

SOLUCIONS ABRIL 2016

Autor: Ricard Peiró i Estruch

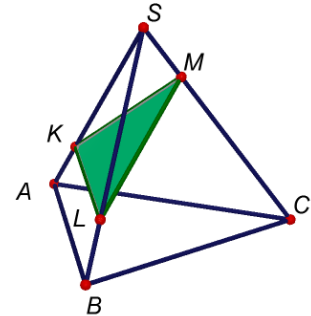
Abril 1

Siga el tetraedre regular ABCS.

Siguen K, L, M de les arestes $\overline{AS}$, $\overline{BS}$, $\overline{CS}$, respectivament, tal que,

$$\overline{AK} = \overline{BL} = \overline{SM} = \frac{1}{4}a.$$

Determineu l'àrea del triangle KLM.



Solució:

Els triangles equilàters $\triangle ABS$, $\triangle KLS$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{KL} = \frac{3}{4}a.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle LMS$:

$$\overline{LM}^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{9}{16}a^2 - 2 \cdot \frac{1}{4}a \cdot \frac{3}{4}a \cdot \cos 60^\circ.$$

$$\overline{LM}^2 = \frac{7}{16}a^2.$$

$$\overline{LM} = \overline{KM} = \frac{\sqrt{7}}{4}a.$$

Siga P el punt mig del segment $\overline{KL}$.

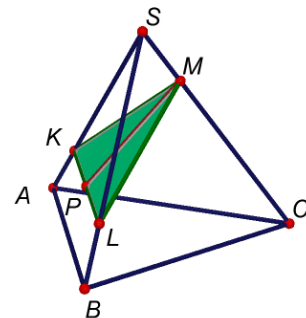
$$\overline{PL} = \frac{1}{2}\overline{KL} = \frac{3}{8}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle PLM$:

$$\overline{PM} = \frac{\sqrt{19}}{8}a.$$

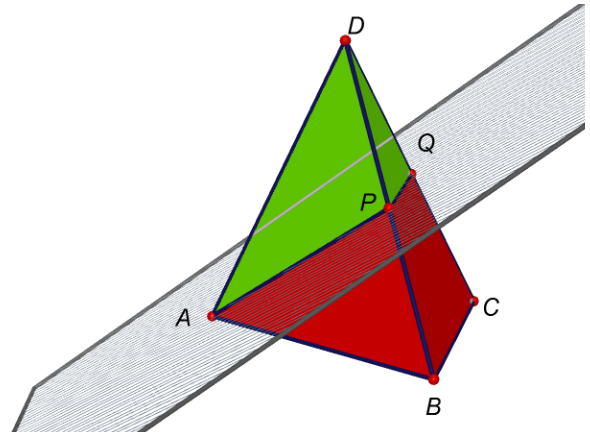
L'àrea del triangle KLM és:

$$S_{KLM} = \frac{1}{2}\overline{KL} \cdot \overline{PM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}a \cdot \frac{\sqrt{19}}{8}a = \frac{3\sqrt{19}}{64}a^2.$$



Abril 2, 9:

Siga el tetraedre ABCD. Siguen P i Q els punts migs de les arestes $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, respectivament. La secció que passa pels punts A, P, Q divideix el tetraedre en dues parts. Determineu la proporció entre els volums de les dues parts.

**Solució:**

$\overline{PQ}$ és la paral·lela mitjana del triangle $\triangle BCD$.

El plànol que passa pels punts A, P, Q divideix el tetraedre ABCD en dues piràmides, PQDA i

BCQPA de bases $\triangle PQD$, $\triangle BCQP$, respectivament.

Les dues piràmides tenen la mateixa altura h sobre les bases anteriors.

Els triangles $\triangle BCD$, $\triangle PQD$ són semblants i de raó 2:1.

Aplicant el teorema de Tales:

$$S_{PQD} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 S_{BCD} = \frac{1}{4} S_{BCD}.$$

$$S_{BCQP} = S_{BCD} - S_{PQD} = \frac{3}{4} S_{BCD}.$$

El volum de la piràmide PQDA és:

$$V_{PQDA} = \frac{1}{3} S_{PQD} \cdot h = \frac{1}{3} \frac{1}{4} S_{BCD} \cdot h.$$

El volum de la piràmide BCQPA és:

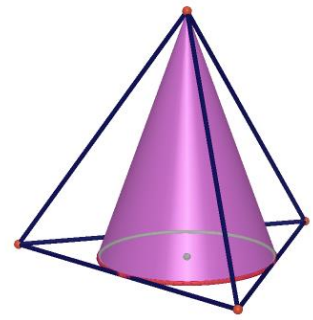
$$V_{BCQPA} = \frac{1}{3} S_{BCQP} \cdot h = \frac{1}{3} \frac{3}{4} S_{BCD} \cdot h.$$

La proporció entre els dos volums és:

$$\frac{V_{PQDA}}{V_{BCQPA}} = \frac{\frac{1}{3} \frac{1}{4} S_{BCD} \cdot h}{\frac{1}{3} \frac{3}{4} S_{BCD} \cdot h} = \frac{1}{3}.$$

Abril 3

Siga un con inscrit en un tetraedre regular.
Calculeu la proporció entre el volum del con i del tetraedre.



