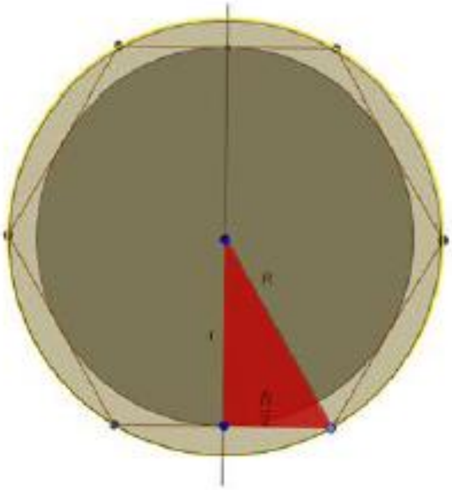
SOLUCIONES OCTUBRE 2017

AUTOR: Mario Mestre. INS “Pont de Suert”. L’Alta Ribagorça

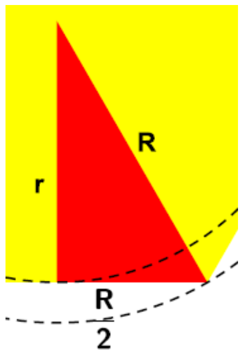


Octubre 1-8: En un hexágono regular hemos inscrito y circunscrito dos circunferencias. Si el área de la corona es 4π, hallar el área del hexágono

Nivel: 3ESO

Solución: Si R (r) es el radio de la circunferencia circunscrita (inscrita) en el hexágono tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi &= \pi(R^2 - r^2) \\ R^2 &= r^2 + \frac{R^2}{4} \end{aligned}\right\}$$



Cuya solución es: R = 4 y $r = 2\sqrt{3}$

Por último:

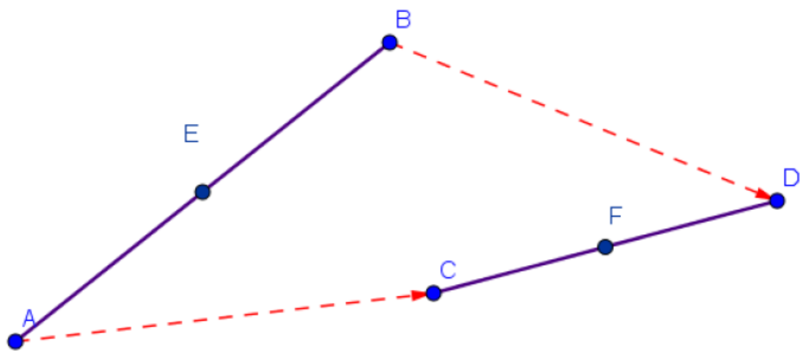
$$A_{\text{hexágono}} = 12 \cdot A_{\text{triáangulo rojo}} = 12\frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$$

Octubre 2: Sean dados los segmentos AB y CD, con E y F sus puntos medios. Demostrar:

$$\overrightarrow{\mathbf{AC}} + \overrightarrow{\mathbf{BD}} = \mathbf{2}\overrightarrow{\mathbf{EF}}$$

Nivel: Segundo de bachillerato

Solución:



$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{FD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC}) + (\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD}) =$$

$$2\,\overrightarrow{EF} + (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FD}) =$$

$$2\overrightarrow{EF} + (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CF}) =$$

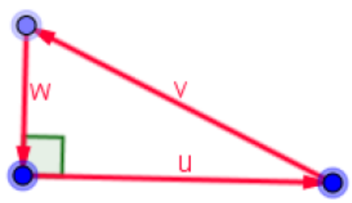
$$2\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EE} + \overrightarrow{FF} =$$

$$2\overrightarrow{EF} + \vec{O} + \vec{O} = 2\overrightarrow{EF}$$

<u>Octubre 3:</u> Demostrar vectorialmente el teorema de Pitágoras y que en un paralelogramo la suma de cuadrados de las diagonales es igual a la suma de cuadrados de los lados

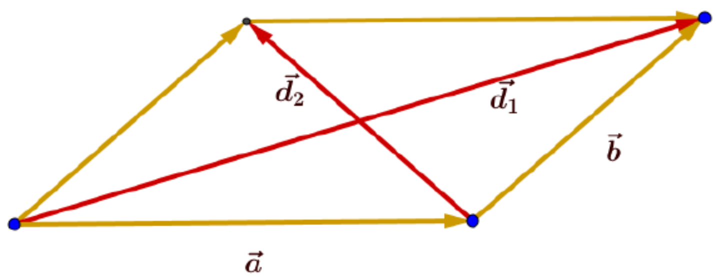
<u>Nivel:</u> Segundo de bachillerato.

<u>Solución:</u>



w+u =v
v·v=|v|^2·cos0º=|v|^2
u·w= 0 (perpendiculars)

(w+u)(w+u)=w·w+2uw+u·u=|w|^2+0+|u|^2



($d_1^2+d_2^2=2a^2+2b^2$)

$$|\vec{d_1}|^2 + |\vec{d_2}|^2 = \vec{d_1}\cdot\vec{d_1} + \vec{d_2}\cdot\vec{d_2} =$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) + (\vec{b}-\vec{a})(\vec{b}-\vec{a}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$$

<u>Octubre 4:</u> Dani sale de su casa con su colección de cromos. Cada vez que se encuentra con un amigo le da la mitad de los que tiene más uno. Después del sexto amigo se queda sin cromos. ¿Cuántos tenía?

