SOLUCIONS MAIG 2017

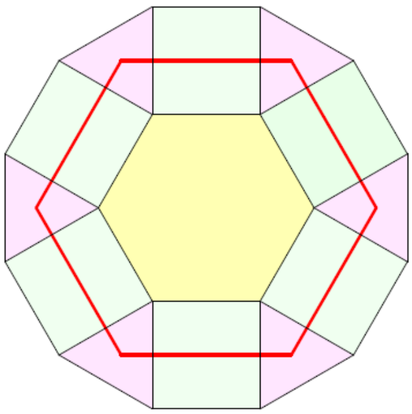
Solucions extretes dels llibres:

XVI CONCURSO DE PRIMAVERA 2012

XVII CONCURSO DE PRIMAVERA 2013

Obtenibles en http://www.concursoprimavera.es#libros

AUTORS: Col·lectiu "Concurso de Primavera". Comunitat de Madrid.



Maig 1, 2.- Hem rodejat l'hexàgon regular central de la figura amb quadrats i triangles equilàters. Si el costat d'eixe hexàgon mesura 2, quina és l'àrea de l'hexàgon regular els vèrtexs del qual són els centres dels triangles equilàters?

Nivell: A partir de 4ESO.

Solució: La relació entre l'apotema i el costat de l'hexàgon és la mateixa que entre l'alçaria i el costat d'un triangle equilàter, és a dir: $\cos(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Observem que l'apotema de l'hexàgon gran és una unitat major que la del petit. Com sabem el costat de l'hexàgon petit, podem calcular el costat i l'apotema del gran.

$$\mathrm{A_P} = \mathrm{L_P}\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{A_G} = \mathrm{A_P} + 1 = 1 + \sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{L_G} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot \mathrm{A_G} = \frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}}$$

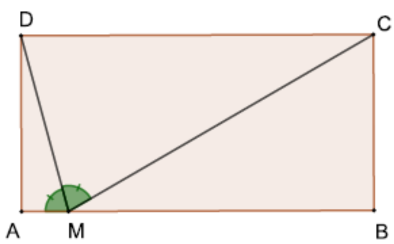
Per tant, l'àrea de l'hexàgon és:

$$\frac{1}{2}\text{Perímetre}\cdot \mathrm{A_G} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot \mathrm{L_G}\cdot \mathrm{A_G} = 3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)^2 = 8\sqrt{3} + 12$$

Maig 3.- En el rectangle ABCD amb AB = 6 i BC = 3, triem un punt M en el costat AB de manera que $\angle$AMD = $\angle$CMD. Quant mesura eixe angle?

Nivell: A partir de 4ESO.

Solució: Si $\angle$AMD = $\angle$CMD = α, en la figura tenim $\angle$CMB = $\angle$MCD =180° - 2α, per alterns interns. Així que el triangle ΔCMD es isòsceles amb MC = 6. D'ací: $\mathrm{sen}(\angle \mathrm{CMB}) = \frac{3}{6} \Rightarrow \angle \mathrm{CMB} = 30° \Rightarrow \alpha = 75°$



Maig 4, 5.- Siguen a, b, c, d i e enters positius tals que:

$$a + b + c + d + e = 2015$$

i siga M la major de les sumes a + b, b + c, c + d i d + e; quin és el menor valor per a M?

Nivell: Batxillerat.

Solució: En primer lloc, repartim la major quantitat possible entre a, c y e. Per això, dividim 2011 entre 3, la qual cosa dona quocient 670 i residu 1. Com b i d deuen ser positius, assignem 669 per a a, c i e respectivament i queden 4 per repartir entre b y d. El mínim valor del màxim de les sumes a + b, b + c, c + d i d + e resulta ser 669 + 2 = 671.

Maig 6.- En un triangle de costats a, b i c es verifica:

$$(a + b + c)\cdot(a + b - c) = 3ab$$

Trobar el valor de l'angle oposat al costat c

Nivell: A partir de 4ESO.

Solució: De la condició de l'enunciat es té:

$$(a + b + c)\cdot(a + b - c) = 3ab \;\Rightarrow\; (a+b)^2 - c^2 = 3ab \;\Rightarrow\; a^2 + b^2 - c^2 = ab$$

I per el teorema dels cosinus:

$$\cos(C) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}$$

Per tant, l'angle val 60°.

Maig 7.- Resoldre:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 625 \\ x \cdot y = 168 \end{array}\right\}$$

Nivell: A partir de 4ESO.

