SOLUCIONS DESEMBRE 2016

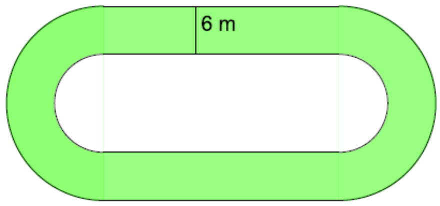
Solucions extretes del llibre:

XVII CONCURSO DE PRIMAVERA 2013

Obtenible en http://www.concursoprimavera.es#libros

Autors: Col·lectiu "Concurso de primavera". Comunitat de Madrid

Desembre 1-2: En la pista d'atletisme de la figura, Laia, si corre "per fora" tarda sis segons més que si "corre por dins", en donar una volta completa corrien a una mateixa velocitat. Quina és esta?



Nivell: A partir de 2ESO.

Solució: En una volta completa, la diferència entre la distancia recorreguda per fora i la recorreguda por dins és ($2\pi(R+6) - 2\pi R =$) 12π m. Si tarda 6 segons més en recorre la volta por fora, porta una velocitat de 2π m/s

Desembre 3: Aitana ha tardat 20 minuts menys que Laia en completar una carrera. Si Laia corre a 5 km/h menys que Aitana, què distancia tenia la carrera?

Nivell: A partir de 2ESO.

Solució: Falten dades per a determinar la solució del problema. Si t_A, t_L, v_A, y v_L son els temps i velocitats emprats per Aitana i Laia, tindrem:

$$\left.\begin{array}{l} t_A = t_L - \dfrac{1}{3} \\ v_L = v_A - 5 \end{array}\right\} \Rightarrow v_A \cdot t_A = v_L \cdot t_L \Rightarrow v_A \cdot t_A = (v_A - 5) \cdot \left(t_A + \frac{1}{3}\right) \Rightarrow v_A = 15t_A + 5$$

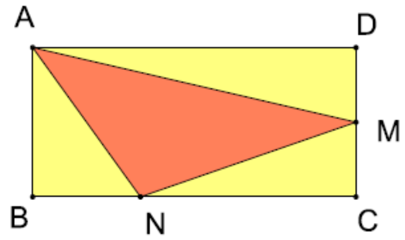
Si, per exemple, t_A = 1 hora, v_A = 20 i l'espai recorregut és de 20 km.

Desembre 4: Troba els nombres de dues xifres que són el triple del producte de les seues xifres.

Nivell: A partir de 4ESO. Preparació OME i OMS.

Solució: Devem resoldre 10·a + b = 3·a·b, sent a i b dígits amb a no nul. Tindrem: b = a(3b – 10). Per tant, b deu ser major que 3 i menor que 7. Per a b= 4 s'obté a = 2. Per a b = 5 s'obté a = 1 i per a b = 6 no hi ha solució per a a. Per tant, sols hi ha dos nombres que compleixen l'enunciat: el 25 i el 15.

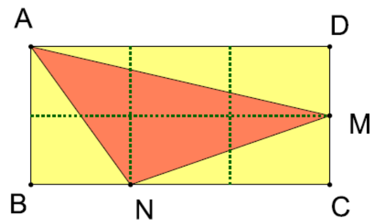
Desembre 5, 6: El rectangle ABCD té àrea 48; M es el punt mitjà del costat DC i 3·BN = BC. Quina és l'àrea del triangle △ANM?



Nivell: A partir de 2ESO.

Solució:

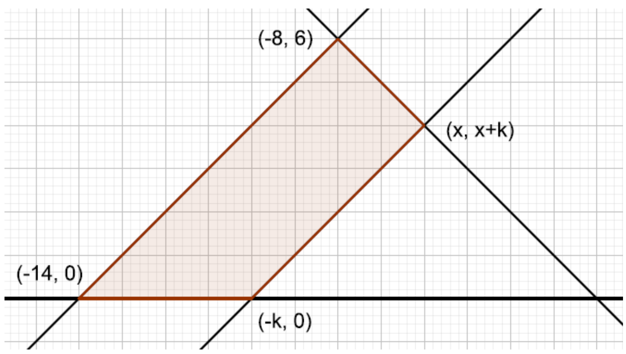
$A_{\Delta \mathrm{ANB}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 48 = 8;\ \ A_{\Delta ADM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 48 = 12;$
$A_{\Delta NMC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} 348 = 8;\ \ A_{\Delta ANM} = 48 - (8 + 12 + 8) = 20\cdot$



