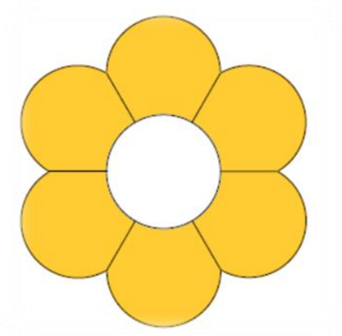
# SOLUCIONES NOVIEMBRE 2017

AUTOR: Ricard Peiró i Estruch. IES "Abastos". València

**Noviembre 1-2:** El corazón de la flor es un círculo de radio 1. El contorno exterior de los pétalos son semicírculos centrados en los puntos medios de un hexágono regular inscrito en un círculo de radio 2 con el mismo centro que el corazón. Calcular el área de todos los pétalos



**Nivel:** A partir de 3ESO

**Solución:**

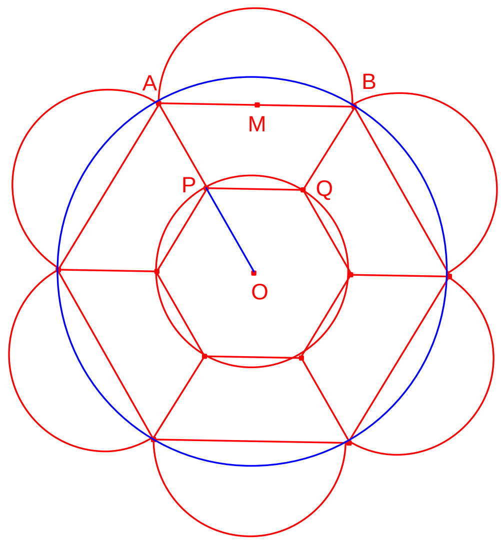
Sea O el punto central de la flor.

Sea $\overline{OP} = 1$ el radio del centro de la flor.

Sea $\overline{AB} = 2$ el lado del hexágono inscrito en el círculo de radio 2.

Entonces $\overline{OA} = 2$.

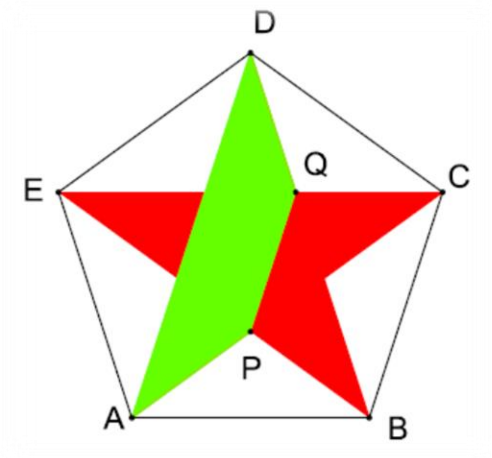
Los semicírculos exteriores de los pétalos tienen radio 1.




El área de la zona sombreada es igual al área de un hexágono de lado 2, más 2 círculos de radio 1.

$$S_{\text{pétalos}} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 - 2 \cdot \pi \cdot 1^2 = 6\sqrt{3} - 2\pi$$

**Noviembre 3-4:** ABCDE es un pentágono regular. P y Q las intersecciones de los segmentos AC, EB y EC, BD, respectivamente. Hallar la razón entre las áreas del cuadrilátero APQD y del polígono estrellado ACEBD




**Nivel:** A partir de 3ESO

**Solución:**

Sea X el área del triángulo $\Delta APS$.

Los triángulos $\Delta APS$ y $\Delta QPS$ son iguales.

Sea $Y = \frac{1}{\Phi} X$ el área del triángulo $\Delta QRS$.

El área del pentágono estrellado ACEBD es:

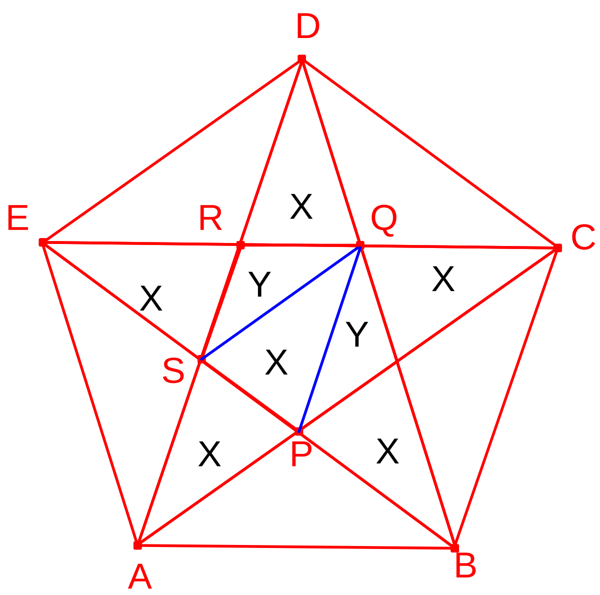
$$S_{ACEBD} = 6X + 2Y.$$

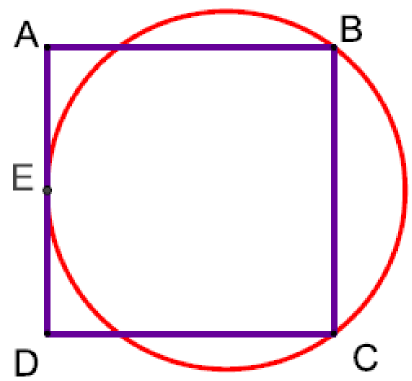
El área del cuadrilátero APQD es:

$$S_{APQD} = 3X + Y.$$

La proporción entre las áreas es:

$$\frac{S_{APQD}}{S_{ACEBD}} = \frac{1}{2}.$$



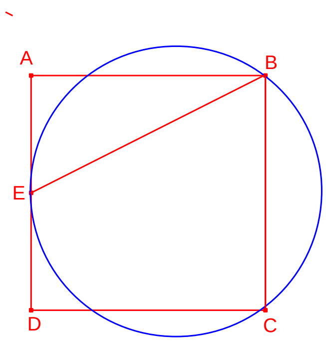

**Noviembre 5:** ¿Quién tiene mayor perímetro el cuadrado o la circunferencia?

**Nivel:** A partir de 3ESO

**Solución 1:**

Sea ABCD el cuadrado de lado $\overline{AB} = 1$. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\Delta ABE$:

$$\overline{BE} = \overline{CE} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$