Solució:

Siga el tetraedre regular ABCS d'aresta $\overline{AB} = a$.

Siga O el baricentre de la base.

O és el centre de la base del con inscrit.

Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ABM$:

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{OM} = \frac{1}{3} \overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{6} a, \text{ radi de la base del con.}$$

L'àrea del triangle equilàter $\triangle ABC$ és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

El volum del tetraedre és:

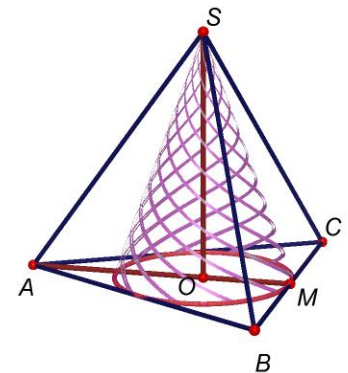
$$V_T = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{OS}.$$

El volum del con és:

$$V_C = \frac{1}{3} \pi \overline{OM}^2 \cdot \overline{OS}.$$

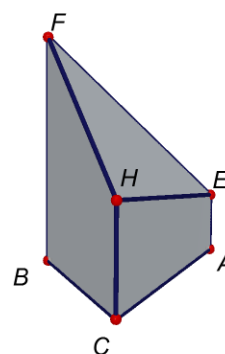
La proporció entre els volums és:

$$\frac{V_C}{V_T} = \frac{\frac{1}{3} \pi \overline{OM}^2 \cdot \overline{OS}}{\frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{OS}} = \frac{\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{6} a \right)^2}{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0.6046.$$



Abril 4, 5:

Siga el triangle $\triangle ABC$, $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{AC} = 10$.
Perpendicularment al pla que determina el triangle s'aixequen
 $\overline{AE} = 2$, $\overline{BF} = 8$, $\overline{CH} = 4$. Determineu l'àrea i el volum del sòlid
ABCEFH.



Solució:

El triangle $\triangle ABC$ és rectangle en B ja que $10^2 = 6^2 + 8^2$.

El sòlid és un prisma triangular recte truncat.

El volum és:

$$V_{ABCEFH} = S_{ABC} \frac{\overline{AE} + \overline{BF} + \overline{CH}}{3} = \frac{1}{2}(6 \cdot 8) \cdot \frac{2+8+4}{3} = 112.$$

Siga E' la projecció de E sobre l'aresta $\overline{CH}$.

$$\overline{E'H} = 2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle EE'H$:

$$\overline{EH} = 2\sqrt{26}.$$

Siga E'' la projecció de E sobre l'aresta $\overline{BF}$.

$$\overline{E''F} = 6.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle EE''F$:

$$\overline{EF} = 6\sqrt{2}.$$

Siga H' la projecció de H sobre l'aresta $\overline{BF}$.

$$\overline{H'F} = 4.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle HH'F$:

$$\overline{FH} = 4\sqrt{5}.$$

Siga $\alpha = \angle EFH$. Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle EFH$:

$$(2\sqrt{26})^2 = (4\sqrt{5})^2 + (6\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 4\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{2} \cos \alpha.$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

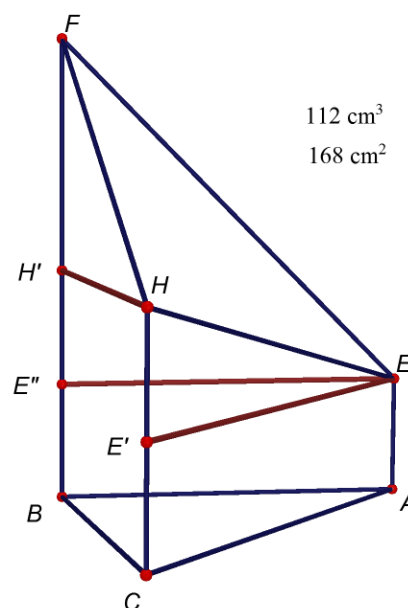
L'àrea del triangle $\triangle EFH$ és:

$$S_{EFH} = \frac{1}{2} \overline{EF} \cdot \overline{FH} \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} 6\sqrt{2} 4\sqrt{5} \frac{3}{\sqrt{10}} = 36.$$

L'àrea del sòlid ABCEFH és:

$$S_{ABCEFH} = S_{ABC} + S_{BCHF} + S_{CAEH} + S_{BAEF} + S_{EFH}.$$

$$S_{ABCEFH} = \frac{1}{2}(6 \cdot 8) + \frac{8+4}{2} 8 + \frac{2+4}{2} 10 + \frac{8+2}{2} 6 + 36 = 168.$$



Abril 6

Determineu la proporció entre els volums d'una con inscrit en una piràmide regular hexagonal.