Desembre 7: Les gràfiques de y=-|x+8|+6, y=0 i y=x+k, determinen en el segon quadrant un trapezi d'àrea 20. Trobar k

Nivell: A partir de 4ESO. Preparació OMS

Solució: El trapezi es pot obtenir com diferència de dos triangles, el gran de base 12 i alçaria 6 i el petit de base k – 2 i alçaria $\frac{k}{2} - 1$ (alçaria del punt de intersecció de les rectes y = x + k, y = -x – 2). Així, l'àrea del trapezi és:



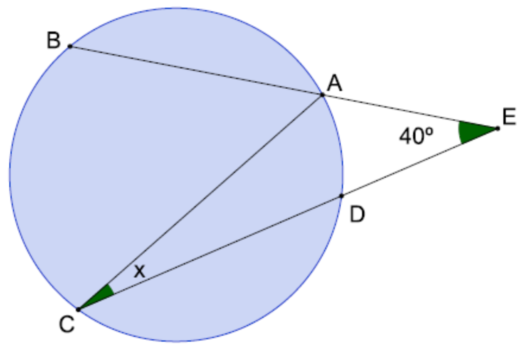
$$36 - \frac{(\mathrm{k} - 2)^2}{4} = 20 \ \Rightarrow\ \mathrm{k} = 10$$

Desembre 8: Seleccionem al atzar dos nombres reals en [-20; 10], quina és la probabilitat de què el seu producte siga positiu?

Nivell: A partir de 4ESO. Preparació OMS.

Solució: El producte és positiu si els dos nombres són positius o negatius. La probabilitat de que els dos siguen positius es 1/3·1/3. La probabilitat de que els dos siguen negatius és 2/3·2/3. Per tant la probabilitat sol·licitada és: 4/9 + 1/9 = 5/9

Desembre 9, 10: En la figura ∠E = 40° i els arcs AB, BC y CD són de igual longitud. Trobar l'angle x



Nivell: A partir de 4ESO.

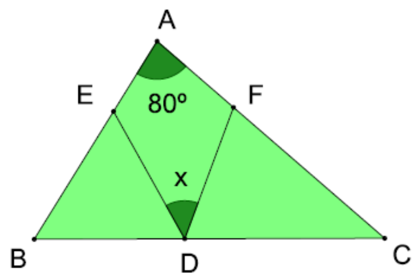
Solució: Com l'angle exterior mesura 40°, la diferència entre els arcs BC i AD es de 80°. Per un altre costat 3 BC + AD = 360°. Aixina que 240° + 4 AD = 360°. Tenim aleshores que AD = 2x = 30°

Desembre 11: Laia elegeix 6 primers menors que 20: A, B, C, D, E y F. Observa que: A+B=C+D=E+F. Quant val E+F?

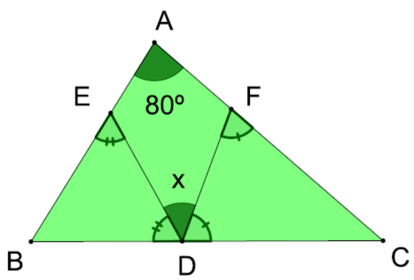
Nivell: A partir de 1ESO.

Solució: Els nombres primers menors que 20 són: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19. Manipulant-los tenim: 5 + 19 = 7 + 17 = 11 + 13, per tant E + F = 24

Desembre 12, 19: En el triangle △ABC es té que ∠A = 80°; els punts E, D i F (en els costats BA, BC i AC, respectivament), compleixen que BE = BD; CF = CD. Trobar l'angle x



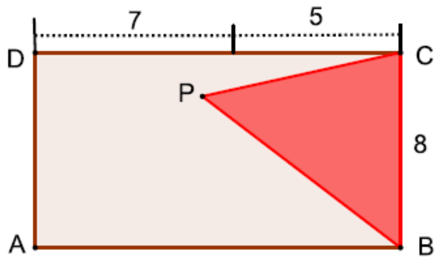
Nivell: A partir de 2ESO.