<u>Nivel</u>: A partir de 2ESO

<u>Solución:</u> Tenemos el siguiente diagrama, considerando que Dani sale con x cromos

	Le da	Le quedan
Primer amigo	$\frac{x}{2}+1$	$\frac{x-2}{2}$
Segundo amigo	$\frac{x-2}{4}+1$	$\frac{x-6}{2}$
Tercer amigo	$\frac{x-6}{4}+1$	$\frac{x-14}{8}$
Cuarto amigo	$\frac{x-14}{16}+1$	$\frac{x-30}{16}$
Quinto amigo	$\frac{x-30}{32}+1$	$\frac{x-62}{32}$
Sexto amigo	$\frac{x-62}{64}+1$	$\frac{x-126}{64}$

Como después del sexto amigo ya no le quedan cromos, necesariamente x = 126. También, sin necesidad de recurrir al álgebra, por el procedimiento de la "marcha atrás" (empezando por el sexto amigo al que le da 2 y se queda sin ningún cromo):

	Le da	Le quedan
Primer amigo	64	62
Segundo amigo	32	30
Tercer amigo	16	14
Cuarto amigo	8	6
Quinto amigo	4	2
Sexto amigo	2	0

Luego al salir de casa llevaba (64 + 52 =) 126 cromos

<u>Octubre 5:</u> Demostrar vectorialmente la identidad:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

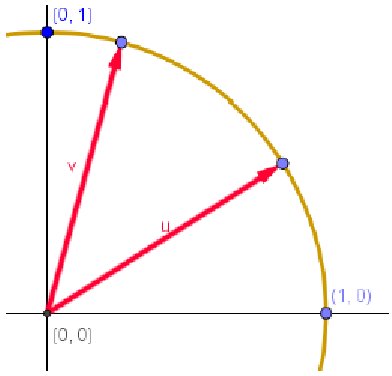
<u>Nivel:</u> Segundo de bachillerato.

<u>Solución:</u>

Sean α y β los ángulos que forman los vectores **u** y **v** con el eje de abscisas, respectivamente. Al ser vectores unitarios, tendremos:

u = (cosα, sinα)

v = (cosβ, sinβ)



u·v=(cos α ,sin α)·(cos β ,sin β)=cos α ·cos β + sin α sin β

u·v=|**u**||**v**|cos (α - β)=1·1· cos (α - β)

cos (α - β)=cos α ·cos β + sin α sin β

Octubre 6: La aguja minutera está m minutos por detrás de la horaria. ¿Cuánto tiempo ha de pasar para que esté n minutos por delante?

Nivel: A parir de segundo de ESO.

Solución: Sea x el tiempo necesario para que la minutera esté n minutos después de la horaria por primera vez. El tiempo x se compone de tres sumandos: los m minutos que va por detrás, los n minutos que debe ir por delante y el tiempo que describe la horaria en esos x minutos. Como:

$$\mathrm{v_h} = \frac{5\ \mathrm{min}}{60\ \mathrm{min}} = \frac{1}{12}\,\mathrm{min}/_{\mathrm{min}}$$

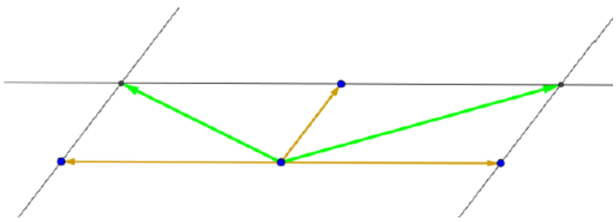
Tendremos:

$$\mathrm{m} + \mathrm{n} + \frac{\mathrm{x}}{12} = \mathrm{x} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x} = \frac{12}{11}(\mathrm{m} + \mathrm{n})$$

Octubre 7: Demostrar vectorialmente que las bisectrices de los ángulos que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y los vectores $-\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares.

Nivel: segundo de bachillerato.

Solución:



Haciendo el producto escalar:

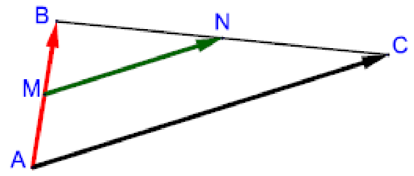
$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(-\vec{u}+\vec{v}) = -\vec{u}\vec{u}+\vec{u}\vec{v}-\vec{v}\vec{u}+\vec{v}\vec{v} = -|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2 =$$

Para que sean las bisectrices hemos de imponer la condición: $|\vec{u}| = |\vec{v}|$

Con lo que el producto escalar anterior es igual a cero.

Octubre 9: Probar vectorialmente, que, si M y N son los puntos medios de los segmentos AB y BC, entonces:

$$\overrightarrow{\mathbf{MN}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\overrightarrow{\mathbf{AC}}$$



Nivel: Segundo de bachillerato.