Solució:

La proporció entre els volums d'un con i una piràmide que tenen la mateixa altura són proporcionals a les bases.

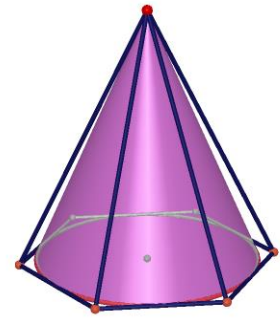
Siga a l'aresta de la base de la piràmide.

L'apotema del polígon és igual al radi del cercle inscrit.

L'apotema de l'hexàgon és $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

La proporció entre els volums és:

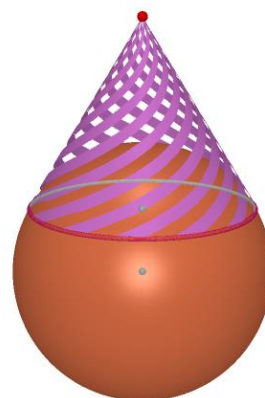
$$\frac{V_{\text{con}}}{V_{\text{piràmide}}} = \frac{S_{\text{cercle}}}{S_{\text{hexàgon}}} = \frac{\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a \right)^2}{6 \frac{\sqrt{3}}{4}a^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.9069 .$$



Abril 7, 8:

Una esfera és tangent a la base d'un con equilàter de radi r (el diàmetre de la base és igual a la generatriu).

Determineu el volum de la part del con que està fora de l'esfera.

**Solució:**

Siga $\overline{AB} = 2r$ diàmetre del con.

$\overline{SA} = \overline{SB} = 2r$.

Siga M el punt mig del segment $\overline{AB}$ centre de la base del con.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AMS$:

$\angle ASM = 30^\circ$.

$\overline{MS} = r\sqrt{3}$.

Siga O el centre de l'esfera tangent a la generatriu en el punt A .

Siga $\overline{OA} = R$ el radi.

Siga $\overline{OM} = x$.

$\angle MAO = 30^\circ$.

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3}r \\ R = \frac{2\sqrt{3}}{3}r \end{cases}$$

El segment $\overline{OS}$ talla l'esfera en el punt P .

El volum de la part del con que està fora de l'esfera és igual al volum del con menys el volum del casquet esfèric de radi R i altura $h = \overline{MP}$.

$$h = \overline{MP} = \overline{OP} - \overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{3}r.$$

El volum del con és:

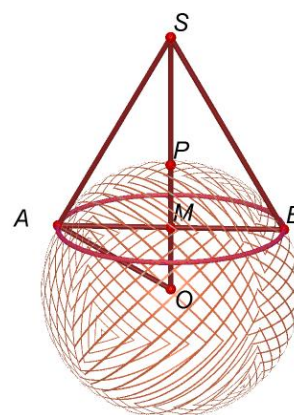
$$V_{\text{con}} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r\sqrt{3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}r^3.$$

El volum del casquet és:

$$V_{\text{casquet}} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{3}r \right)^2 \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r - \frac{\sqrt{3}}{9}r \right) = \frac{\pi 5\sqrt{3}}{27}r^3.$$

El volum de la part del con que està fora de l'esfera és:

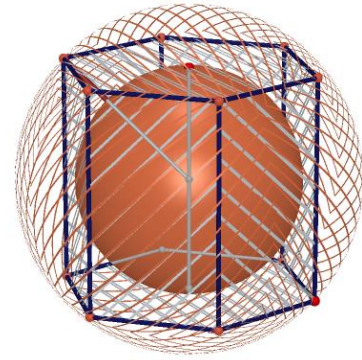
$$V = V_{\text{con}} - V_{\text{casquet}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}r^3 - \frac{\pi 5\sqrt{3}}{27}r^3 = \frac{4\pi\sqrt{3}}{27}r^3.$$



Abril 10, 11:

Un prisma hexagonal regular està inscrit en una esfera de radi R .

Calculeu la seua àrea sabent que el prisma està circumscribit a una esfera.



Solució:

Siga r el radi de l'esfera inscrita en el prisma.

L'altura del prisma és $2r$.

L'apotema de l'hexàgon base és igual al radi de la circumferència inscrita.