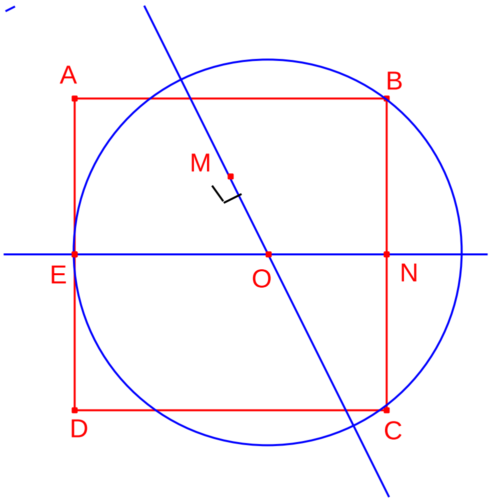

Sea R el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo $\Delta BCE$. El área del triángulo $\Delta BCE$ es la mitad de área del cuadrado:

$$S_{BCE} = \frac{1}{2} = \frac{\overline{BE} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CE}}{4R} \,.\quad \frac{1}{2} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}}{4R}.$$

Resolviendo la ecuación: $R = \frac{5}{8}$. El perímetro del cuadrado es: $P_{ABCD} = 4$. El perímetro de la circunferencia es: $P_{circumf} = 2\pi\frac{5}{8} = \frac{5\pi}{4} \approx 3.92$. El perímetro del cuadrado es mayor que el perímetro de la circunferencia.

**Solución 2:**

Sea O el centro de la circunferencia. O es la intersección de las mediatrices de los segmentos $\overline{BE}$ y $\overline{BC}$. Sea $\overline{OE} = R$ el radio de la circunferencia. Sea M el punto medio del segmento $\overline{BE}$. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\Delta ABE$:




$$\overline{BE} = \overline{CE} = \frac{\sqrt{5}}{2}.\quad \overline{EM} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

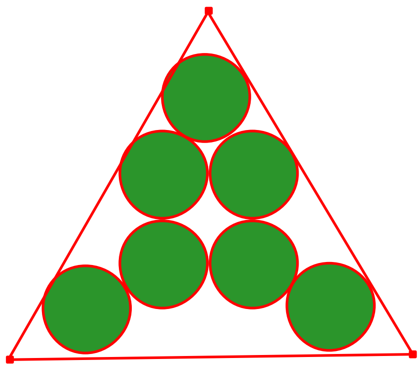
Los triángulos rectángulos $\Delta BAE$ y $\Delta EMO$ son semejantes.

Aplicando el teorema de Tales: $\dfrac{1}{\frac{\sqrt{5}}{4}} = \dfrac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{R}$.

Resolviendo la ecuación: $R = \frac{5}{8}$. El perímetro del cuadrado es: $P_{ABCD} = 4$. El perímetro de la circunferencia es: $P_{circumf} = 2\pi\frac{5}{8} = \frac{5\pi}{4} \approx 3.92$. El perímetro del cuadrado es mayor que el perímetro de la circunferencia.

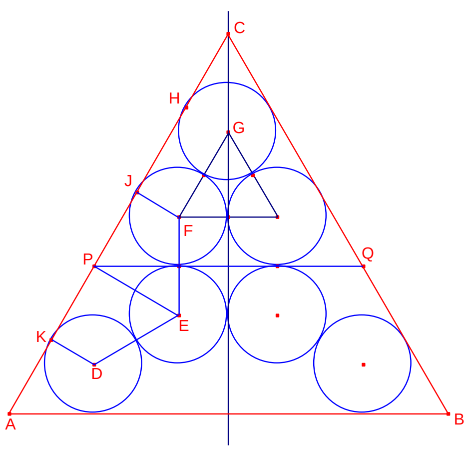
Sin calculadora: $\dfrac{P_{circumf}}{P_{ABCD}} = \dfrac{5\pi}{16} < \dfrac{5}{16}\dfrac{22}{7} < 1.$

**Noviembre 6:** En el triángulo equilátero de lado 1 se han inscrito 7 círculos iguales y tangentes dos a dos. Hallar su radio



**Nivel:** A partir de 3ESO

**Solución:**



Sea $\triangle ABC$ el triángulo equilátero de lado 1. Sea r el radio de las siete circunferencias. Sean D, E, F, G centros de tres circunferencias. Sean H, J i K puntos de tangencia.