Solució: Si a la primera equació li sumem el doble de la segona pleguem a: $(x + y)^2 = 961$. Per tant, $x + y = \pm 31$. I el sistema proposat es equivalent a:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = \pm 31 \\ x \cdot y = 168 \end{array}\right\}$$

Per al sistema

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 31 \\ x \cdot y = 168 \end{array}\right\}$$

tenim al aïllar y en la primera i substituir en la segona: $x^2 - 31x + 168 = 0$, que aporta x = 24, x = 7. Per tant, son solucions del sistema (24, 7) y (7, 24)

Per al sistema

$$\left.\begin{array}{r} x + y = -31 \\ x \cdot y = 168 \end{array}\right\}$$

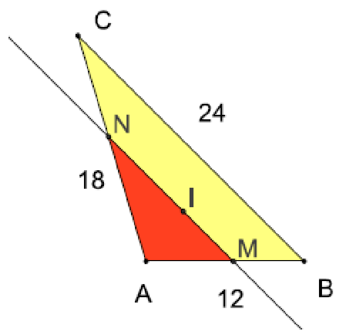
tenim al aïllar y en la primera i substituir en la segona: $x^2 + 31x + 168 = 0$, que aporta x = - 24, x = - 7. Per tant, son solucions del sistema (-24, -7) y (-7, -24)

Maig 8.- En una reunió de 52 persones, quin és el major valor de n per a el qual la afirmació "almenys n persones de la reunió compleixen anys el mateix mes" siga verdadera?

Nivell: Preparació OME.

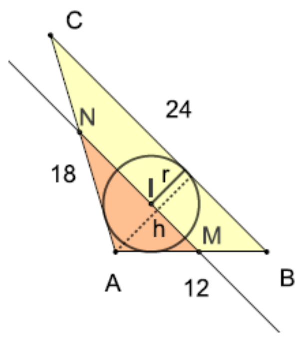
Solució: Degut a que 48 = 12·4, per el Principi de Dirichlet (del colomar) podem afirmar que al menys 5 persones d'entre les 52 compleixen anys el mateix mes.

Maig 9, 10.- En el triangle △ABC, AB = 12, BC = 24 i AC = 18. Siga I el incentre del triangle. Si la recta paral·lela a CB que passa per I talla a AC i AB en N y M respectivament, calcular el perímetre del triangle △AMN



Nivell: Preparació OME.

Solució: Com MN es paral·lela a BC els triangles ΔABC i ΔAMN són semblants. Siga h l'alçaria sobre BC en ΔABC, com MN i BC són paral·leles, l'alçaria sobre MN en ΔAMN es h – r i amés la raó de semblança és $\frac{h-r}{r}$. Trobarem aquesta raó.



El perímetre del ΔABC és 2p = 12 + 24 + 18 = 54 i la seua àrea és r·p = 27r. Però també l'àrea és $\frac{1}{2} \cdot \mathrm{BC} \cdot \mathrm{h} = 12\mathrm{h}$. D'ací 27r = 12h, i com conseqüència:

$$\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{h}} = \frac{4}{9} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{h}-\mathrm{r}}{\mathrm{h}} = 1 - \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{h}} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

Com el perímetre del triangle ΔABC és 54, aleshores el perímetre del triangle ΔAMN és $54 \cdot \frac{5}{9} = 30$

Maig 11.- Al calcular a·b sent a un nombre de dues xifres, Laia va canviar l'ordre de les xifres de a i va obtindre 161. Quin és el resultat correcte del producte?

Nivell: A partir de 1ESO**.**

Solució: Si va canviar l'ordre de les xifres de a i va obtindre per al producte 161, va multiplicar 23 por 7, quan devia multiplicar 32 per 7, de modo que el resultat correcte és 224.

Maig 12.- Si a, b i c són no nuls, calcular els valors de l'expressió:

$$\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}+\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}+\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|}+\frac{\mathbf{abc}}{|\mathbf{abc}|}$$

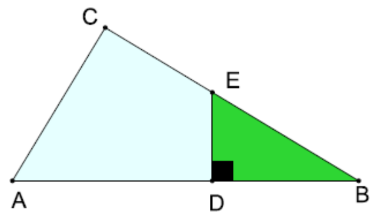
Nivell: A partir de 4ESO.

Solució 1: Els sumands d'aquesta expressió son ± 1, però el valor del quart sumand està lligat al producte dels altres tres. Per tant, no pot haver un nombre imparell de signes negatius. Les possibilitats son quatre uns, dos uns positius i dos negatius, i quatre negatius.