L'aresta de la base del prisma és:

$$a = \frac{2\sqrt{3}}{3}r.$$

$$\overline{PQ} = 2R, \overline{KM} = 2\overline{AB} = \frac{4\sqrt{3}}{3}r, \overline{LM} = 2r.$$

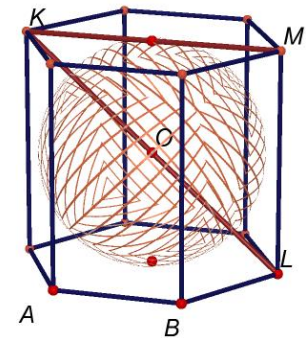
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle KLM$:

$$(2R)^2 = (2r)^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}r\right)^2.$$

$$r^2 = \frac{3}{7}R^2.$$

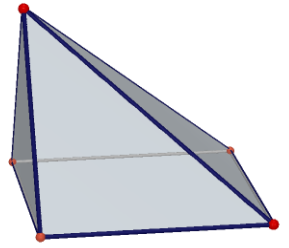
L'àrea del prisma és:

$$S = 2 \left(6 \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r \right)^2 \right) + 6 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}r \cdot 2r = 12\sqrt{3}r^2 = \frac{36\sqrt{3}}{7}R^2.$$



Abril 12

La base d'una piràmide és un quadrat de costat a i una cara lateral és perpendicular a la base i és un triangle equilàter.
 Determineu l'àrea i el volum de la piràmide.

**Solució:**

Siga la piràmide ABCDS de base el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = a$.

Siga $\triangle ABS$ la cara que és un triangle equilàter i perpendicular a la base.

$$\overline{AS} = \overline{BS} = a.$$

$$\angle SBC = \angle SAD = 90^\circ.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\triangle SBC$:

$$\overline{SC} = \overline{SD} = a\sqrt{2}.$$

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

$\overline{MS}$ és l'altura de la piràmide.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AMS$:

$$\overline{MS} = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

El volum de la piràmide és:

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot \overline{MS} = \frac{1}{3} a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{6} a^3.$$

L'àrea del triangle equilàter $\triangle ABS$ és:

$$S_{ABS} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2.$$

L'àrea del triangle rectangle isòsceles $\triangle BCS$ és:

$$S_{BCS} = \frac{1}{2} a^2.$$

Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{CD}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle CNS$.

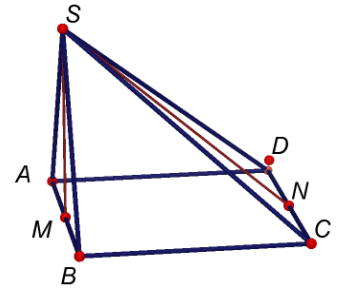
$$\overline{NS} = \frac{\sqrt{7}}{2} a.$$

L'àrea del triangle isòsceles $\triangle CDS$ és:

$$S_{CDS} = \frac{1}{2} a \frac{\sqrt{7}}{2} a = \frac{\sqrt{7}}{4} a^2.$$

L'àrea total de la piràmide és:

$$\begin{aligned} S_{\text{total}} &= S_{ABCD} + 2 \cdot S_{BCS} + S_{ABS} + S_{CDS} = a^2 + 2 \frac{1}{2} a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + \frac{\sqrt{7}}{4} a^2 = \\ &= \left(2 + \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{4} \right) a^2. \end{aligned}$$



Abril 13, 20:

Siga el prisma regular hexagonal.

Determineu la proporció entre el volum del poliedre dual del prisma (aquell que té per vèrtexs els punts migs de les cares) i el volum del prisma.

Solució:

Siga el prisma regular hexagonal $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ d'aresta de la base a i altura h .

El poliedre $SIJKLMNS'$ dual és una dipiràmide.

Siga J' la projecció de J sobre l'aresta $\overline{AB}$.

Siga K' la projecció de K sobre l'aresta $\overline{BC}$.

Siga P el punt mig del segment $\overline{AC}$.

$\overline{JK} = \overline{J'K'} = \overline{AP}$.

$\angle CAB = 30^\circ$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle APB$:

$$\overline{AP} = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

L'altura de cadascuna de les piràmides és $\frac{h}{2}$ i l'aresta de la base

$$\overline{JK} = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

El volum de la dipiràmide és:

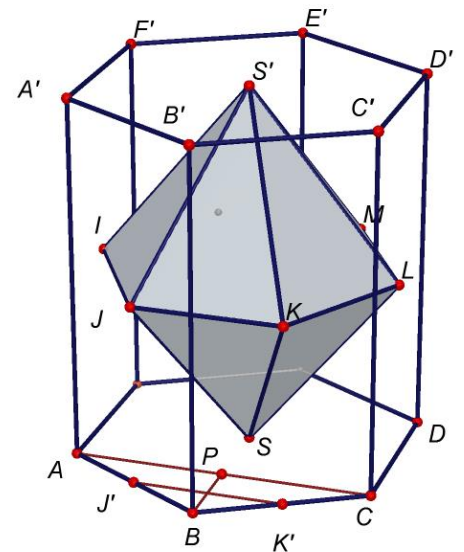
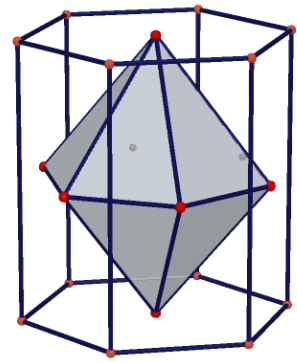
$$V_{\text{dipiràmide}} = 2 \left(\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a \right)^2 \cdot \frac{h}{2} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{8} a^2 h.$$