$$\angle GFE = \angle HDE = 120^{\circ}.$$

$$\angle HGF = \angle GHD = 90^{\circ}.$$

$$\overline{FG} = \overline{FE} = \overline{DE} = 2r.$$

$$\overline{AK} = \overline{CH} = \overline{PJ} = \overline{PK} = r\sqrt{3}.$$

$$\overline{HJ} = \overline{FE} = 2r.$$

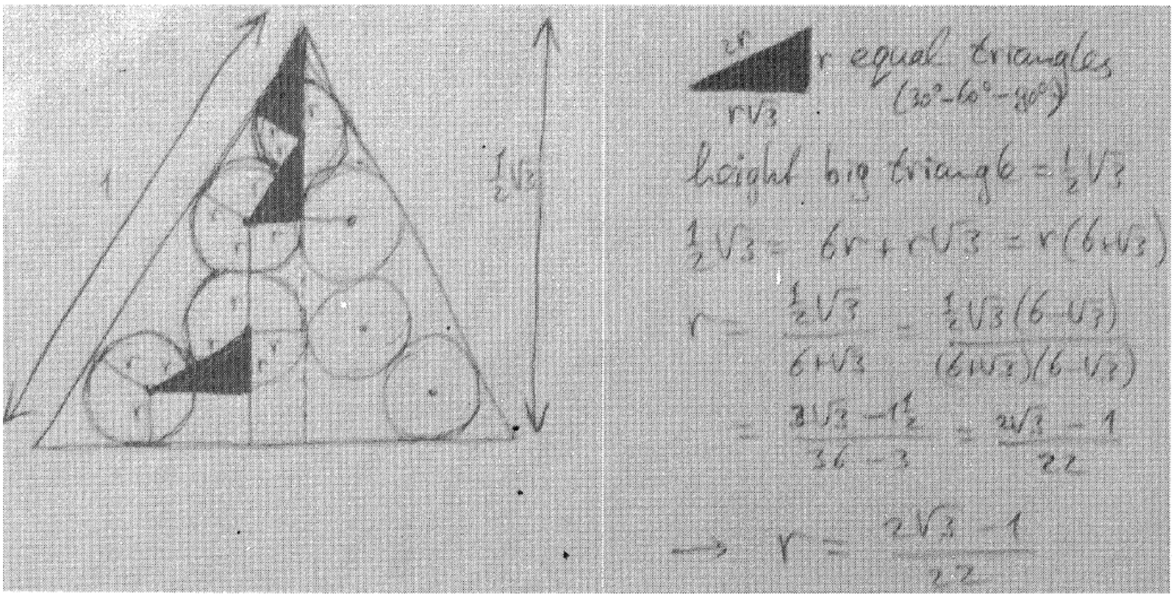
$$\overline{AC} = 4\overline{AK} + \overline{HJ}.$$

$$1 = 4r\sqrt{3} + 2r.$$

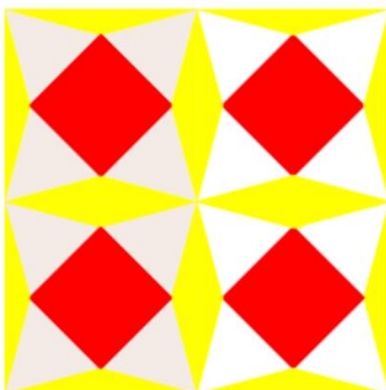
Resolviendo la ecuación:

$$r = \frac{1}{4\sqrt{3}+2} = \frac{2\sqrt{3}-1}{22} \approx 0.112005 .$$

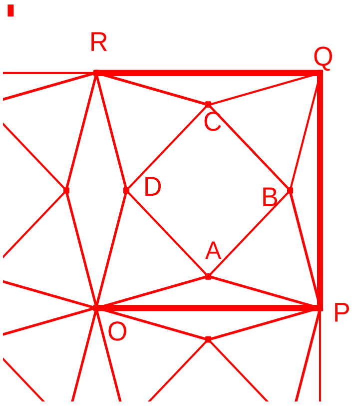
**Solución 2 (Henk Reuling @Henk Reuling):**




**Noviembre 7-8:** En la baldosa adjunta los cuadriláteros rojos son cuadrados y los amarillos rombos; los triángulos blancos son equiláteros y los amarillos isósceles. Hallar la razón de áreas de la zona roja y amarilla



**Nivel:** A partir de 4ESO




**Solución:** Consideremos los cuadrados OPQR, ABCD y el triángulo equilátero $\Delta ABP$.

La proporción que mantienen los cuatro cuadrados rojos i la zona amarilla es igual a la proporción entre un cuadrado rojo i cuatro triángulos $\Delta OAP$

Sea $\overline{AB} = c$ .

$$\angle OAP = 150^{\circ} = 360^{\circ} - (60^{\circ} + 60^{\circ} + 90^{\circ})$$

El área del triángulo $\Delta OAP$ es:

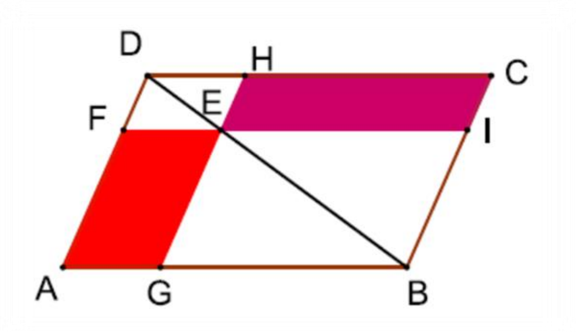
$$S_{\Delta OAP} = \frac{c \cdot c \cdot \sin(150^{\circ})}{2} = \frac{c^2}{4}$$

La proporción entre las áreas pintadas de rojo y las pintadas de amarillo es:

$$\frac{S_{ABCD}}{4 \cdot S_{\Delta OAP}} = \frac{c^2}{4 \cdot \frac{c^2}{4}} = 1$$

Las dos zonas tienen la misma área.