Solución:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Octubre 10: En la cartera tenemos un billete de cada uno de los siguientes valores: 5 €, 10 €, 20 €, 50 € y 100 €. ¿Cuántas cantidades de dinero diferentes podemos formar?

Nivel: A partir de 4ESO.

Solución: Tendremos

Cantidades que se pueden generar con un único billete = C_1^5 = 5

Cantidades que se pueden generar con dos billetes = C_2^5 = 10

Cantidades que se pueden generar con tres billetes = C_3^5 = 10

Cantidades que se pueden generar con cuatro billetes = C_4^5 = 5

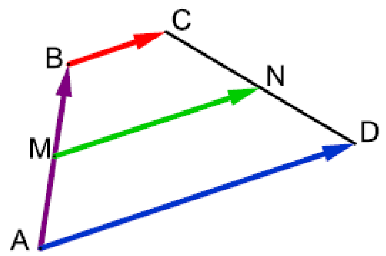
Cantidades que se pueden generar con cinco billetes = C_5^5 = 1

Hay un total de 31 cantidades diferentes que se pueden generar con esos billetes.

También se puede hacer un diagrama de árbol.

Octubre 11: Si BC//AD y M y N son los puntos medios de AB y CD, demostrar vectorialmente que

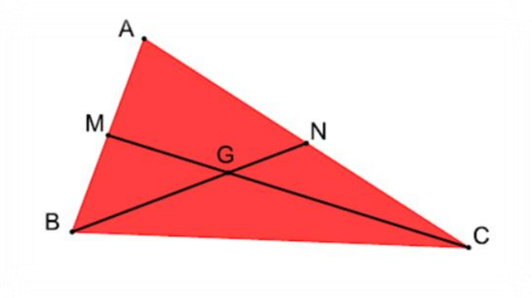
$$\overrightarrow{\mathbf{MN}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\overrightarrow{\mathbf{AD}} + \overrightarrow{\mathbf{BC}}\right)$$



Nivel: Segundo de bachillerato.

Solución: Se tiene:

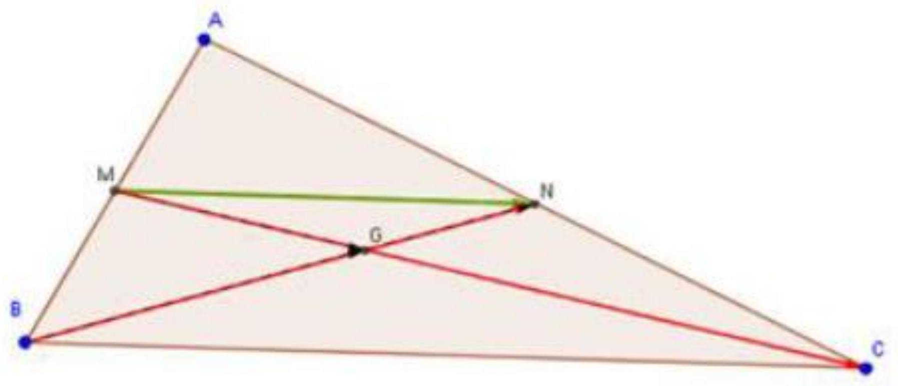
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$



Octubre 12-13: Sea G el baricentro de un triángulo, demostrar vectorialmente que G divide cada mediana en la relación 2:1

Nivel: Segundo de bachillerato.

Solución:



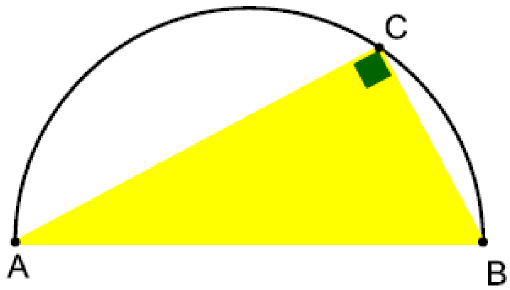
Sean M y N los puntos medios de los lados AB y AC. Por el teorema de la paralela media se cumple: $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$. Como $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GN}$ y $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC}$ tenemos:

$$\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GN} \quad \Rightarrow \quad \left(\overrightarrow{BG} - 2\overrightarrow{GN}\right) + \left(\overrightarrow{GC} - 2\overrightarrow{MG}\right) = \vec{0}$$

Por otra parte, tenemos $\overrightarrow{BG} \parallel \overrightarrow{GN}$ ($\overrightarrow{GC} \parallel \overrightarrow{MG}$) y por tanto los vectores son proporcionales. Si $\overrightarrow{BG} = \alpha\overrightarrow{GN}$ y $\overrightarrow{GC} = \beta\overrightarrow{MG}$ tenemos:

$$(\alpha - 2)\overrightarrow{GN} + (\beta - 2)\overrightarrow{MG} = \vec{0}$$

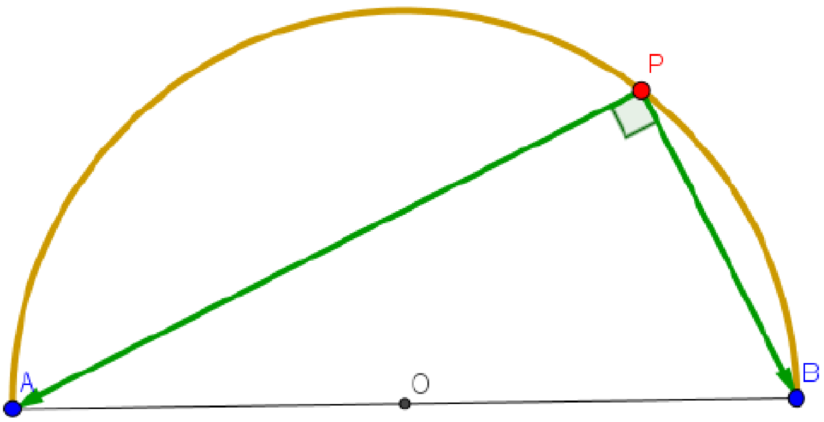
Por último, como $\overrightarrow{GN}$ y $\overrightarrow{MG}$ no son paralelos, llegamos a $\alpha = 2$ y $\beta = 2$



Octubre 14: Demostrar vectorialmente que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto

Nivel: Segundo de bachillerato.

Solución: Tenemos:



$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB}\right)=\left|\overrightarrow{PO}\right|^2+\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$$

$$r^2+\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{PO}\cdot(-\overrightarrow{OB})+r^2\cos 180^\circ=r^2-r^2=0$$

Octubre 15: En un tronco de cono, la generatriz es el doble del radio de la base grande. Si el área lateral es 54 cm^2 y la total es 78 cm^2, ¿cuál es su volumen?

Nivel: A partir de 4ESO.

Solución: Tenemos:

$$\begin{aligned}&V=\frac{h}{3}(B+b+\sqrt{Bb})\\&B=\pi R^2\\&b=\pi r^2\\&A_L=54=\pi(R+r)g\Rightarrow 54=\pi(R+r)2R\Rightarrow R+r=\frac{27}{\pi R}\ (*)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&A_T-A_L=B+b\Rightarrow 24=\pi R^2+\pi r^2\\&27=\pi R^2+\pi rR\ \ (*)\\&24=\pi R^2+\pi r^2\end{aligned}$$

Las dos últimas ecuaciones forman un sistema con incógnitas. Restándolas:

$$3=\pi Rr-\pi r^2\Rightarrow R=\frac{3+\pi r^2}{\pi r}$$

Sustituyendo en (*)

$$\frac{3+\pi r^2}{\pi r}+r=\frac{27\pi r}{\pi(3+\pi r^2)}$$

$$\frac{3+\pi r^2+\pi r^2}{\pi r}=\frac{27r}{(3+\pi r^2)}$$

$$(3+2\pi r^2)(3+\pi r^2)=27\pi r^2$$

$$9+9\pi r^2+2\pi^2r^4=27\pi r^2$$

$$2\pi^2r^4-18\pi r^2+9=0$$

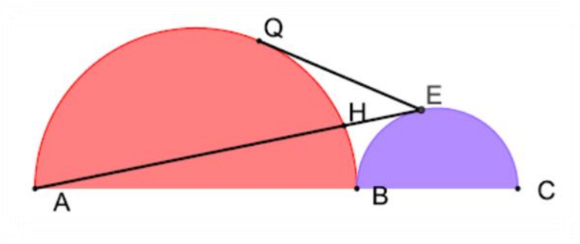
$$r^2=\frac{18\pi\pm\sqrt{252\pi^2}}{4\pi^2}=\frac{9\pm3\sqrt{7}}{2\pi}$$

$$h=\sqrt{g^2-(R-r)^2}=\sqrt{(2R)^2-(R-r)^2}=\sqrt{3R^2+2Rr-r^2}$$

$$r_1=\sqrt{\frac{9+3\sqrt{7}}{2\pi}}=1{,}64184 \text{ ==> } h_1=\sqrt{\frac{69-3\sqrt{7}}{\pi}}=4{,}408727 \text{ ==> } V_1=52{,}12383379\,cm^3$$

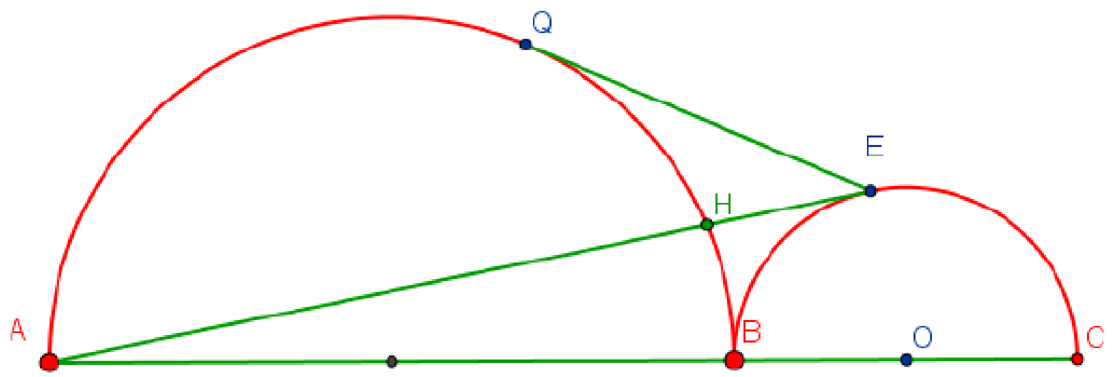
$$r_2=\sqrt{\frac{9-3\sqrt{7}}{2\pi}}=0{,}41126 \text{ ===> } h_2=4{,}94873 \text{ ===> } V_2=45{,}4150734\ cm^3$$