El volum del prisma és:

$$V_{\text{prisma}} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot h.$$

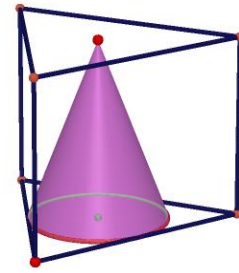
La proporció dels volums és:

$$\frac{V_{\text{dipiràmide}}}{V_{\text{prisma}}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{8} a^2 h}{6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 h} = \frac{1}{4}.$$



Abril 14

En un prisma triangular regular hi ha inscrit un con de radi r i l'angle de la generatriu i la base és α .
Calculeu el volum del prisma.

**Solució:**

Siga el prisma $ABCA'B'C'$.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

Siga O el baricentre del triangle equilàter $\triangle ABC$.

L'àrea del triangle $\triangle ABC$ és:

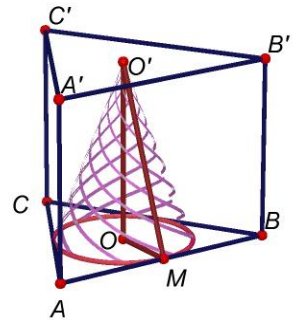
$$S_b = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2.$$

Siga O' el baricentre del triangle equilàter $\triangle A'B'C'$.

$\overline{OM} = r$.

Siga el con de radi r de generatriu $\overline{MO'}$, $\angle O'MO = \alpha$ angle que forma la generatriu i la base del con.

Siga $\overline{AB} = a$ aresta de la base, $\overline{OO'} = h$ altura del con.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle O'MO$:

$$h = r \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2} a, \quad \overline{CM} = 3r.$$

$$a = 2r\sqrt{3}.$$

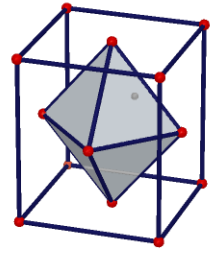
El volum del prisma és:

$$V_{\text{prisma}} = S_b \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot r \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4} (2r\sqrt{3})^2 r \cdot \operatorname{tg} \alpha = 3\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot r^3$$

Abril 15, 16:

Siga el prisma regular quadrangular.

Determineu la proporció entre el volum del poliedre dual del prisma (aquell que té per vèrtexs els punts migs de les cares) i el volum del prisma.



Solució:

Siga el prisma regular quadrangular $ABCD A' B' C' D'$ d'aresta de la base a i altura h .

El poliedre $SJKLMS'$ dual és una dipiràmide.

Siga J' la projecció de J sobre l'aresta $\overline{AB}$.

Siga K' la projecció de K sobre l'aresta $\overline{BC}$.

$$\overline{JK} = \overline{J'K'} = \frac{1}{2} \overline{AC}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ABC$:

$$\overline{AC} = a\sqrt{2}.$$

L'altura de cadascuna de les piràmides és $\frac{h}{2}$ i l'aresta de la base

$$\overline{JK} = \frac{\sqrt{2}}{2} a.$$

El volum de la dipiràmide és:

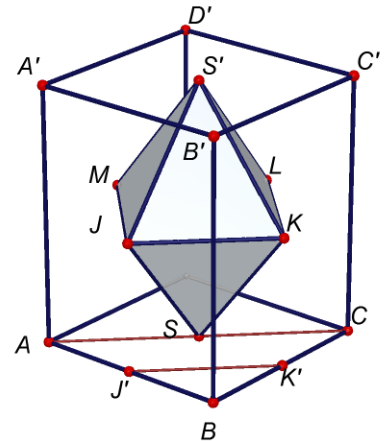
$$V_{\text{dipiràmide}} = 2 \left(\frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a \right)^2 \cdot \frac{h}{2} \right) = \frac{1}{6} a^2 h.$$

El volum del prisma és:

$$V_{\text{prisma}} = a^2 \cdot h.$$

La proporció dels volums és:

$$\frac{V_{\text{dipiràmide}}}{V_{\text{prisma}}} = \frac{\frac{1}{6} a^2 h}{a^2 h} = \frac{1}{6}.$$



Abril 17

El volum d'un ortoedre és 8cm^3 i la seua superfície 32cm^2 .

Si les arestes estan en progressió geomètrica determineu la mesura de la suma de totes les arestes de l'ortoedre.

Solució:

Siguen a , b , c les mesures de les arestes del cub.

La suma de les 12 arestes és $L = 4(a + b + c)$.