**Noviembre 9-10:** **Proposición I.43**: En cualquier paralelogramo el complemento de los paralelogramos construidos sobre un punto de la diagonal tiene la misma área

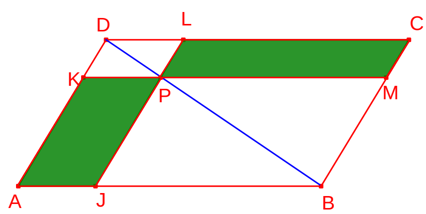


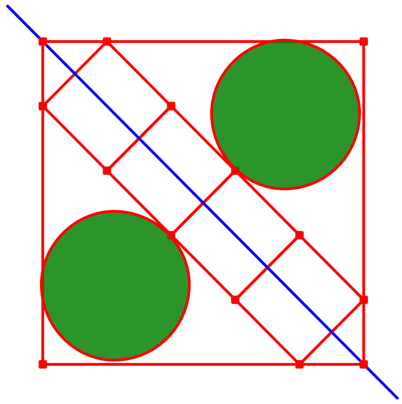

**Nivel:** A partir de 3ESO.

**Solución:** Sea ABCD un paralelogramo. Sea P un punto de la diagonal $\overline{BD}$. Por el punto P trazamos paralelas a los lados del paralelogramo formándose los paralelogramos AJPK i PMCL.

Los triángulos $\Delta ABD$ y $\Delta CDB$ son iguales, y, por lo tanto, tienen la misma área. Los triángulos $\Delta KPD$ y $\Delta LDP$ son iguales, y, por tanto, tienen la misma área. Los triángulos $\Delta JBP$ y $\Delta MPB$ son iguales, y, por tanto, tienen la misma área.

$$S_{AJPK} = S_{ABD} - (S_{KPD} + S_{JBP}) = S_{CDB} - (S_{LDP} + S_{MPB}) = S_{PMCL}$$





**Noviembre 11:** El lado del cuadrado grande mide 10 cm. Sobre su diagonal se dibujan 4 cuadrados. Hallar el radio de los círculos tangentes

**Nivel:** A partir de 4ESO.

**Solución:** Sea el cuadrado ABCD de lado $\overline{AB} = c = 10$. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ΔDAB:

$$\overline{BD} = c\sqrt{2}$$

Sea L el centro del cuadrado JPMN. Siga K el punto medio del lado $\overline{PJ}$.

Notemos que $\overline{DK} = \overline{KL} = \overline{PK}$, y entonces:

$\overline{BD} = 10 \cdot \overline{DK}$, Por tanto:

$$\overline{DK} = \frac{c}{10}\sqrt{2}.$$

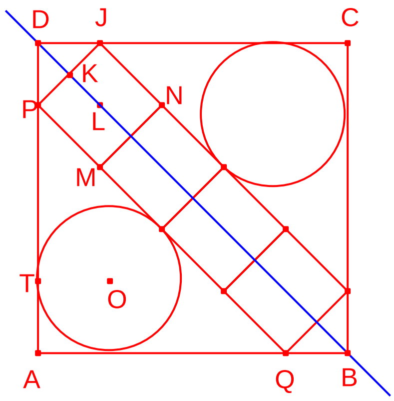
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ΔDKP:

$$\overline{DP} = \overline{DK} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{5}c.$$

$$\overline{AP} = c - \frac{1}{5}c = \frac{4}{5}c.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ΔPAQ:

$$\overline{PQ} = \overline{AP} \cdot \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{5}c.$$

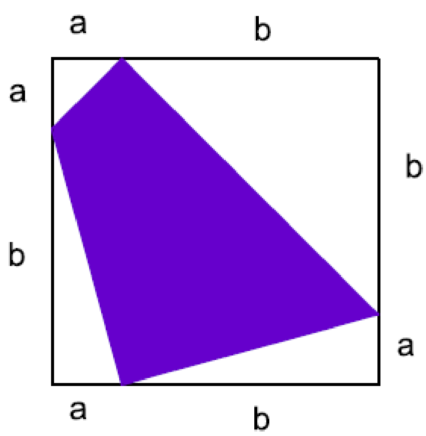



Sea $\overline{OT} = r$ el radio de la circunferencia inscrita al triángulo rectángulo ΔPAQ.

$$r = \frac{2\overline{AP} - \overline{PQ}}{2} = \frac{\frac{8}{5}c - \frac{4\sqrt{2}}{5}c}{2} = \frac{2}{5}\left(2 - \sqrt{2}\right)c.$$

Si $c = 10$, $r = 4\left(2 - \sqrt{2}\right) \approx 2.34\text{cm}$

**Noviembre 12:** Calcular la proporción entre las áreas del cuadrilátero interior y el cuadrado exterior




**Nivel:** A partir de 3ESO.

**Solución:** El área del cuadrado exterior es:

$S_{cuadrado} = (a + b)^2$

El área de la superficie del cuadrado exterior al cuadrilátero está formada por 4 triángulos rectángulos. Su área es:

$$S_{ext} = \frac{1}{2}a^2 + 2\left(\frac{1}{2}ab\right) + \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + 2ab + b^2\right)$$

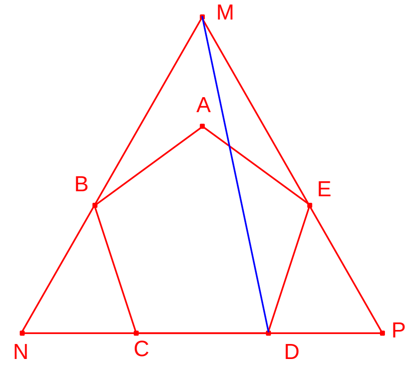
El área del cuadrilátero sombreado es:

$$S_{\text{cuadrilátero}} = S_{\text{cuadrado}} - S_{\text{ext}} = (a+b)^2 - \frac{1}{2}(a+b)^2 = \frac{1}{2}(a+b)^2$$

La proporción entre las áreas del cuadrilátero sombreado y el cuadrado es:

$$\frac{S_{\text{cuadrilátero}}}{S_{\text{cuadrado}}} = \frac{1}{2}$$

**Noviembre 13-14:** En la figura se muestra un pentágono regular ABCDE inscrito en un triángulo equilátero MNP. Hallar la medida del ángulo $\angle CMD$

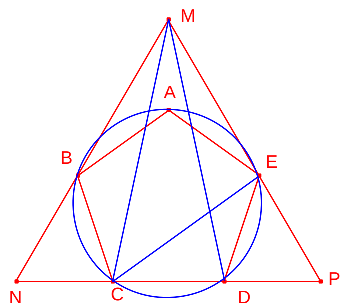



**Nivel:** A partir de 2ESO.

**Solución:** Por simetría $\overline{BE} = \overline{CE} = \overline{ME}$ .

De donde, el triángulo $\Delta MCE$ es isósceles.

