquad (3)$$

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (3):

$$r\cdot r_2=r^2-2r\cdot r_2+r\sqrt{(r-r_2)^2-r_2^2} \qquad (4)$$

$$3r_2-r=\sqrt{r^2-2r\cdot r_2} \qquad (5)$$

Resolent l'equació:

$r_2 = \frac{4}{9} r$.

Siga Q el punt de tangència de la circumferència de centre O_3 i el triangle $\overset{\Delta}{OBC}$.

Siga $\overline{O_3P} = r_3$ el seu radi.

$\overline{OO_3} = r - r_3$

$\angle QOO_3 = 30^o$.

$\frac{\overline{O_3P}}{\overline{OO_3}} = \frac{1}{2}$, $\frac{r_3}{r - r_3} = \frac{1}{2}$.

$r_3 = \frac{1}{3} r$.