Si les arestes estan en progressió geomètrica:

$$ac = b^2.$$

El volum de l'ortoedre és:

$$abc = 8.$$

$$b^3 = 8. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$b = 2\text{cm}$$

L'àrea de l'ortoedre és:

$$2(ab + bc + ac) = 32.$$

$$2a + 2c + b^2 = 16.$$

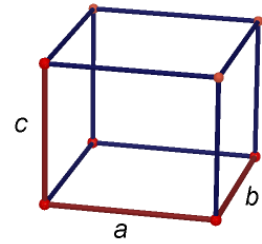
$$2(a + c) = 12$$

$$a + c = 6.$$

$$a + b + c = 6 + 2 = 8.$$

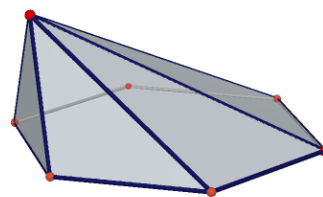
La mesura de la suma de totes les arestes és:

$$L = 4(a + b + c) = 4 \cdot 8 = 32\text{cm}$$



Abril 18, 19:

La base d'una piràmide és un hexàgon regular de costat a i una cara lateral és perpendicular a la base i és un triangle equilàter.
Determineu l'àrea i el volum de la piràmide.



Solució:

Siga la piràmide ABCDEFS de base l'hexàgon regular ABCDEF de costat $\overline{AB} = a$.

Siga $\triangle ABS$ la cara que és un triangle equilàter i perpendicular a la base.
 $\overline{AS} = \overline{BS} = a$.

$$\angle SBD = \angle SAE = 90^\circ.$$

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

$$\angle SMC = \angle SMF = 90^\circ$$

$\overline{MS}$ és l'altura de la piràmide.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AMS$:

$$\overline{MS} = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

Siga O el centre de l'hexàgon ABCDEF.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AMO$:

$$\overline{MO} = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

$$\overline{BD} = 2 \cdot \overline{MO} = a\sqrt{3}.$$

El volum de la piràmide és:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{ABCEDEF}} \cdot \overline{MS} = \frac{1}{3} 6 \cdot S_{\text{ABO}} \cdot \overline{MS} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{3}{4} a^3.$$

L'àrea del triangle equilàter $\triangle ABS$ és:

$$S_{\text{ABS}} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\triangle SBD$:

$$\overline{SD} = \overline{SE} = 2a.$$

Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{CD}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle DNS$.

$$\overline{NS} = \frac{\sqrt{15}}{2} a.$$

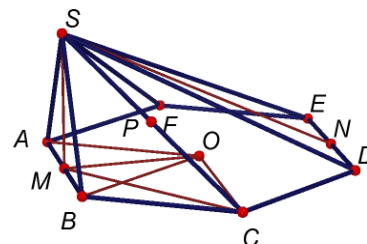
L'àrea del triangle isòsceles $\triangle DES$ és:

$$S_{\text{DES}} = \frac{1}{2} a \frac{\sqrt{15}}{2} a = \frac{\sqrt{15}}{4} a^2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle MOC$:

$$\overline{MC} = \frac{\sqrt{7}}{2} a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle SMC$:



$$\overline{SC} = \frac{\sqrt{10}}{2} a.$$

Siga P el punt mig del segment $\overline{SC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle BPC$:

$$\overline{BP} = \frac{\sqrt{6}}{4} a.$$

L'àrea del triangle $\triangle BCS$ és:

$$S_{BCS} = \frac{1}{2} \overline{CS} \cdot \overline{BP} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{10}}{2} a \frac{\sqrt{6}}{4} a = \frac{\sqrt{15}}{8} a^2.$$

Siga $\alpha = \angle SCD$. Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle CDS$:

$$(2a)^2 = a^2 + \left(\frac{\sqrt{10}}{2} a \right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} \cos \alpha.$$

$$\cos \alpha = \frac{-\sqrt{10}}{20}.$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{390}}{20}.$$

L'àrea del triangle $\triangle CDS$ és:

$$S_{CDS} = \frac{1}{2} \overline{CD} \cdot \overline{CS} \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} a \frac{\sqrt{10}}{2} a \frac{\sqrt{390}}{20} = \frac{\sqrt{39}}{8} a^2.$$

L'àrea total de la piràmide és:

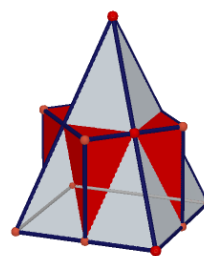
$$\begin{aligned} S_{\text{total}} &= S_{\text{ABCDEF}} + 2 \cdot S_{BCS} + S_{\text{ABS}} + 2 \cdot S_{CDS} + S_{\text{DES}} = \\ &= \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \frac{\sqrt{15}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4} + 2 \frac{\sqrt{39}}{8} + \frac{\sqrt{17}}{4} \right) a^2 = \left(\frac{7\sqrt{3} + 2\sqrt{15} + \sqrt{39}}{4} \right) a^2. \end{aligned}$$

Abril 21, 22:

Siguen donats un cub i una piràmide quadrangular regular, l'aresta lateral de la qual és b .

Els vèrtexs d'una de les bases del cub són els punts migs de les arestes de la base de la piràmide, mentre que cadascuna de la cara oposada del cub talla una de les arestes laterals de la piràmide.