Octubre 16-17: En la figura, los segmentos AB y BC son diámetros tales que AB es doble que BC. El segmento AE es tangente en E y EQ es tangente en Q. Si HE $=\sqrt{5}$, calcular EQ



Nivel: A partir de 4ESO.

Solución 1: Tenemos:



Los triángulos ΔAHB y ΔAEO son semejantes pues tienen en común el ángulo ∠A y son rectángulos en H (al ser AB un diámetro) y en E (al ser la tangente perpendicular al radio en una circunferencia). Por tanto:

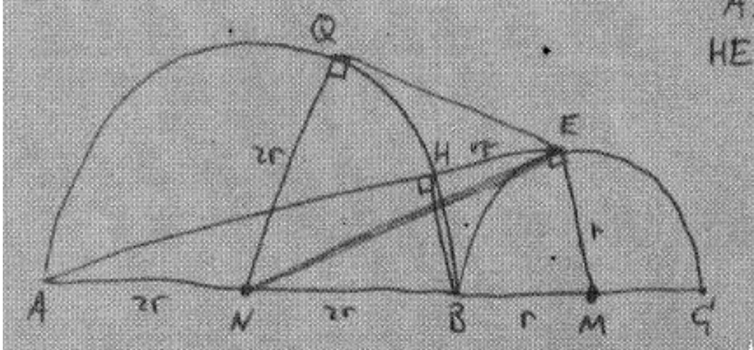
$$\frac{AH}{AB}=\frac{HE}{BO}$$

$$BO=r$$
$$AB=2R=4r$$

$$AH=\frac{AB}{BO}HE=\frac{4r}{r}\sqrt{5}=4\sqrt{5}$$

Y ahora por el teorema de la tangente: $QE^2 = AE\cdot HE \Rightarrow QE^2=\left(4\sqrt{5}+\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{5}=25 \ \Rightarrow\ QE=5$

Solución 2: Henk Reuling @HenkReuling

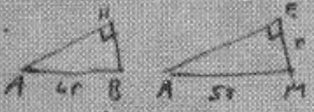


$AB = 2BC' = 4r$

$HE = \sqrt{5}$

$? = EQ$

$\Delta ABH \sim \Delta AME$



Pyth. ΔAME: $AE = r\sqrt{24} = 2r\sqrt{6}$

$\rightarrow AH = \frac{4}{5}\cdot AE = \frac{8}{5}r\sqrt{6}$

$EH = AE - AH = 2r\sqrt{6} - \frac{8}{5}r\sqrt{6} = \frac{2}{5}r\sqrt{6}$

$EH = \sqrt{5} \rightarrow \frac{2}{5}r\sqrt{6} = \sqrt{5} \rightarrow r = \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \frac{5}{12}\sqrt{30} \rightarrow r^2 = \frac{25}{144}\cdot 30 = \frac{125}{24}$

$\alpha = \angle AME$

$\cos(\alpha) = \frac{ME}{AM} = \frac{r}{5r} = \frac{1}{5}$

Cosine rule $\underline{\Delta MNE}$: $NE^2 = MN^2 + EM^2 - 2\cdot MN\cdot EM\cdot\cos(\alpha)$

$= (3r)^2 + r^2 - 2\cdot 3r\cdot r\cdot\frac{1}{5} = \left(10 - \frac{6}{5}\right)r^2 = \frac{44}{5}\cdot\frac{125}{24} = \frac{275}{6}$

Pyth. ΔQNE: $QE^2 = NE^2 - NQ^2 = NE^2 - (2r)^2 = NE^2 - 4r^2$

$= \frac{275}{6} - \frac{125}{6} = \frac{150}{6} = 25$

$\rightarrow QE = 5$

Octubre 18: Tres jugadores lanzan un dado. A lanza 1 vez, B lanza 2 veces y C lanza 3 veces y luego el cicló se repite. Gana el que consiga 6 por primera vez. ¿Qué probabilidad tiene cada jugador de ganar?

Nivel: A partir de 4ESO.