Solució 2: Amb un diagrama d'arbre:

$$\begin{cases} a<0 \ \rightarrow \begin{cases} b<0 \ \rightarrow \begin{cases} c<0 \ \rightarrow \text{ quatre 1 negatius} \\ c>0 \ \rightarrow \text{ dos 1 positivus i dos negatius} \end{cases} \\ b>0 \ \rightarrow \begin{cases} c<0 \ \rightarrow \text{ dos 1 positivus i dos negatius} \\ c>0 \ \rightarrow \text{ dos 1 positivus i dos negatius} \end{cases} \end{cases} \\ a>0 \ \rightarrow \begin{cases} b<0 \ \rightarrow \begin{cases} c<0 \ \rightarrow \text{ dos 1 positivus i dos negatius} \\ c>0 \ \rightarrow \text{ dos 1 positivus i dos negatius} \end{cases} \\ b>0 \ \rightarrow \begin{cases} c<0 \ \rightarrow \text{ dos 1 positivus i dos negatius} \\ c>0 \ \rightarrow \text{ quatre 1 positivos} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Maig 13, 14.- En el triangle △ABC; AC = 3, CB = 4 i AB = 5. Si D és un punt d'AB de manera que el triangle rectangle △DBE té la tercera part de l'àrea del triangle △ABC, quin és el perímetre del triangle △DEB?



Nivell: A partir de 3ESO.

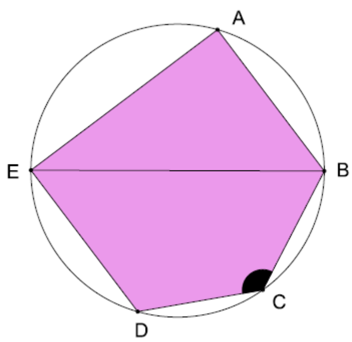
Solució: Els triangles ΔABC i ΔEDB són semblants (perquè els dos són rectangles i tenen l'angle en B comú) així què:

$$\frac{ED}{3}=\frac{DB}{4}$$

L'àrea del triangle ΔABC és $\frac{3\cdot 4}{2}=6$. Per tant l'àrea del triangle ΔEDB és:

$$\frac{ED\cdot DB}{2}=\frac{6}{3} \ \Rightarrow \ \frac{DB\cdot\frac{3}{4}DB}{2}=2 \ \Rightarrow \ DB^2=\frac{16}{3} \ \Rightarrow \ DB=\frac{4\cdot\sqrt{3}}{3}$$

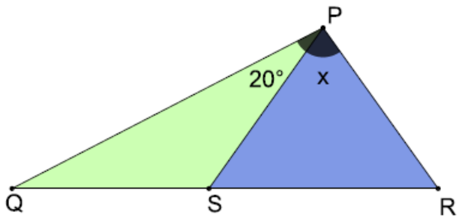
Maig 15, 16.- En la circumferència de diàmetre EB les cordes AB i ED son paral·leles. Si el quocient entre les mesures dels angles ∠AEB i ∠ABE es 4/5, quina és la mesura de l'angle ∠DCB?



Nivell: Batxillerat. Preparació OME.

Solució: Com EB és un diàmetre, el triangle ∆ABE és rectangle en A. Com el quocient entre les mesures dels angles ∠AEB i ∠ABE es 4/5, aquestos mesuren 40° i 50° respectivament. Com les cordes AB i ED són paral·leles, l'angle ∠DEB mesura també 50°. Per tant, els arcs DE, EA i AB sumen 80° + 100° + 80° = 260°. L'angle ∠BCD es la mitat d'aquesta suma, és a dir 130°

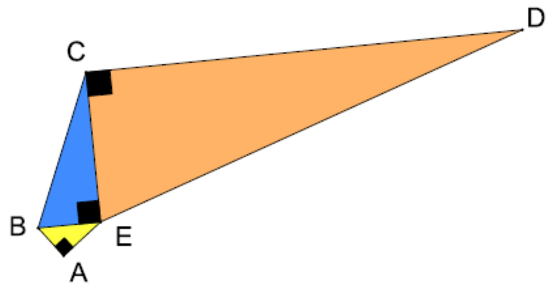
Maig 17.- En el triangle △PQR, S és el punt del costat QR que compleix QS=SP=PR. Si ∠QPS = 20°, què val l'angle ∠SPR?



Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: L'angle en Q és de 20° ja que ∆PQS és isòsceles, i això fa que en eixe mateix triangle l'angle en S siga de 140°. L'angle en S del triangle ∆PSR mesure 40°, igual que l'angle en R i d'ací l'angle x es de 100°.

Maig 18, 19: En la figura es veuen tres triangles rectangles, cap d'ells semblant a cap dels altres dos, i tots ells amb costats enters sent AB = 3. Trobar l'àrea del pentàgon ABCDE



Nivell: Preparació OME.