$\angle BEC = 36^o$ , y, por tanto:




$$\angle MEC = 36^o + 60^o = 96^o .$$

$$\angle CME = \frac{180^o - 96^o}{2} = 42^o .$$

$$\angle CME = \angle BMD .$$

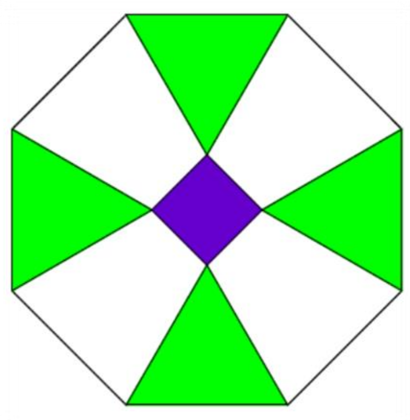
$$\angle CME + \angle BMD = 60^o + \angle CMD .$$

$$42^o + 42^o = 60^o + \angle CMD .$$

Resolviendo la ecuación:

$$\angle CMD = 24^o .$$

**Noviembre 15-16:** En la figura hay un octógono regular de lado c junto con cuatro triángulos equiláteros (de color verde). Hallar el área del cuadrado determinado por los vértices de los triángulos equiláteros



**Nivel:** A partir de 4ESO.

**Solución:** Sea ABCDEFGH el octógono regular de lado $\overline{AB} = c$ .

Sea KLMN el cuadrado formado por los vértices de los cuatro triángulos equiláteros.

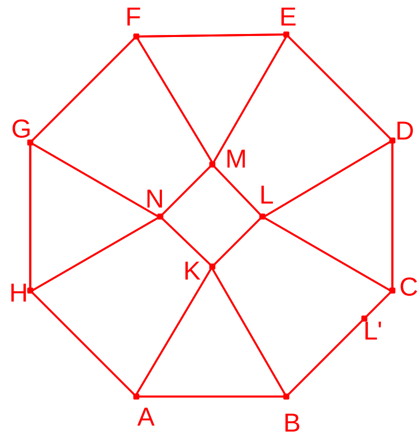
Sea $x = \overline{KL}$ el lado del cuadrado KLMN.

$\angle BCD = 135^{o}$ (ángulo interior del octógono regular).

$$\angle LCB = \angle BCD - \angle LCD = 135^{o} - 60^{o} = 75^{o}$$

Sea L' la proyección de L sobre el lado $\overline{BC}$.

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\Delta LL'C$:



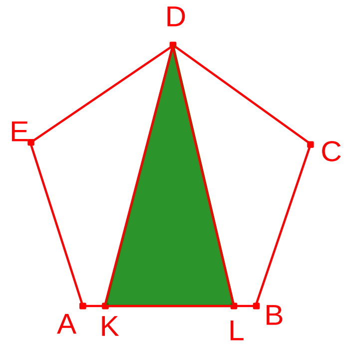

$$\overline{CL'} = c \cdot \cos 75^{o} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} c\,.$$

$$x = \overline{KL} = \overline{BC} - 2\cdot\overline{CL'} = c - 2\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} c = \frac{2-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} c\,.$$

El área del cuadrado KLMN es:

$$S_{KLMN} = x^2 = \left(\frac{2-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} c\right)^2 = \left(3-\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)c^2\,.$$

**<u>Noviembre 17-18:</u>** El pentágono regular ABCDE está dividido en tres partes iguales por los segmentos DK y DL. Hallar la medida del segmento KL



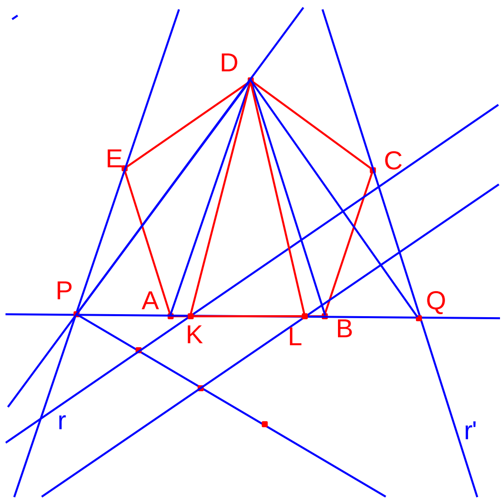

**<u>Nivel:</u>** A partir de 4ESO.

**<u>Solución:</u>** Tenemos:

$$\overline{AK} = \overline{LB}\,.$$

$$\overline{AB} = 1,\ \overline{BE} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

Transformamos el pentágono regular ABCDE en un triángulo isósceles $\Delta PQD$ de igual área. Procedimiento:




a) Por el punto E trazamos una paralela r al segmento $\overline{AD}$ que corta a la recta AB en el punto P.

Notemos que las áreas de los triángulos $\Delta ADE$ y $\Delta ADP$ son iguales.

b) Por el punto C trazamos una paralela r' al segmento $\overline{BD}$ que corta a la recta AB en el punto Q.

Notemos que las áreas de los triángulos $\Delta BCD$ y $\Delta BQD$ son iguales.

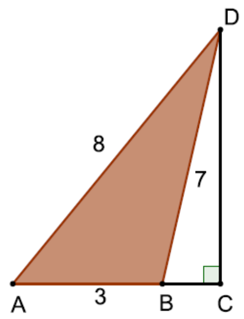
Entonces, las áreas del pentágono ABCDE y el triángulo isósceles $\Delta PQD$ son iguales.

c) Dividimos el segmento $\overline{PQ}$ en tres partes iguales.

d) El segmento central $\overline{KL}$ es el que buscamos.