Solución: Representamos por A_i (B_i, C_i) el suceso el jugador A (B, C) saca un seis en su i-esimo lanzamiento. Entonces es suceso el jugador A gana podemos escribirlo como:

$$A_1 \cup (\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3} \cap A_2) \cup \ldots.$$

cuya probabilidad es, al tratarse de la unión de sucesos disjuntos y al estar formado cada suceso por la intersección de sucesos independientes:

$$\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^{12} \cdot \frac{1}{6} + \cdots$$

Que es la suma de todos los términos de una PG de primer término $\frac{1}{6}$ y razón $r = \left(\frac{5}{6}\right)^6$. Con ello:

$$P(\text{gana A}) = \left\{\frac{a_1}{1-r}\right\} = \frac{\frac{1}{6}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^6} = \frac{6^5}{6^6-5^6} = \frac{7776}{31031}$$

Para el jugador B tenemos, el suceso B gana lo podemos escribir como:

$$(\overline{A_1} \cap B_1) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap B_2) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3} \cap \overline{A_2} \cap B_3)$$
$$\cup (\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3} \cap \overline{A_2} \cap \overline{B_3} \cap B_4) \cup \ldots\ldots$$

Y puesto que se trata de la unión de sucesos disjuntos y cada uno de ellos está formado por sucesos independientes, su probabilidad es:

$$\frac{5}{6}\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^7\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^8\frac{1}{6} + \cdots$$

Los sumandos impares son la suma de los miembros de una PG de primer término $\frac{5}{6}\frac{1}{6}$ y razón $r = \left(\frac{5}{6}\right)^6$, mientras que los sumandos pares son los miembros de una PG de primer término $\left(\frac{5}{6}\right)^2\frac{1}{6}$ y la misma razón. Por tanto:

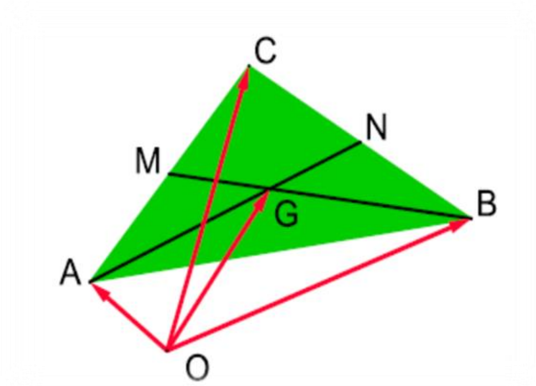
$$P(\text{ganar B}) = \frac{\frac{5}{6}\frac{1}{6}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^6} + \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2\frac{1}{6}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^6} = \frac{6480}{31031} + \frac{5400}{31031} = \frac{11880}{31031}$$

Para el jugador C, podemos proceder de la misma forma (ahora saldrán tres PG convergentes) o más sencillamente:

P(ganar C) = 1 – P(ganar A) – P(ganar B) = $1 - \frac{7776}{31031} - \frac{11880}{31031} = \frac{11375}{31031}$

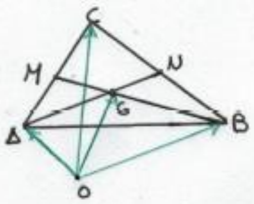
Octubre 19-26: Sea dado un triángulo de vértices A, B y C. Sea G su baricentro y O un punto externo del triángulo. Demostrar que

$$\overrightarrow{\mathbf{OG}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\left(\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \overrightarrow{\mathbf{OB}} + \overrightarrow{\mathbf{OC}}\right)$$



Nivel: Segundo de bachillerato.

Solución de Maria Alonso (INS “Pont de Suert”):



$\Delta = (x_1, y_1) \qquad G = (g_1, g_2) \qquad M = \dfrac{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)}{2}$

$B = (x_2, y_2) \qquad \vec{\Delta G} = \dfrac{2}{3}\vec{\Delta N} \qquad N = \dfrac{(x_2, y_2) + (x_3, y_3)}{2}$

$C = (x_3, y_3)$

$$\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{\Delta N} = \frac{2}{3}(N - \Delta) \quad \frac{2}{3}\left[\frac{(x_2 + x_3, y_2 + y_3)}{2} - \frac{2(x_1, y_1)}{2}\right]$$

$$N - \Delta = \frac{(-2x_1 + x_2 + x_3, -2y_1 + y_2 + y_3)}{3}$$

$$\vec{AG} = (g_1, g_2) - (x_1, y_1) = \frac{(-2x_1 + x_2 + x_3, -2y_1 + y_2 + y_3)}{3}$$

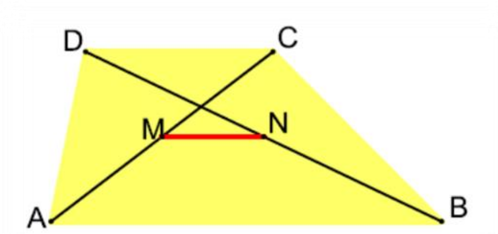
$$(g_1, g_2) = \frac{(x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)}{3} - O$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{O\Delta} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

$$G - O = \frac{(x_1, y_1) + (x_2, y_2) + (x_3, y_3)}{3} - O$$

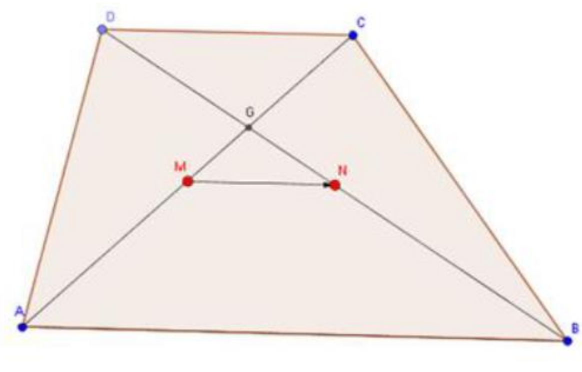
$$\frac{(x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)}{3} - O = \frac{(x + x_2 + x_3, y + y_2 + y_3)}{3} - O$$

Octubre 20-21: Demostrar vectorialmente que el segmento que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio es paralelo a las bases. Hallar la longitud de ese segmento



Nivel: Segundo de bachillerato.