Solució: Degut a que els tres triangles són rectangles i tenen costats de longituds enteres, aquestos formen ternes pitagòriques. Sent AB = 3, l'única terna en la què intervé el 3 és en la terna 3, 4 i 5. Així què AE = 4 i BE = 5. A més, de en esta, el 5 intervé en la terna 5, 12 i 13, per tant, EC = 12 i BC = 13. Per últim, el 12 intervé en les ternes de la forma 3k, 4k i 5k i en la 12, 35 i 37. Com no hi ha triangles semblants, l'últim no pot tractar-se d'un triangle 3k, 4k i 5k. Per tant, CD = 35 i ED = 37. L'àrea resulta ser:

$$A = \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{5 \cdot 12}{2} + \frac{12 \cdot 35}{2} = 246$$

Maig 20.- Resoldre en N:

$$2^{2x^2-9x+4} = 5^{x^2-x-12}$$

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: L'única forma de que una potència de base 2 coincideixca amb una potència de base 5, és que l'exponent de les dues siga 0. Així què busquem una rail comú en els dos exponents. Podem resoldre les dues equacions i trobar la rail comú o recordar que el terme independent és el producte de les arrels de l'equació, així què busquem un divisor comú de 4 i de -12. La solució és 4.

Maig 21.- Quantes parelles de enters (m, n) compleixen la equació m + n = m·n?

Nivell: Preparació OME.

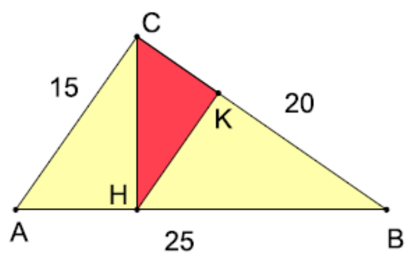
Solució: Tenim n + m = m·n, i així, n = m·n – m = m·(n – 1). Per tant, n és 0 o és divisible per n – 1, la qual cosa obliga a què n – 1 = ± 1, i d'ací n = 2 o de nou n = 0. Si n = 0 també m = 0. Si n = 2 també m = 2. Per tant hi ha dues solucions.

Maig 22.- En la llista de nombres A, B, C, D, E, F, G i H, tres qualsevol d'ells sumen 30. Si C = 5, quin n'és el valor de A + H?

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: C + D + E = 30 = D + E + F por la qual cosa C = F = 5. 30 = F + G + h = 5 + G + H i per tant G + H = 25.

Maig 23, 24.- En el triangle rectangle △ABC de costats 15, 20 i 25, els segments CH i HK són perpendiculars als costats AB i CB, respectivament. Quin n'és l'àrea del triangle △CHK?



Nivell: Preparació OMS.

Solució: Calculem l'àrea del triangle ΔABC de dues maneres:

$$2 \cdot A_{\Delta ABC} = \begin{Bmatrix} = BC \cdot AC = 15 \cdot 20 = 300 \\ = AB \cdot CH = 25 \cdot CH \end{Bmatrix} \Rightarrow CH = 12$$

Ara els triangles ΔABC i ΔCHK son semblants (al ser els dos rectangles i ser iguals els angles en B i H por tenir els costats que els generen perpendiculars) i la raó de semblança és la raó de les hipotenuses:

$$\frac{CH}{BC} = \frac{12}{25}$$

L'àrea del triangle ΔABC és 150 per la qual cosa l'àrea del triangle ΔCHK s'obté multiplicant aquest valor per el quadrat de la raó de semblança:

$$A_{\Delta CHK} = 150 \cdot \left(\frac{12}{25}\right)^2 = \frac{864}{25}$$

Maig 25.- Amb açò de la crisis la paga setmanal de Laia i Aitana s'ha retallat un 20% i un 12% respectivament. Abans sumaven 55 € i ara puja a 46 €, quant rep cadascuna?

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Si x i y son les pagues setmanals de Laia i Aitana abans dels retalls tindrem:

$$\left.\begin{array}{c} x + y = 55 \\ (x - 0{,}2x) + (y - 0{,}12y) = 46 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 25 \end{cases}$$

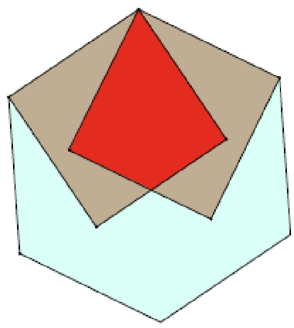
que passen a ser 24 € i 22 € després dels retalls

Maig 26.- Quin és el menor nombre múltiple de 36 amb suma de xifres 36?

Nivell: Preparació OMS.

