SOLUCIONS JUNY 2017

Autor: José Colón Lacalle. Professor jubilat

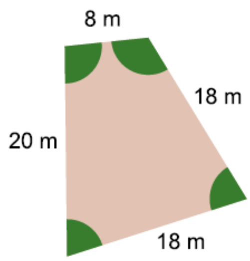
Col·lecció preparada en l'any 2001 per a la Olimpíada de Secundaria (OMS) del primer cicle de la ESO.

Juny 1.- Els participants en una desfilada poden desfilar en files de 3, o en files de 5 o en files de 25, però no poden fer-ho en files de 4 ni en files de 9. Si participen entre 1000 i 2000, qui n'és el nombre de participants?

Nivell: Preparació OMS (primer cicle)

Solució: Es calcula el m.c.m. de 3, 5 y 25, que es 75. Es busquen els múltiples de 75 entre 1000 i 2000. D'ells, s'eliminen els que siguen múltiples de 4 (les dues últimes xifres formen un nombre múltiple de 4) i els múltiples de 9 (la suma de totes les xifres és un múltiple de 9). Els que queden són els nombres buscats, que són: 1050, 1275, 1425, 1650, 1725, 1875 i 1950.

Juny 2, 3.- En un poble, la plaça té forma d'un quadrilàter com el de la figura. L'alcalde vol construir parterres en els quatre cantons de radi 3,5 m. Si el cost por m^2 de parterre és 150 €, quant haurà de gastar-se el municipi?



Nivell: Preparació OMS (primer cicle)

Solució: Degut a que la suma d'angles entre arestes consecutives d'un quadrilàter com el de la figura es 360° (perquè una diagonal del quadrilàter formen dos triangles els angles del qual sumen 2·180° = 360°), els quatre parterres formen un cercle de radi 3,5 m, d'àrea $\pi\cdot(3{,}5)^2 \approx$ 38,49 m^2, el costs dels quals ascendirà a (38,48·150 =) 5772,68 €.

Juny 4.- Què dígits falten en el producte?

$$\begin{array}{cccc} & 2 & * & * \\ \times & & * & * \\ \hline & * & 6 & 1 \\ * & * & * & \\ \hline * & * & 0 & 1 \end{array}$$

Nivell: Preparació OMS (primer cicle)

Solució:

$$
\begin{array}{rrrr}
 & 2 & 8 & 7 \\
\times & & 2 & 3 \\
\hline
 & 8 & 6 & 1 \\
5 & 7 & 4 & \\
\hline
6 & 6 & 0 & 1
\end{array}
$$

Juny 5.- En una biblioteca la tercera part dels llibres són de matemàtiques. Hi ha 30 llibres de Llengua i 24 de Ciències Socials. Si de Ciències Naturals hi ha tants com de Llengua. Quants llibres hi ha en total?

Nivell: Preparació OMS (primer cicle)

Solució: Si els llibres de matemàtiques són un terç del total, tots els demes son dos terços. Per tant hi ha:

$$\frac{3}{2} \cdot (30 + 24 + 30) = 126$$

llibres en total.

Juny 6.- En un sac blanc hi ha 2000 fesols blanques i en un sac roig hi ha 3000 fesols rojos. Del sac blanc se trauen 50 fesols i es mesclen amb les del roig. Del roig se trauen 50 fesols que es deixen en el sac blanc. Hi ha més fesols blancs en el sac blanc o en el roig?

Nivell: Preparació OMS (primer cicle)

Solució: Després de la primera extracció haurà 1950 fesols blancs en el saco blanc i 3000 fesols rojos i 50 fesols blancs en el sac roig. Després de la segona extracció (y fesols blancs y 50 – y fesols rojos) quedaran 1950 + y fesols blancs y 50 – y fesols rojos en el saco blanc y 2950 + y fesols rojos y 50 – y fesols blancs en el sac roig. Com y varia entre 0 i 50, hi ha més fesols blancs en el sac blanc que en el sac roig. Si la pregunta haguera segut: hi ha més fesols blancs en el sac roig o fesols rojos en el sac blanc?, la contestació haguera segut: hi ha el mateix nombre de fesols blancs en el sac roig que fesols rojos en el sac blanc.

Juny 7.- La zebra, l'elefant i el conill mengen carlotes en el pinso. El conill menja en tot un any les mateixes que l'elefant en dos dies i les que menja la zebra en cinc dies són les que menja l'elefant en un dia. Si entre els tres mengen 55 kg de carlotes per dia. Quant menja cada un d'ells per dia?