Solución:



Tenemos:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\qquad \overrightarrow{NB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GN}=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{GC}\right)+\left(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DG}-\overrightarrow{NB}\right)$$
$$=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DG}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}-\left(\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GC}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}$$

Pero:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD},\ \ \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB},\ \ \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD},\ \ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$$

Con lo qué:

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)-\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}\right)$$

Pero, al tratarse de un trapecio las bases son paralelas luego $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ son proporcionales

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\alpha\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1-\alpha}{2}\overrightarrow{AB}=\beta\overrightarrow{AB}$$

Luego $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{AB}$ son proporcionales y de ahí el segmento MN es paralelo a las bases y su longitud es la semidiferencia de ellas.

Octubre 22: Demostrar que todo impar que no es múltiplo de 3 es de la forma $6m\pm1$ (m entero)

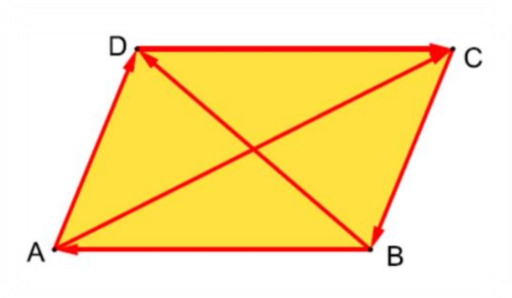
Nivel: Preparación OME

Solución: Sea n = 2k + 1 (con k entero). Si n no es múltiplo de 3 da resto 1 o resto 2 al dividirlo por 3.

Si n = 3h + 1, tendremos: 3h + 1 = 2k + 1 $\Rightarrow$ 3h = 2k $\Rightarrow$ k contiene al factor 3 (por la unicidad de la descomposición factorial en producto de primos) $\Rightarrow$ k es múltiplo de 3 $\Rightarrow$ k = 3m $\Rightarrow$ n = 2k + 1 = 2(3m) + 1 = 6m + 1

Si n = 3h + 2, tendremos: 3h + 2 = 2k + 1 $\Rightarrow$ 3h + 3 = 2k + 2 $\Rightarrow$ 3(h + 1) = 2(k + 1) $\Rightarrow$ k + 1 contiene al factor 3 $\Rightarrow$ k + 1 es múltiplo de 3 $\Rightarrow$ k + 1 = 3m $\Rightarrow$ k = 3m – 1 $\Rightarrow$ n = 2k + 1 = 2(3m – 1) + 1 = 6m – 2 + 1 = 6m – 1.

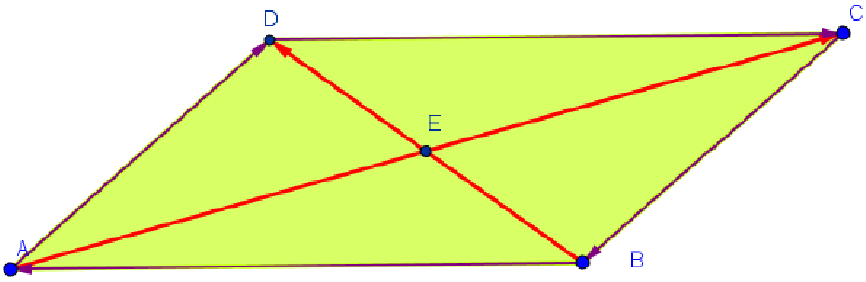
Octubre 23-30: Sea dado un cuadrilátero ABCD. Demostrar vectorialmente que el cuadrilátero es un paralelogramo si y solo si las diagonales bisecan



Nivel: Segundo de bachillerato.

Solución:

$\boxed{\Rightarrow}$



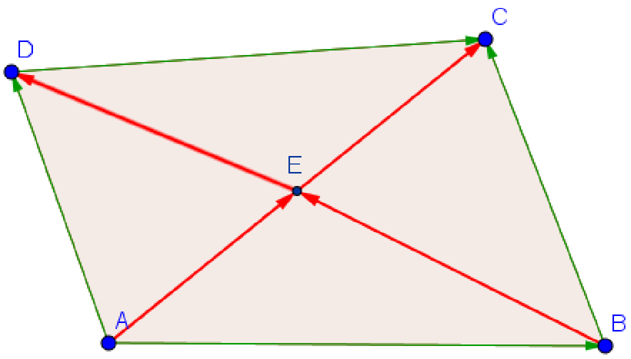
Estamos ante un paralelogramo. Entonces: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}\ (*)$y $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Como $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}$ y $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC}$, en (*) tenemos: $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC}$. Por lo tanto: $\overrightarrow{AE} -$

$$\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{BE} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \overrightarrow{EC} = \alpha\overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{BE} = \beta\overrightarrow{ED} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (1-\alpha)\overrightarrow{AE} + (1-\beta)\overrightarrow{ED} = \vec{0}$$, y como $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{ED}$

son linealmente independientes $\alpha = \beta = 1 \Rightarrow \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{ED}$