Determineu el volum de la part del cub situada fora de la piràmide.

**Solució:**

Siga PQRST la piràmide quadrangular regular de base el quadrat ABCD i d'aresta lateral

$$\overline{PT} = b$$

Siga el cub ABCDA'B'C'D' d'aresta $\overline{AB} = x$.

Siga O el centre del quadrat ABCD.

$$\overline{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2}x, \quad \overline{OQ} = x.$$

$$\overline{PQ} = x\sqrt{2}.$$

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{A'B'}$.

Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

$$\overline{MN} = x, \quad \overline{NQ} = \frac{1}{2}x.$$

Els triangles rectangles $\triangle TOQ$, $\triangle MNQ$ són semblants i de raó 2:1.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{OT} = 2\overline{MN} = 2x.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle TOQ$:

$$b^2 = x^2 + (2x)^2.$$

Resolent l'equació:

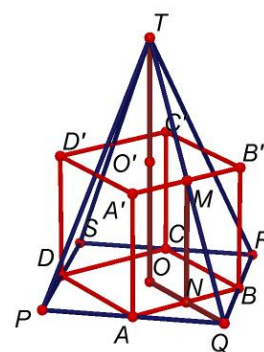
$$x = \frac{\sqrt{5}}{5}b.$$

El volum de la part del cub situada fora de la piràmide és igual al volum de quatre piràmides

triangulars de base el triangle rectangle de catet $\overline{A'M} = \frac{1}{2}x$ i altura $\overline{A'A} = x$.

$$V = 4 \left(\frac{1}{3} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x \right)^2 x \right) = \frac{1}{6}x^3.$$

$$V = \frac{1}{6} \left(\frac{\sqrt{5}}{5}b \right)^3 = \frac{\sqrt{5}}{150}b^3.$$



Abril 23, 30

Calculeu el volum de l'esfera tangent a les arestes $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$ del tetraedre regular $SABC$ en els vèrtexs A, B, C respectivament, essent l'àrea del tetraedre $3\sqrt{3} u^2$.

Solució:

Siga $\overline{AB} = a$ aresta del tetraedre.

La superfície del tetraedre és:

$$4 \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 3\sqrt{3} . \text{ Resolent l'equació:}$$

$$a = \sqrt{3} .$$

Siga G el baricentre del triangle $\triangle ABC$.

Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{AG} = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} a = 1 .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AGS$:

$$\overline{GS} = \sqrt{2} .$$

Siga O el centre de l'esfera.

O pertany a la recta perpendicular a la base $\triangle ABC$ que passa pel baricentre.

Siga $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = r$ radi de l'esfera.

Per ser l'esfera tangent a l'aresta $\overline{SA}$ en el vèrtex A, $\overline{OA}$ és perpendicular a $\overline{SA}$.

Siga $\overline{OG} = x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OAS$:

$$(\sqrt{3})^2 + r^2 = (\sqrt{2} + x)^2 .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OGA$:

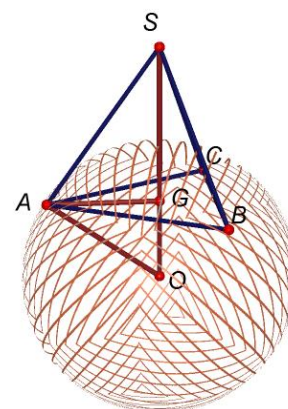
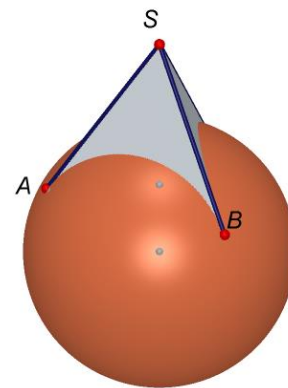
$$r^2 = 1^2 + x^2 .$$

Considerem el sistema $\begin{cases} (\sqrt{3})^2 + r^2 = (\sqrt{2} + x)^2 \\ r^2 + 1^2 = x^2 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ r = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases} .$$

El volum de l'esfera és:

$$V = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^3 = \pi \sqrt{6} u^3 .$$



Abril 24, 25:

Un cub i un ortoedre tenen igual les àrees.

Les dimensions de l'ortoedre tenen proporció 1:6:6, i volum 562.5dm^3 .

Calculeu el volum del cub.

Solució:

Siguin x , $6x$, $6x$ les dimensions de les arestes de l'ortoedre.

El volum de l'ortodredre és:

$$V_o = x \cdot 6x \cdot 6x = 562.5. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$x = 2.5.$$

L'àrea de ortoedre és:

$$S_o = 2(6x^2 + 6x^2 + 36x^2) = 2(48x^2) = 600.$$

Siga a l'aresta del cub.