Nivell: Preparació OMS (primer cicle)

Solució: Si suposem que el conill menja x (carlotes per dia), tenim que l'elefant menja $\frac{365}{2}\mathrm{x}$ (carlotes per dia) i que la zebra menja $\frac{365}{10}\mathrm{x}$ (carlotes per dia). Com entre els tres mengen 55 kg de carlotes per dia, tenim que:

$$x + \frac{365x}{2} + \frac{365x}{10} = 55 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{4} = 0{,}25 \text{ kg de carlotes per dia}$$

El que porta a que l'elefant menja $\frac{365}{8}$ (= 45,625) kg de carlotes per dia i que la zebra menja $\frac{73}{8}$ (= 9,125) kg de carlotes per dia.

Juny 8.- Laia pensa en tres números. Sumant-los dos a dos donen 38, 44 i 52. Quins són?

Nivell: Preparació OMS (primer cicle)

Solució: Siguen A; B i C els nombres pensats per Laia. Aleshores: A + B = 38, B + C = 44 i A + C = 52. Sumant les tres equacions tenim 2(A + B + C) = 134. D'on A + B + C = 67. Per últim: A = (A + B + C) – (B + C) = 67 – 44 = 23; B = (A + B + C) – (A + C) = 67 – 52 = 15 i C = (A + B + C) – (B + A) = 67 – 38 = 29.

Juny 9.- La APAC té 50 socis. Aquest dissabte cada soci present va plantar 17 arbres i el diumenge cada soci present va plantar 20 arbres. En total s'han plantat 1545 arbres. Quants socis van faltar el dissabte i quants el diumenge?

Nivell: Preparació OMS (primer cicle)

Solució: Siga x (y) el nombre de socis que va faltar el dissabte (diumenge). Del 'enunciat tenim: 17·(50 – x) + 20·(50 – y) = 1545. Que, després de simplificar, es converteix en: 17x + 20 y = 305. A més està, òbviament, la condició de que x i y siguen naturals (incloent el zero). Com

$$y = \frac{305 - 17x}{20}$$

i y ha de ser natural tindrem:

1.- 305 – 17x ha de ser múltiple de 20 i por tant de 5. El que implica que (com 305 és múltiple de 5) 17x és múltiple de 5 i, com 17 és primer, que x és múltiple de 5, es a dir que x acaba en 0 o 5

2.- L'expressió anterior correspon a una recta amb pendent negativa (- 0,85) i ordenada en l'origen 15,25, que talla a l'eix X en x = $\frac{305}{17} < 17{,}95$, per el que x $\in$ {0, 1, 2, …, 17}

D'1 i 2 tenim que les possibles solucions de x són 0, 5, 10 o 15. Estudiem aquestes possibilitats:

Si x = 0, aleshores y = 15,25 que no és admissible.

Si x = 5 aleshores y = 11 que és admissible.

Si x = 10, aleshores y = 27/4 que no és admissible.

Si x = 15, aleshores y = 5/2 que no és admissible.

Per tant, el dissabte faltaren 5 socis i el diumenge faltaren 11 socis.

Juny 10.- Com mesuraries 12 minuts amb dos rellotges d'arena, un de 15 minuts i altre de 9 minuts?

Nivell: Preparació OMS (primer cicle)

Solució: Tindrem:

00:00. Fiquem els dos rellotges a la vegada.

00:09. Donem la volta al rellotge de nou minuts.

00:15. Donem la volta al rellotge de quinze minuts.

00:18. Acaba el rellotge de nou minuts. Comencem a contar els dotze minuts.

00:30. Acaba el rellotge de quinze minuts. Acaba el període de dotze minuts.

Juny 11.- Cada dia Aitana es menja el 20% de las galetes del pot. Si el dimecres es menja 16, Quantes hi havia el dilluns?

Nivell: Preparació OMS (primer cicle)

Solució: Siga x el nombre de galetes de les que disposa Laia el dilluns. Després de menjar el 20% d'elles queda el 80% d'elles, es a dir queden 0,8·x galetes. El dimarts, després de menjar la seua ració, queden el 80% de les que quedaven el dilluns, es a dir queden 0,8·0,8·x. El dimecres menja el 20% de les que queden el dimarts, es a dir menja 0,2·0,8·0,8·x que deu ser 16. D'aquí:

$$\mathrm{x} = \frac{16}{0{,}2 \cdot 0{,}8^2} = 125$$

Juny 12.- Aitana, Laia i Viki van d'excursió. Aitana porta 5 pots de refresc, Laia porta 4 i Viki cap. A l'hora de menjar es reparteixen a parts iguals els refrescs. Com Viki no portava pots els dona 20 €. Com deuen repartir-se Laia i Aitana els diners?