$\boxed{\Leftarrow}$



Ahora, por hipótesis: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ $\quad \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Tendremos:

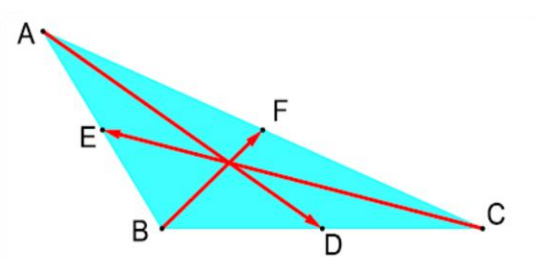
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AD}$$

Luego AB$\,||\,$DC y BC$\,||\,$AD. Es decir, ABCD es un paralelogramo.

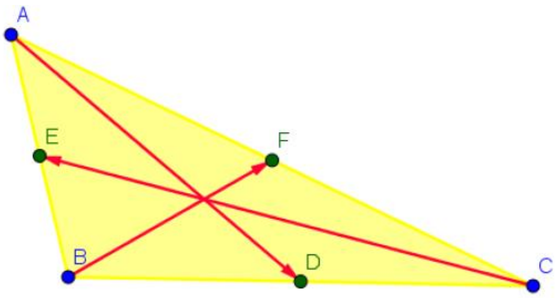
Octubre 24-25: Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ los vectores con inicio un vértice del triángulo y final el punto medio del lado opuesto. Demostrar que:

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$$



Nivel: Segundo de bachillerato.

Solución:



Tenemos por hipótesis:

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \qquad \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{FA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

Con lo que:

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CE} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right) + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}\right) + \left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE}\right) =$$

$$\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) + \left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BD}\right) =$$

$$\overrightarrow{AA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{AA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

Octubre 27-28: Resolver:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{2}| + |\mathbf{x} - \mathbf{1}| + |\mathbf{x}| + |\mathbf{x} + \mathbf{1}| + |\mathbf{x} + \mathbf{2}| = \mathbf{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{4}$$

Nivel: A partir de 4ESO.

Solución: Al ser no negativo el primer miembro debe ser no negativo el segundo miembro. Luego $x^2 - 4$ debe ser no negativo. De donde $x \leq -2$ o $x \geq 2$.

Si $x \leq -2$ tenemos: $-(x-2) - (x-1) - x - (x+1) - (x+2) = x^2 - 4 \quad \Rightarrow$

$$x^2 + 5x - 4 = 0 \quad \Rightarrow x = -\frac{5 + \sqrt{41}}{2}$$

Si $x \geq 2$ tenemos: $x - 2 + x - 1 + x + x + 1 + x + 2 = x^2 - 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 5x - 4 = 0$

$$\Rightarrow \; x = \frac{5 + \sqrt{41}}{2}$$

Octubre 29: ¿Porqué

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n} + \mathbf{1}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n} + \mathbf{2}}$$

no es un decimal exacto?

Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: Recordemos que una fracción irreducible es un decimal exacto si los factores primos del denominador son 2 y/o 5. Para las fracciones dadas tenemos:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{(n+1)\cdot(n+2) + n\cdot(n+2) + n\cdot(n+1)}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{3n^2 + 6n + 2}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$$

En la última fracción el numerador no es divisible por n ni por n + 1 ni por n + 2. De aquí que la última fracción sea irreducible. Por último, el denominador contiene al menos al factor 3 pues de tres naturales consecutivos uno es múltiplo de tres y por tanto no será un decimal exacto.

Octubre 31: ¿Cuántos naturales menores que 10000 son múltiplos de 4, 10 o 14?

Nivel: Preparación OME.

Solución: Recordemos que si $|A|$ representa el número de elementos del conjunto A tenemos

1. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
2. $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.
3. Si se parte de los primeros n naturales y A es el conjunto de múltiplos de k menores o iguales a n: $|A| = \lfloor n/k \rfloor$ donde $\lfloor x \rfloor$ representa a la parte entera de x

La demostración de 1 es bastante simple. Para 2 tenemos:

$|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap C \cap B \cap C|) = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Si A (B, C) son los múltiplos de 4 (10, 14) menores de 10000 tenemos:

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = \lfloor 10000/4 \rfloor + \lfloor 10000/10 \rfloor + \lfloor 10000/14 \rfloor - \lfloor 10000/\text{m.c.m.}(4, 10) \rfloor - \lfloor 10000/\text{m.c.m.}(4, 14) \rfloor - \lfloor 10000/\text{m.c.m.}(10, 14) \rfloor + \lfloor 10000/\text{m.c.m.}(4, 10, 14) \rfloor = 2500 + 1000 + 714 – 500 – 357 – 142 + 71 = 3286$