Notemos que $\angle EPA = \angle DAB = 72^o$. $\angle PAE = 72^o$. De aquí, $\angle PEA = 36^o$. $\angle AEB = 36^o$. Y, por tanto, $\angle PEB = 72^o$. De aquí, $\overline{PB} = \overline{BE} = \Phi$. $\overline{PQ} = 2 \cdot \overline{PB} - \overline{AB} = 2\Phi - 1 = \sqrt{5}$. De donde, $\overline{KL} = \frac{1}{3}\overline{PQ} = \frac{1}{3}\sqrt{5}$.

**Noviembre 19:** En la figura AB = 3, BD = 7, AD = 8 y $\angle BCD = 90°$. Hallar el área del triángulo $\Delta BCD$




**Nivel:** A partir de 3ESO.

**Solución:** Sea $\overline{BC} = x$ y $\overline{CD} = y$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\Delta BCD$:

$x^2 + y^2 = 7^2$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\Delta ACD$: $(x+3)^2 + y^2 = 8^2$.

Consideremos el sistema formado por las dos expresiones anteriores:

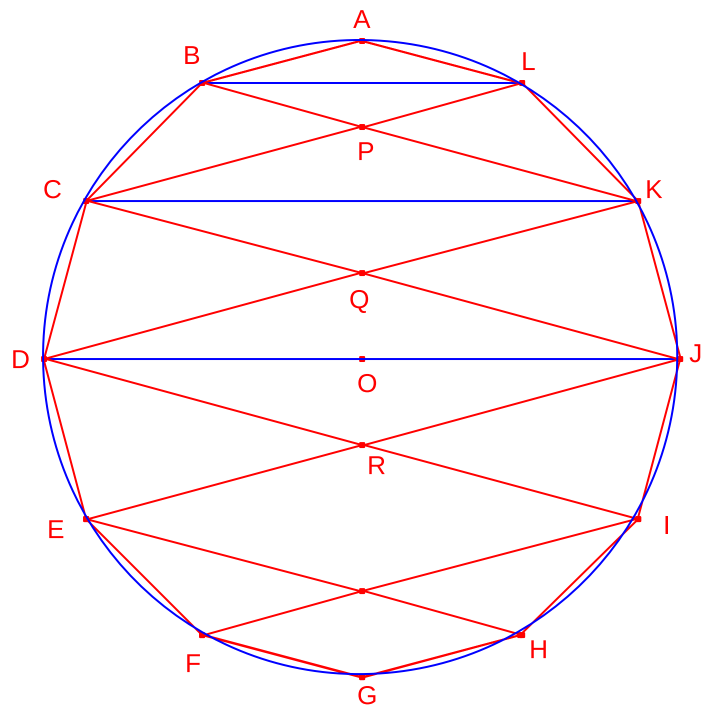
$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 49 \\ (x+3)^2 + y^2 = 64 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4\sqrt{3} \end{cases}$. El área del triángulo $\Delta BCD$ es: $S_{BCD} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

**Noviembre 20:** (*KöMaL, 498)* Una circunferencia está dividida en 12 arcos iguales. Los puntos de las divisiones se unen como indica la figura. Hallar la razón entre las áreas de los rombos formados.

**Nivel:** A partir de 3ESO.

**Solución:**




Las partes iguales en qué está dividida la circunferencia forman el dodecágono regular ABCDEFGHIJKL. Sea $\overline{AB} = c$ el lado del dodecágono regular, entonces $\angle ABK = \angle ALC = 30^o$.

Por otra parte, ABPL es un rombo de lado a y ángulos 30º y 150º. $\angle LCJ = \angle BKD = 30^o$.

También PCQK es un rombo de lado a y ángulos 30º y 150º. Los rombos ABPL y PCQK son semejantes.

El triángulo $\Delta$BCP es isósceles con $\overline{BC} = \overline{BP} = c$, $\angle BCL = 30^o$. Por tanto, $\overline{CP} = c\sqrt{3}$.

Recordemos que si dos figuras son semejantes sus áreas son proporcionales con proporcionalidad el cuadrado de la razón de semejanza entre las figuras:

$$\frac{S_{PCQK}}{S_{ABPL}} = \left(\frac{\overline{CP}}{\overline{AB}}\right)^2 = 3.$$

Por otra parte

$$\angle KDI = \angle CJE = 30^o.$$

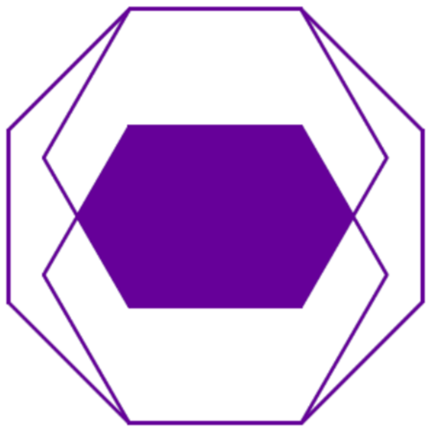
QDRJ es un rombo de lado a y ángulos 30º y 150º. Los rombos ABPL, QDRJ son semejantes.