Nivell: Preparació OMS (primer cicle)

Solució: Cada una de las tres beu (9/3 =) 3 pots de refresc. Per tant, Aitana li dona a Viki 2 pots i Laia li dona a Viki 1 pot. Per tant Aitana deu rebre $\left(\frac{2}{3} \cdot 20 =\right)$ 13,33 € i a Laia li correspon $\left(\frac{1}{3} \cdot 20 =\right)$ 6,67 €

Juny 13.- Una gallina pon dos ous en tres dies. Quants dies es necessiten per a que 4 gallines posen dos dotzenes de ous?

Nivell: Preparació OMS (primer cicle)

Solució: Es tracta d'un problema de proporcionalitat composta amb relació directa entre totes les variables intervinents (nombre de gallines, ous posats i dies)

gallines		ous		dies
1	______________	2	______________	3
↓(·4)		↓(·4)		
4	______________	8	______________	3
		↓(·24/8)		↓(·24/8)
4	______________	24	______________	**9**

Juny 14, 15.- José ha comprat un pastis, però a l'hora de menjar-se'l ja havia desaparegut. Les seues cinc companyes de pis van dir:

Laia: "Açò és obra d'una sola de nosaltres."

Aitana: "No, de dues de nosaltres."

Viki: "No, de tres de nosaltres."

Andrea: "No, de quatre de nosaltres."

Rosa: "No, de totes nosaltres"

Si les innocents diuen la veritat i les culpables menteixen, quina o quines es van menjar el pastis?
Nivell: Preparació OMS (primer cicle)
Solució: Com les afirmacions de las cinc companyes de pis són contradictòries entre sí, sols una afirmació es certa i totes les demés falses. Les que menteixen són les culpables i com hi ha quatre frases falses la que diu veritat deu ser Andrea.

Juny 16.- En una tenda es van vendre cert dia quaderns per 139,5€, uns a 4,5€ i altres a 6€. Al dia següent dels de 4,5 es veneren un terç més que el dia anterior i dels de 6 un terç menys que el dia anterior per un total de 138€. Quants quaderns es van vendre en els 2 dies?
Nivell: Preparació OMS (primer cicle)
Solució: Siguen x (y) el nombre de quaderns de 4,5 (6) € venuts el primer dia. Aleshores:

$$\left.\begin{array}{r} 4{,}5x + 6y = 139{,}5 \\ 4{,}5\left(x + \frac{x}{3}\right) + 6\left(y - \frac{y}{3}\right) = 138 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 3x + 4y = 93 \\ 3x + 2y = 69 \end{array}\right\}$$

Restant les dues equacions, pleguem a 2y = 24, es a dir y = 12 i substituint, per exemple, en la primera equació pleguem a x = 15. En total s'han venut $\left(x + \frac{4x}{3} = 15 + 20 =\right)$ 35 quaderns de 4,5€ y $\left(y + \frac{2y}{3} = 12 + 8 =\right)$ 20 quaderns de 6€.

Juny 17.- Un ciclista deu fer un viatge de 120 km. Com surt amb una hora de retard, deu augmentar en 4 Km/h la seua velocitat, per a plegar a temps. Quina és la velocitat habitual del ciclista?

Nivell: Preparació OMS (primer cicle)

Solució 1: Si x és la velocitat habitual del ciclista (en km/h) i t el temps (en h) que tarda habitualment a realitzar el recorregut de 120 km, tenim:

$$\begin{cases} xt = 120 \\ (x+4)(t-1) = 120 \end{cases} \quad \begin{cases} xt = (x+4)(t-1) \\ xt = 120 \end{cases}$$

De la primera equació, desenvolupant pleguem a: 1 + x/4 = t i substituint en la segona:

$$x \cdot \left(1 + \frac{x}{4}\right) = 120; \quad 4x + x^2 - 480 = 0; \quad x = 20 \ (x = -24 \text{ no té sentit})$$

Solució 2: Per prova i errada. Si la seua velocitat habitual fora 60 km/h tardaria 2 hores i anant a 64 deuria tardar 1 hora. Com açò últim no es compleix no va a 60 km/h. Si la seua velocitat habitual fora 40 km/h tardaria 3 hores i anant a 44 deuria tardar 2 hores. Com açò últim no es compleix no va a 40 km/h. Si la seua velocitat habitual fora 30 km/h tardaria 4 hores i anant a 34 deuria tardar 3 hores. Com açò últim no es compleix, no va a 60 km/h. Si la seua velocitat habitual fora 20 km/h tardaria 6 hores i anant a 24 deuria tardar 5 hores. Com açò últim es compleix va a 20 km/h.