Solució: Els angles B i C sumen 100°. Com BE = BD (CF = CD) ⇒ ΔBED (ΔCDF) és isòsceles. D'aquí: ∠B + 2∠E = 180° (∠C + 2∠F = 180°). Sumant ambdós igualtats tenim: 100° + 2 (∠E + ∠F) =360° ⇒ ∠E + ∠F = 130°. I com els tres angles: ∠E, ∠F y x formen un angle pla, tindrem que x = 50°

Desembre 13: En el rectangle ABCD, de costats AB=12 i BC=8, elegim el punt P a l'atzar. Quina és la probabilitat que el triangle ΔPBC tinga l'àrea major que 20?

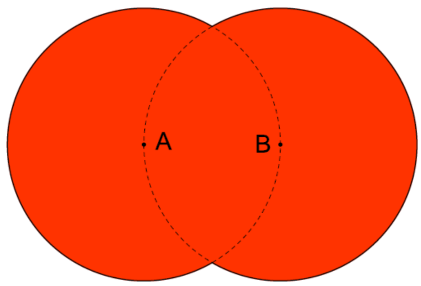
Nivell: A partir de 4ESO. Preparació OMS.



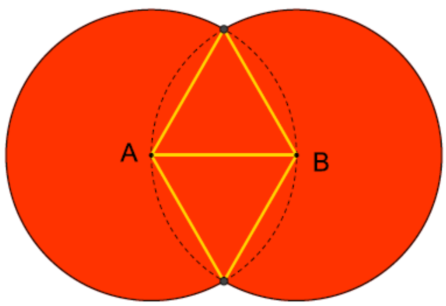
Solució: Per a que el triangle ΔPBC tinga àrea major que 20, deu tenir alçaria major que 5, es dir deu escollir-se P en el rectangle de base 7 i alçaria 8. Per tant, la probabilitat sol·licitada és:

$$\frac{7 \cdot 8}{12 \cdot 8} = \frac{7}{12}$$

Desembre 14, 15: En la figura s'aprecien dues circumferències de perímetre 6, col·locades de tal manera que cada una passa pel centre de l'altra. Quin perímetre té la figura pintada de roig?



Nivell: A partir de 4ESO. Preparació OMS.



Solució: Al perímetre de dues circumferències li hem de llevar el perímetre dels arcs de traç discontinu. Es formen dos triangles equilàters de costat el radi de cada circumferència, i per tant l'arc de traç discontinu correspon a un arc de 120°. El perímetre de cada arc és (6/3 =) 2. Per tant, el perímetre de la figura pintada de roig és (12 – 4 =) 8

Desembre 16: Si b > 1, x > 0 i: $(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0$, trobar x

Nivell: Primer de batxillerat.

Solució: Si $(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0$, aleshores $(2x)^{\log_b 2} = (3x)^{\log_b 3}$ i agafant logaritmes $\log_b 2 \cdot \log(2x) = \log_b 3 \cdot \log(3x)$. Dividint per $\log_b 10$, canviem els logaritmes en base b a logaritmes decimals, i així tenim: $\log 2 \cdot (\log 2 + \log x) = \log 3 \cdot (\log 3 + \log x) \Rightarrow \log x = -\log 2 - \log 3 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$

Desembre 17: Si P, Q y R son dígits amb:

		P	**Q**	**P**	**Q**
x			**R**	**R**	**R**
6	**3**	**9**	**0**	**2**	**7**

trobar P, Q i R

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Tenim PQPQ·RRR = (100·PQ + PQ)·(100·R + 10·R + R) = (101·PQ)·(111·R) = 11211·PQ·R = 639027 $\Rightarrow \mathrm{PQ} \cdot \mathrm{R} = \frac{639027}{11211} = 57 = 19 \cdot 3 = 57 \cdot 1$. Per tant, PQ =19 i R = 3 o PQ = 57 i R = 1.

Desembre 18: Trobar el residu de dividir 7^{25} entre 9

Nivell: A partir de 4ESO. Preparació OMS y OME.