El triángulo $\Delta$CDQ es rectángulo $\angle DCJ = 90^o$, $\angle CDK = 60^o$, $\overline{CD} = c$. Por tanto, $\overline{DQ} = 2c$.

$$\frac{S_{QDRJ}}{S_{ABPL}} = \left(\frac{\overline{DQ}}{\overline{AB}}\right)^2 = 4.$$

Por tanto, la proporción de los rombos es:

$$S_{ABPL} : S_{PCQK} : S_{QDRJ} = 1:3:4.$$

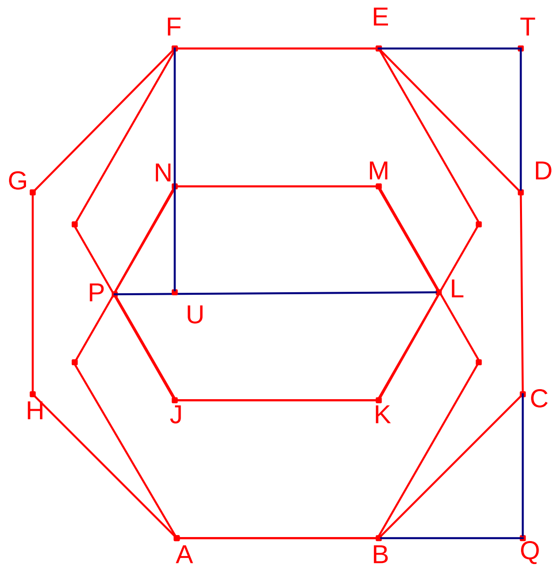


**Noviembre 21-22:** En la figura hay un octógono y dos hexágonos todos regulares y de lado c. Hallar el perímetro y el área de la intersección de los dos hexágonos.

**Nivel:** A partir de 4ESO.

**Solución:** Sea ABCDEFGH el octógono regular de lado $\overline{AB} = c$.

Sea JKLMNP el hexágono intersección de los dos hexágonos regulares.




Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles $\Delta BQC$:

$$\overline{QC} = \frac{\sqrt{2}}{2}c.$$

$$\overline{AF} = \overline{CD} + 2 \cdot \overline{QC} = (1+\sqrt{2})c.$$

$$\overline{UF} = \frac{1}{2}\overline{AF} = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)c.$$

$$\overline{AN} = \sqrt{3}c.$$

$$\overline{UN} = \overline{AN} - \overline{UF} = \sqrt{3}c - \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)c = \frac{2\sqrt{3}-1-\sqrt{2}}{2}c.$$

Por otra parte $\angle NPU = 60^{o}$. Sea $x = \overline{PN}$, $y = \overline{PU}$.

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\Delta PUN$:

$$\frac{(2\sqrt{3}-1-\sqrt{2})c}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{, de donde}$$

$$x = \frac{6-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}c,\; y = \frac{1}{2}x = \frac{6-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}c$$

El perímetro del hexágono JKLMNP es:

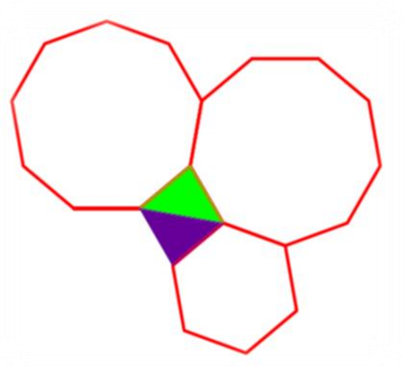
$$P_{JKLMNP} = 2 \cdot \overline{AB} + 4x = \frac{30-4\sqrt{3}-4\sqrt{6}}{3}c$$

El área del hexágono JKLMNP es igual al doble del área del trapecio PLMN:

$$S_{JKLMNP} = 2 \cdot S_{PLMN} = 2\frac{\overline{AB}+2y+\overline{AB}}{2}\overline{UN} = \frac{(12-\sqrt{3}-\sqrt{6})(2\sqrt{3}-1-\sqrt{2})}{6}c^2.$$

$$S_{JKLMNP} = \frac{-18-18\sqrt{2}+27\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{6}c^2.$$

**Noviembre 23-24:** La figura está formada por dos eneágonos, un hexágono todos regulares, y dos triángulos. Probar que los dos triángulos son isósceles



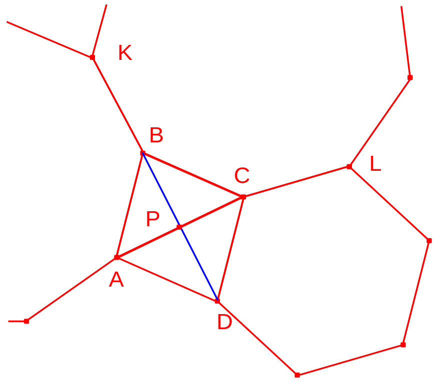
**Nivel:** A partir de 3ESO.

**Solución:** Los lados de los eneágonos y el hexágono son iguales.

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}.$$

Por tanto, el triángulo $\Delta ABC$ es isósceles.

El ángulo interior del eneágono regular mide:




$$\angle ABK = \angle CBK = 180^o - \frac{360^o}{9} = 140^o.$$

El ángulo interior del hexágono regular mide:

$$\angle DCL = 180^o - \frac{360^o}{6} = 120^o.$$

$$\angle ABC = 360^o - 2\angle ABK = 80^o.$$

$$\angle BAC = \angle ACB = \frac{180^o - \angle ABC}{2} = 50^o.$$

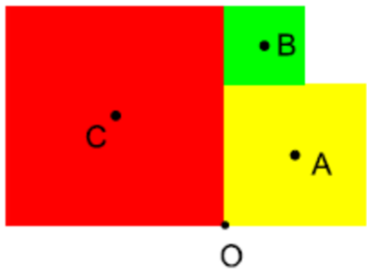
El triángulo $\Delta BCD$ es isósceles.

$$\angle BCD = 360^o - (\angle ABK + \angle DCL) = 100^o.$$

$$\angle CBD = \angle BDC = \frac{180^o - \angle BCD}{2} = 40^o.$$

Por tanto, $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ son perpendiculares. Sea P la intersección de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Los triángulos rectángulos $\Delta APB$, $\Delta CPB$ son iguales, por tanto, los triángulos rectángulos $\Delta APD$ y $\Delta CPD$ son iguales. Entonces, el triángulo $\Delta ACD$ es isósceles. Notemos que los triángulos $\Delta ABC$ y $\Delta ADC$ son iguales.