Juny 18.- Comprem 10 kg de prunes per a fer melmelada. Al pelar-les i llevar-les l'os es perd 1/5 del pes. Es posa la mateixa quantitat de sucre i es cou. Durant la cocció es perd ¼ del pes. Quants quilos de melmelada s'aconsegueixen?

Nivell: Preparació OMS (primer cicle)

Solució: Al pelar-les i llevar-les l'os ens quedem amb (10 – 10/5 =) 8 quilos de massa. Al agregar igual quantitat de sucre tindrem 16 quilos de massa. Al coure aquesta massa ens quedem amb (16 – 16/4 =) 12 quilos de melmelada.

Juny 19, 20.- Trobar tots els trios de dígits no necessàriament diferents, que compleixen:

1.- Són la unitat o nombres primers.

2.- Tots els nombres de dues xifres que es poden formar amb ells són primers.

3.- Tots els nombres de tres xifres que es poden formar amb ells son primers

Nivell: Preparació OMS (primer cicle)

Solució: Els dígits a considerar són: 1, 2, 3, 5 y 7. Hem d'eliminar el 2 i el 5 per que els nombres acabats en 2 són divisibles per 2 i els acabats en 5 són divisibles por 5. Així que ens queden: 1, 3 y 7. Amb ells ja podem fer un diagrama d'arbre manejable:

$$\begin{array}{r}
1--111\\
1--3--113\\
7--117\\
1--131\\
1--3--3--133\\
7--137\\
1--171\\
7--3--173\\
7--177\\
1--111\\
1--3--313\\
7--317\\
1--331\\
3--3--3--333\\
7--337\\
1--371\\
7--3--373\\
7--377\\
1--711\\
1--3--713\\
7--717\\
1--731\\
7--3--3--733\\
7--737\\
1--771\\
7--3--773\\
7--777
\end{array}$$

Els trios que busquem no deuen contenir ni dos tres, ni dos sets, ni tres tresos ni tres sets ni tres uns, per què 33 i 77 són múltiples de 11, y 333 y 777 són múltiples de 111 i 111 es múltiple de 3. Ens queden per investigar els trios

$$\begin{array}{l}
\qquad\qquad 3\\
1--\;1--\;7--711 \text{ es múltiple de } 3\\
\qquad 3--7--371 \text{ es múltiple de } 7
\end{array}$$

Es a dir, l'únic trio que compleix les condicions és el trio format per dos uns i un tres.

Juny 21.- Laia reparteix tots els seus abaloris entre les seues sis amigues. Quan es troba amb una li dona la meitat dels que li queden més un i aixina els reparteix tots. Quants abaloris tenia?

Nivell: Preparació OMS (primer cicle)

Solució: Utilitzarem la tècnica de "la marxa enrere". Com dos és l'únic nombre que és igual a la seua meitat més un tenim que abans de trobar-se amb la sexta amiga tenia dos abaloris i se'ls dona a ella. Eixos 2 abaloris que tenia son la meitat dels que tenia abans de trobar-se a la quinta amiga (x) menys 1. Es a dir $\left(\frac{x}{2}-1=2\right)$ tenia, abans de trobar-se a la quinta amiga (x =) 6 abaloris. D'eixos 6, la meitat més un, es dir 4, són els que li dona a la quinta amiga. Prosseguint d'aquesta manera tenim la següent taula:

Amiga	Li dona	Tenia abans de trobar-la
6	2	2
5	4	6
4	8	14
3	16	30
2	32	62
1	64	126

Juny 22.- Aitana reparteix els seus discos: A Laia li dona la mitat més mig i a Viki li dona la mitat dels que li queden més mig. Aixina li queda encara un disc. Quants en tenia al principi?