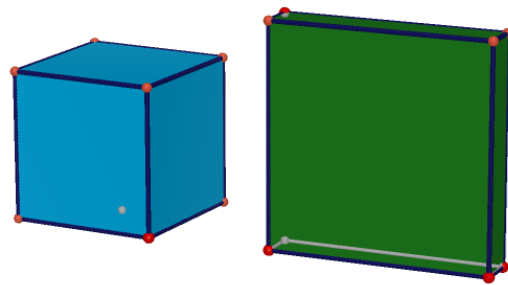
El cub té la mateixa àrea que l'ortoedre:

$$S_c = 6a^2 = 600. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$a = 10\text{dm}.$$

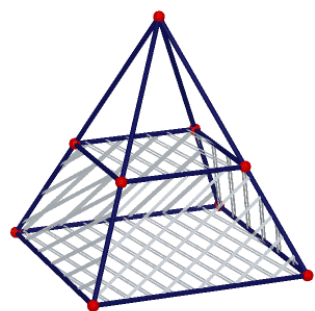
El volum del cub és:

$$V_c = a^3 = 10^3 = 1000\text{dm}^3 = 1\text{m}^3.$$



Abril 26, 27:

En una piràmide regular quadrangular l'àrea de la secció paral·lela a la base és tres vegades menor que l'àrea de la base. Determineu la raó entre dels dos cossos en què queda dividida la piràmide per la secció.



Solució:

Siga la piràmide regular quadrangular ABCDE de base el quadrat ABCD.

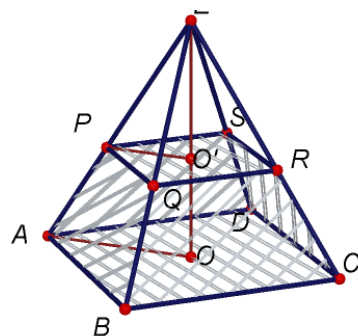
Siga la secció PQRS paral·lela a la base.

Siga O el centre del quadrat ABCD.

Siga O' el centre del quadrat PQRS.

$\frac{S_{PQRS}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{3}$. Aleshores la proporció entre els costats del quadrat és:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



Els triangles rectangles $\triangle PO'E$, $\triangle AOE$ són semblants i la raó és $\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, aleshores:

$$\frac{\overline{O'E}}{\overline{OE}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Calculem la proporció entre els volums de les piràmides PQRSE i ABCDE:

$$\frac{V_{PQRSE}}{V_{ABCDE}} = \frac{\frac{1}{3} S_{PQRS} \cdot \overline{O'E}}{\frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot \overline{OE}} = \frac{\sqrt{3}}{9} \quad (1)$$

Calculem la proporció entre els volums del tron de piràmide ABCDPQRS i la piràmide ABCDE:

$$\frac{V_{ABCDPQRS}}{V_{ABCDE}} = \frac{V_{ABCDE} - V_{PQRSE}}{V_{ABCDE}} = 1 - \frac{V_{PQRSE}}{V_{ABCDE}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{9} \quad (2)$$

Dividint les expressions (1) (2) la proporció entre els volums de la piràmide PQRSE i el tron de piràmide ABCDPQRS és:

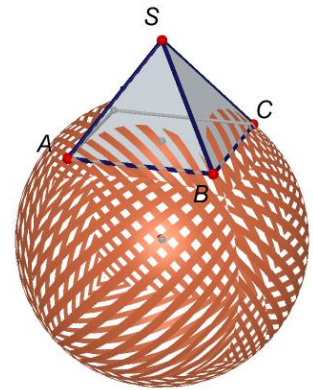
$$\frac{V_{PQRSE}}{V_{ABCDPQRS}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{9}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{9}} = \frac{1 + 3\sqrt{3}}{26}.$$

Abril 28, 29

Siga la piràmide regular ABCDS de base el quadrat ABCD que té totes les arestes iguals a $\overline{AB} = a$.

Calculeu la superfície de l'esfera tangent a les arestes

$\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$, $\overline{SD}$ els vèrtexs A, B, C, D respectivament.



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles

$\triangle ABC$:

$$\overline{AC} = a\sqrt{2}.$$

Aplicant el teorema invers de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles

$\triangle ASC$:

$$\angle ASC = 90^\circ.$$

Siga M el centre del quadrat ABCD

$$\angle SAM = 45^\circ.$$

Siga O el centre de l'esfera.

O pertany a la recta perpendicular a la base ABCD que passa pel centre M.

Per ser l'esfera tangent a l'aresta $\overline{SA}$ en el vèrtex A, $\overline{OA}$ és perpendicular a $\overline{SA}$.

$$\angle SAO = 90^\circ.$$

$$\text{Aleshores, } \angle MAO = 90^\circ - \angle SAM = 45^\circ.$$

El triangle $\triangle AMO$ és rectangle i isòsceles.

Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$\overline{OA} = a \text{ radi de l'esfera.}$$

La superfície de l'esfera és:

$$S_{\text{esfera}} = 4\pi a^2.$$