**Noviembre 25-26:** En la figura hay tres cuadrados de centros A, B y C. El punto O es el vértice de dos cuadrados.



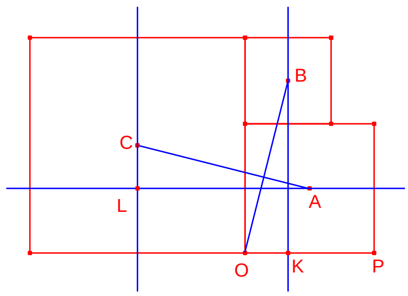

Probar que los segmentos OB y AC son iguales y perpendiculares

**Nivel:** A partir de 3ESO.

**Solución:** Sean a, b, c las medidas de los lados de los cuadrados de centros A, B, C, respectivamente. Notemos que $a + b = c$. Sea K la proyección de B sobre la recta OP.

Sea la recta paralela a BK que pasa por C. Sea la recta paralela a OK que pasa per A. Las dos rectas anteriores se intersectan en L.

$$\overline{OK} = \frac{1}{2}b,\ \overline{BK} = a + \frac{1}{2}b.$$

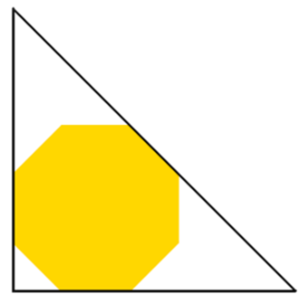


$$\overline{CL} = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}b\,,\ \overline{AL} = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}a = a + \frac{1}{2}b\,.$$

Entonces, los triángulos rectángulos $\Delta OKB$ y $\Delta CLA$ son iguales, y tienen los catetos correspondientes perpendiculares, por tanto:

$$\overline{OB} = \overline{AC}\text{, y, además, } \overline{OB} \perp \overline{AC}\,.$$

**Noviembre 27-28:** En la figura, un octógono regular está inscrito en un triángulo rectángulo. Calcular la razón de proporcionalidad entre los perímetros y las áreas del octógono y el triángulo.



**Nivel:** A partir de 3ESO.

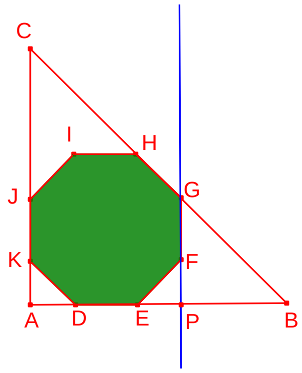
**Solución:** Sea $\Delta ABC$ el triángulo rectángulo isósceles, $A = 90^o$, $\overline{AB} = \overline{AC}$

Sea DEFGHIJK el octógono regular de lado $\overline{DE} = c$.

Sea P la proyección de G sobre el cateto $\overline{AB}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles $\Delta ADK$

$$\overline{AD} = \overline{EP} = \overline{PF} = \frac{\sqrt{2}}{2}c\,.$$




El triángulo rectángulo $\Delta PBG$ Es isósceles, entonces:

$$\overline{PB} = \overline{PG} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)c\,.\ \overline{AB} = \left(2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)c\,.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles $\Delta ABC$:

$$\overline{BC} = \left(2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\sqrt{2}\,c\,.$$

El perímetro del octógono es: $P_{DEFGHIJK} = 8c$. El perímetro del triángulo $\Delta ABC$ es:

$$P_{ABC} = 2\left(2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)c + \left(2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\sqrt{2}\,c = \left(7 + 5\sqrt{2}\right)c\,.$$

La proporción entre los perímetros es:

$$\frac{P_{DEFGHIJK}}{P_{ABC}} = \frac{8c}{\left(7 + 5\sqrt{2}\right)c} = 8\left(5\sqrt{2} - 7\right).$$

El área del octógono regular es igual a el área del cuadrado de lado $\overline{AP}$ menos el área del cuadrado de lado c:

$$S_{DEFGHIJK} = \left(1 + \sqrt{2}\right)^2 c^2 - c^2 = 2\left(1 + \sqrt{2}\right)c^2$$

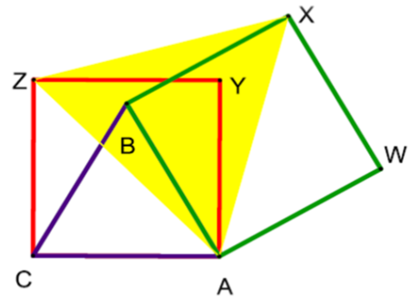
El área del triángulo rectángulo isósceles $\Delta ABC$ es:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2 c^2 = \frac{1}{4}\left(17 + 12\sqrt{2}\right)c^2\,.$$

La proporción entre las áreas es:

$$\frac{S_{DEFGHIJK}}{S_{ABC}} = \frac{2\left(1+\sqrt{2}\right)c^2}{\frac{1}{4}\left(17+12\sqrt{2}\right)c^2} = 8\left(5\sqrt{2}-7\right).$$

**Noviembre 29-30:** En la ilustración ABC es un triángulo equilátero y AYZC y ABXW son dos cuadrados iguales. Demostrar que $\Delta AZX$ es un triángulo equilátero




**Nivel:** A partir de 3ESO.

**Solución:** El giro de centro A i 60º transforma el cuadrado AWXB en el cuadrado AYZC.

También, este giro transforma la diagonal $\overline{AX}$ en la diagonal $\overline{AZ}$

Por tanto, $\overline{AX} = \overline{AZ}$ i $\angle XAZ = 60^{o}$. De aquí, $\Delta AXZ$ es un triángulo equilátero.