Nivell: Preparació OMS (primer cicle)

Solució: Utilitzarem "la marxa enrere". L'última persona amb la que se troba és Viki. Com després de veure-la encara té un disc, si x són els discos que tenia abans de l'encontre, tenim $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=1$ (ja que a Viki li dona la mitat dels que tenia més mig) d'on x = 3 i dona a Viki dos. Si després de trobar a Laia, Aitana tenia 3 discos, abans de trobar-la tenia y amb $\frac{y}{2}-\frac{1}{2}=3$ (ja que a Laia li dona la mitat dels que tenia més mig) d'on y = 7 i dona a Aitana 4. Es a dir, Aitana abans dels encontres disposava de set discos.

Juny 23.- El pas d'un port de muntanya requereix anar durant 6 jornades. No obstant això, una persona només pot portar menjar per a 4 dies. Quantes jornades ha de gastar per a passar el port en solitari admetent que pot fer expedicions curtes per a transportar vitualles?

Nivell: Preparació OMS (primer cicle)

Solució: Siguen A, B, C, D, E, F, G, les punts que divideixen la ruta en jornades.

Primera jornada: Eixim de A amb 4 racions i pleguem a B consumint una ració. Deixem en B dos racions.

Segona jornada: Regressem a A consumint la quarta ració.

Tercera jornada: Eixim de A amb 4 racions. Consumim una ració. Pleguem a B, agafem una ració de les que allí havia.

Quarta jornada: Pleguem a C. Consumim una ració i com portàvem quatre racions, deixem una ració en C i carregem amb dos racions.

Quinta jornada: Regressem a B. consumim una ració. Ens queda una ració.

Sexta jornada: Regressem a A. Consumim la ració que portàvem.

Sèptima jornada: Eixim de A, amb 4 racions. Pleguem a B. Consumim una ració i carreguem amb la que havia en B.

Octava jornada: Pleguem a C. Consumim una ració i carreguem la ració que havia allí.

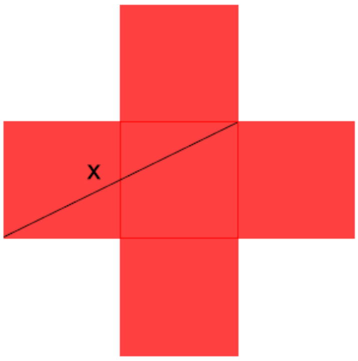
Novena jornada: Pleguem a D. Consumim una de las quatre racions que portàvem.

Dècima jornada: Pleguem a E. Consumim una de las tres racions que portàvem.

Onzena jornada: Pleguem a F. Consumim una de las dos racions que portàvem.

Dotzena jornada: Pleguem a G. Consumim la ració que portàvem.

Juny 24.- Calcula l'àrea i el perímetre de la creu sabent que està formada per cinc quadrats i que la distancia x de la figura és 10 m

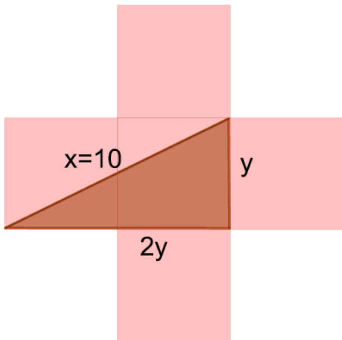


Nivell: Preparació OMS (primer cicle)

Solució: Si y és el costat del quadrat que genera la creu tindrem al aplicar el teorema de Pitàgores al triangle senyalat: $y^2 + 4y^2 = 100, \Rightarrow y^2 =$ Àrea $= 20\ m^2$.

Per al perímetre P tenim:

$$P = 12y = 12 \cdot \sqrt{20} = 24 \cdot \sqrt{5}\ \text{m}$$



Juny 25.- Laia, Aitana i Viki prenen cafè o té, juntes tots els dies, d'acord a las següents regles: Si Laia demana cafè, Aitana demana el mateix que Viki. Si Aitana demana cafè, aleshores Laia demana el que no demana Viki. Si Viki demana té, aleshores Laia i Aitana demanen el mateix Quina d'elles demana sempre el mateix?

Nivell: Preparació OMS (primer cicle)

Solució: Laia demana sempre té. Imaginem que demana cafè. Aleshores Aitana i Viki deuen prendre o los dos, té o los dos, cafè. Aitana i Viki no poden prendre cafè perquè si Aitana prenguera cafè, Viki coincidiria amb Laia. Si Aitana i Viki prengueren té, Laia i Aitana deurien demanar el mateix. Per tant, és impossible que Laia demane cafè.

Juny 26.- Amb una balança de platets es pot pesar des de 1 a 13 kg utilitzant sols 3 pesos. Indica quines han de ser aquestes tres pesos i com realitzar cadascuna de las pesades

Nivell: Preparació OMS (primer cicle)

Solució: Els pesos son els de 1, 3 i 9 quilos.