Solució: Com: 7 = 7(9); 7^2 = 49(9) = 4(9); 7^3= 7^2(9)·7(9) = 4(9)·7(9) = 28(9) = 1(9), tindrem ja format el cicle:

$$7, 7^4, 7^7,\ldots\ldots=7(9)$$

$$7^2, 7^5, 7^8,\ldots\ldots=4(9)$$

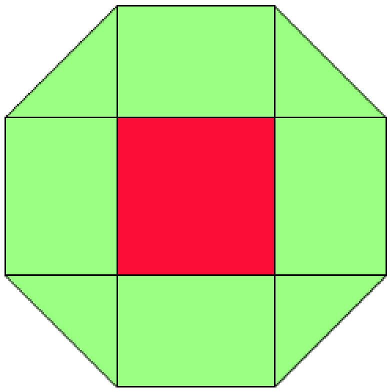
$$7^3, 7^6, 7^9,\ldots\ldots=1(9)$$

En altres paraules:

$$7^n = \begin{cases} 7(9) & \Leftrightarrow \quad n = 1, 4, 7, \ldots. \Leftrightarrow n = 1(3) \\ 4(9) & \Leftrightarrow \quad n = 2, 5, 8, \ldots. \Leftrightarrow n = 2(3) \\ 1(9) & \Leftrightarrow \quad n = 3, 6, 9, \ldots. \Leftrightarrow n = 0(3) \end{cases}$$

Com 25 =1(3), 7^{25} = 7(9), es dir el residu de dividir 7^{25} entre 9 es 7.

Desembre 20, 21: En un concurs de dards, la diana té forma de octògon regular. Si el dard pot caure en qualsevol punt de la diana amb igual probabilitat, quina és la probabilitat que caiga en el quadrat pintat de roig?



Nivell: A partir de 4ESO. Preparació OMS

Solució: Hem de dividir l'àrea del quadrat de color roig entre l'àrea del octògon. L'àrea del quadrat roig és l^2, degut a que té el mateix costat que el octògon. L'àrea del octògon és $\frac{2l^2}{\sqrt{2}-1}$.

Por tant, la probabilitat sol·licitada és: $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Desembre 22: Siguen M, p i q positius amb q < 100. Què deu complir-se per a que si augmentem M un p% i després ho disminuïm un q% tingam encara una quantitat major que M?

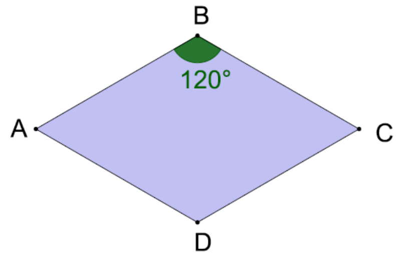
Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Quan M creix un p% i després decreix un q%, passa a valdre $\mathrm{M} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{p}}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{\mathrm{q}}{100}\right)$.

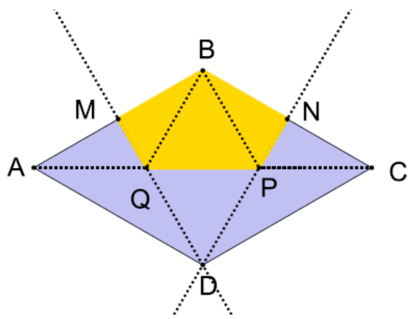
Per a que aquesta quantitat siga major que M deu ser:

$$\left(1+\frac{\mathrm{p}}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{\mathrm{q}}{100}\right)>1 \quad\Leftrightarrow\quad 1+\frac{\mathrm{p}-\mathrm{q}}{100}-\frac{\mathrm{pq}}{10000}>1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\mathrm{p}}{100}\left(1-\frac{\mathrm{q}}{100}\right)>\frac{\mathrm{q}}{100}$$
$$\Leftrightarrow\quad \mathrm{p}>\frac{100\mathrm{q}}{100-\mathrm{q}}$$

Desembre 23, 24: En el rombe ABCD, de costat 2, el angle B mesura 120°. Quina és l'àrea de la regió interior del rombe formada per els punts que estan més prop del vèrtex B que de qualsevol altre vèrtex?



Nivell: Preparació OME.



Solució: Les mediatrius dels segments AB i BC junt amb el segment QP determinen la zona dels punts que estan més prop del vèrtex B que de qualsevol altre vèrtex. Devem trobar l'àrea del pentàgon BMQPN. Com l'angle en B es de 120°, el rombe se composa de dos triangles equilàters de costat 2 i alçaria $\sqrt{3}$. Les diagonals del rombe són 2 i $2\sqrt{3}$ i la seua àrea és $2\sqrt{3}$. Com P i Q son els baricentres dels triangles equilàters ΔBCD y ΔABD, PC = PD = PQ = $\frac{1}{3}$ AC = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

L'àrea del triangle ΔQPD es la tercera part de l'àrea del triangle ΔACD, que es la sexta part de l'àrea del rombe ABCD, es dir:

$$\mathrm{A}_{\Delta\mathrm{QPD}}=\frac{1}{6}2\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Per últim, l'àrea del pentàgon BMQPN es el doble de l'àrea del triangle ΔQPD, es dir $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Desembre 25: Si a i b son naturals amb (a + 2b)·(a – b)=10, Quant val (2a – b)?