Solució: El menor nombre amb suma de xifres 36 és el 9999, però no és múltiple de 36, perquè no és múltiple de 4 (ja que les dues últimes xifres, 99, no són un múltiple de 4). El següent nombre a considerar és el 19998, però no és múltiple de 36, perquè no és múltiple de 4 (ja que les dues últimes xifres, 98, no són un múltiple de 4). El següent a considerar seria el 29988, que ja compleix tots els requisits de l'enunciat.

Maig 27, 28.- Sobre dos costats contigus d'un hexàgon regular de costat 1, construïm dos quadrats, com indica la figura. Quina àrea té la regió on se solapen els dos quadrats?

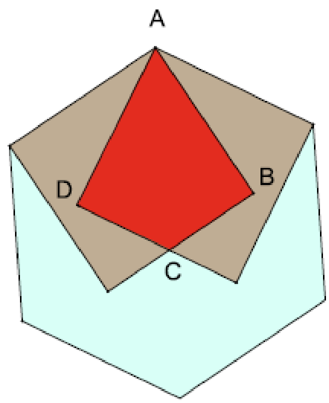


Nivell: Preparació OMS.

Solució: Tenim:

$$A_{ABCD} = 2 \cdot A_{\Delta ACB}$$

Com l'angle entre dos arestes consecutives d'un hexàgon regular és de 120°, l'angle $\angle CAB$ = 30°. Així, que, el triangle ΔCAB és un triangle 30°-60°-90°, amb AB = 1. Si CB = x, aleshores AC = 2x i al aplicar Pitàgores obtenim x = $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Per tant:



$$A_{ABCD} = 2 \cdot A_{\Delta ACB} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Maig 29.- Quants nombres de tres xifres compleixen que una xifra és el producte de les altres dos?

Nivell: Preparació OMS.

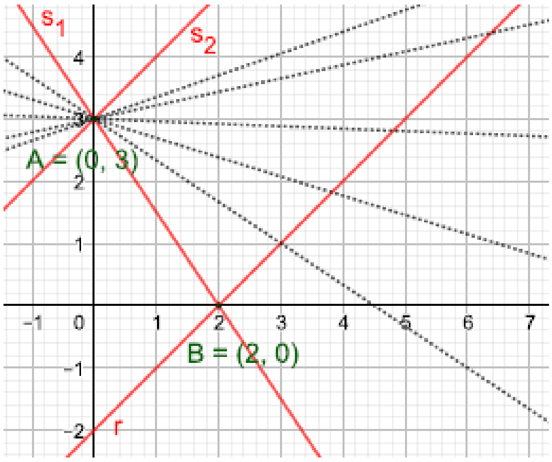
Solució: Elaborem una taula tenint en compte quina n'és la xifra producte.

xifra producte	Les altres xifres	Les tres xifres	Quantitat de casos
0	01, 02, …., 09	100, 200,…., 900	9
1	11	111	1
2	12	122, 212, 221	3
3	13	133, 313, 331	3
4	14, 22	441, 224	3+3
5	15	155, 515, 551	3
6	16, 23	616, 623	3+6
7	17	177, 717, 771	3
8	18, 24	818, 824	3+6
9	19, 33	919, 933	3+3

En total, 52.

Maig 30.- Les rectes x – y = 2 i mx + 3 = y es tallen en un punt de coordenades positives, quin n'és el major i menor valor de m?

Nivell: A partir de 3ESO.



Solució: Representem la recta r: y = x – 2.

Totes les rectes d'equació y = mx + 3 passen per (0, 3).

Per a que el punt de tall de les dues rectes tinga coordenades positives, dit punt ha d'estar en el primer quadrant.

Les rectes y = mx + 3 seran qualsevol de les rectes que estan entre les rectes s_1 i s_2 de la figura.

La recta s_1 passa per B(2, 0) $\Rightarrow$ 2m + 3 = 0 $\Rightarrow$ m = - 3/2.

La recta s_2 és paral·lela a la recta y = x – 2, per la qual cosa tenen la mateixa pendent m = 1.

Per tant – 3/2 < m < 1

Maig 31.- Siguen x i y els naturals més petits possibles per a què 360x siga un quadrat perfecte i 360y siga un cub perfecte. Trobar x i y

Nivell: A partir de 2ESO.

Solució: En la descomposició factorial d'un quadrat perfecte (cub) tots els exponents deuen ser parells (múltiples de tres). Com 360 = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

- Per a aconseguir un quadrat perfecte devem afegir un factor 2 i un factor 5 $\Rightarrow$ x = 10.
- Per a aconseguir un cub devem afegir un factor 3 i dos factores 5 $\Rightarrow$ y = 75