Pes desconegut	Primer platet	Segon platet
1	1	**1**
2	3	1 + **2**
3	3	**3**
4	3 + 1	**4**
5	9	3 + 1 + **5**
6	9	3 + **6**
7	9 + 1	3 + **7**
8	9	1 + **8**
9	9	**9**
10	9 + 1	**10**
11	9 + 3	1 + **11**
12	9 + 3	**12**
13	9 + 3 + 1	**13**

Juny 27.- El 20% de la humanitat disposa del 80% de la riquesa. Estima quantes vegades és més rica una persona d'aquest 20% que una altra de la resta de la humanitat?

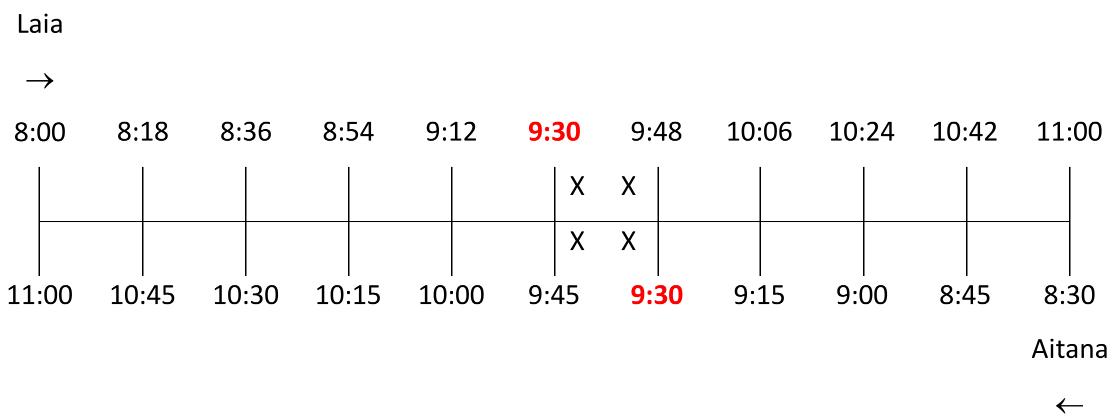
Nivell: Preparació OMS (primer cicle)

Solució: Cada persona del grup del 20% té (80/20 =) 4 vegades la unitat de mesura de la riquesa. Cada persona del grup del 80% té (20/80 =) ¼ vegades la unitat de mesura de la riquesa. Com (1/4)·16 = 4, cada persona del grup del 20% es 16 vegades més rica que una persona del grup del 80%

Juny 28, 29.- Laia i Aitana van passar la nit en els refugis A i B, respectivament. Al matí següent, Laia camina cap a B i Aitana cap a A, les dos a velocitats constants i per una senda que travessa una arbreda. Laia va eixir de A a les 8 h i va arribar a B a les 11, mentres que Aitana va eixir de B a les 8:30 i va arribar a A a les 11. Les dos van entrar en l'arbreda a la mateixa hora cada una seguint la seua direcció i una d'elles va eixir de l'arbreda 3 minuts abans que l'altra. A quina hora va eixir Laia de l'arbreda?

Nivell: Preparació OMS (primer cicle)

Solució: Laia tarda tres hores (180 minuts) en recorre tot el camí. Aitana tarda dues hores i mitja (150 minuts) en recórrer tot el camí. Com Aitana recorre tot el camí en 30 minuts menys que Laia i l'arbreda en 3 minuts menys que Laia, podem dividir tot el trajecte en (30/3 =) deu trossos. Laia recorre cada tros en 18 minuts i Aitana recorre cada tros en 15 minuts. Podem fer un esquema com el d'abaix.



Veiem que comencen a recórrer l'arbreda a les 9:30, y Laia ix d'ella a les 9:48

Juny 30.- Las tres cares distintes d'un ortoedre tenen 6, 8 i 12 dm^2 d'àrea. Quin és el seu volum?

Nivell: Preparació OMS (primer cicle)

Solució: Si les tres dimensions de l'ortoedre son a, b i c, tenim: $a \cdot b = 6$; $b \cdot c = 8$; $c \cdot a = 12$. I multiplicant les tres equacions: $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 6 \cdot 8 \cdot 12$. D'on:

$$V = a \cdot b \cdot c = \sqrt{6 \cdot 8 \cdot 12} = 24$$