Nivell: A partir de 2ESO.

Solució: De (a + 2b)·(a – b)=10 sent a i b naturals caben dues opcions, per la unicitat de la descomposició factorial en primers:

1.- $\left.\begin{array}{r} a+2b=10 \\ a-b=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \; a=4, b=3$

2.- $\left.\begin{aligned} a+2b&=5 \\ a-b&=2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ a=3, b=1$

I en ambdós casos 2·a – b = 5

Desembre 26, 27: Resoldre:

$$\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x}+\log_2 x+\log_4 x^2+\log_8 x^3+\log_{16} x^4=40$$

Nivell: Batxillerat. Preparació OME.

Solució: Observem que

$$\log_{2^n}x^n=\frac{\log_2 x^n}{\log_2 2^n}=\frac{n\log_2 x}{n}=\log_2 x$$

Així doncs:

$$\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x}+\log_2 x+\log_4 x^2+\log_8 x^3+\log_{16} x^4=40 \ \Rightarrow$$
$$\log_2 x+\log_2 x+\log_2 x+\log_2 x+\log_2 x=40 \quad \Rightarrow$$
$$5\log_2 x=40 \quad \Rightarrow \quad \log_2 x=8 \quad \Rightarrow \quad x=2^8=256$$

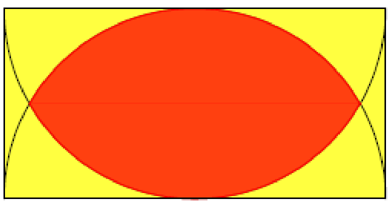
Desembre 28: Dos triangles isòsceles distints, tenen igual àrea. En ambdós, els seus costats iguals mesuren 26 cm. Si la base d'un mesura 48 cm, trobar la base de l'altre.

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: La alçaria del triangle la base del qual mesura 48 cm es: $\sqrt{26^2-24^2}=10$, i la seua àrea és (48·10/2=) 240 cm^2. Com els dos triangles tenen igual àrea, la del segon podem expressar-la com: $\frac{b\cdot h}{2}=240$, i d'ací $b=\frac{480}{h}$. Com $h=\sqrt{26^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2}$, l'expressió anterior queda $b=\frac{480}{\sqrt{26^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2}}$.

D'ací es dedueix $b\sqrt{676-\left(\frac{b}{2}\right)^2}=480 \ \Rightarrow \ b^2\cdot\left(676-\frac{b^2}{4}\right)=480^2$. Operant queda $b^4-676\cdot 4\cdot b^2+230400\cdot 4=0$, que porta a b = 20

Desembre 29, 30: La base del rectangle de la figura mesura 4 i la seua alçaria 2, quina és l'àrea de la regió roja generada por dues semicircumferències amb centres en els costats llargs del rectangle?



Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: L'àrea de la regió roja es el doble de l'àrea d'un segment circular d'angle central 120° en un cercle de radi R = 2. Com $A_{segment}=A_{sector}-A_{triangle}$, tindrem:

$$A_{segment}=\frac{120}{360}4\pi-\frac{b\cdot h}{2}=\frac{4\pi}{3}-\frac{2\sqrt{3}\cdot 1}{2}=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$$

D’aquí, que l’àrea sol·licitada siga $A = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$

Desembre 31: Resoldre:

$$\sqrt{5|x| + 8} = \sqrt{x^2 - 16}$$

Nivell: 4ESO. Preparació OMS.

Solució: L’equació $\sqrt{5|x| + 8} = \sqrt{x^2 - 16}$ és equivalent a $x^2 - 5|x| - 24 = 0$. Si $x > 0$, l’equació és $x^2 - 5x - 24 = 0$, amb solucions $x = 8$ i $x = -3$, no sent vàlida aquesta última perquè no és major que 0. Si $x < 0$, l’equació és $x^2 + 5x - 24 = 0$, amb solucions $x = -8$ y $x = 3$, no sent aquesta última vàlida perquè no es menor que 0. Les solucions vàlides són 8 y – 8.