SOLUCIONES DICIEMBRE 2017

AUTOR: Rafael Martínez Calafat. Profesor jubilado de Matemáticas

Diciembre 1: ¿De cuántas formas se puede obtener una suma de 361 utilizando números de uno o dos dígitos distintos sin repetir ninguno? ¿Y una suma de 360?

Nivel: Preparación OME.

Solución: Sea $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{x_i\}_{i=0}^{9}$. Como $\sum_{i=0}^{9} x_i = \frac{0+9}{2} \cdot 10 = 45$ (*) no podemos obtener suma de 361 con números de una cifra con dígitos distintos y sin repetir ningún dígito.

Sea $\{x_i\}_{i\in U}$ las cifras que colocamos en el lugar de las unidades en las sumas de números de una o dos cifras y $\{x_j\}_{j\in D}$ las cifras que colocamos en el lugar de las decenas. Tendremos en primer lugar que $|D| \leq |U| \leq 10$ y en segundo lugar que

$$\sum_{i\in U} x_i + 10\sum_{j\in D} x_j = 361$$

De (*) tendremos que $\sum_{i\in U} x_i$ puede ser 1, 11, 21, 31 o 41 (51 y ninguno posterior a él, pues 51 excede a la suma máxima de 45).

Si $\sum_{i\in U} x_i = 1$ entonces en las cifras de las unidades sólo pueden estar las cifras 0 y 1. Es decir la suma sería de dos números o de un número que es imposible que aporten suma 361 (la suma más grande de dos números de dos cifras es $90 + 81 = 80 + 91 = 171 \neq 361$)

Si $\sum_{i\in U} x_i = 11 \Rightarrow 11+10\cdot \sum_{j\in D} x_j = 361 \Rightarrow \sum_{j\in D} x_j = 35$ que es un absurdo pues:

$$45 = \sum_{i=0}^{9} x_i \geq \sum_{i\in U} x_i + \sum_{j\in D} x_j = 11 + 35 = 46 \quad (45 \geq 46\,)$$

Si $\sum_{i\in U} x_i = 21 \Rightarrow 21+10\cdot \sum_{j\in D} x_j = 361 \Rightarrow \sum_{j\in D} x_j = 34$ que es un absurdo pues:

$$45 = \sum_{i=0}^{9} x_i \geq \sum_{i\in U} x_i + \sum_{j\in D} x_j = 21 + 34 = 54 \quad (45 \geq 54\,)$$

Si $\sum_{i\in U} x_i = 31 \Rightarrow 31+10\cdot \sum_{j\in D} x_j = 361 \Rightarrow \sum_{j\in D} x_j = 33$ que es un absurdo pues:

$$45 = \sum_{i=0}^{9} x_i \geq \sum_{i\in U} x_i + \sum_{j\in D} x_j = 31 + 33 = 64 \quad (45 \geq 64\,)$$

Si $\sum_{i\in U} x_i = 41 \Rightarrow 41+10\cdot \sum_{j\in D} x_j = 361 \Rightarrow \sum_{j\in D} x_j = 32$ que es un absurdo pues:

$$45 = \sum_{i=0}^{9} x_i \geq \sum_{i\in U} x_i + \sum_{j\in D} x_j = 41 + 32 = 73 \quad (45 \geq 73\,)$$

Luego no podemos conseguir una suma de 361 con números de una o dos cifras con dígitos distintos y sin repetir ningún dígito.

Para suma 360 tenemos, otra vez, que no podemos utilizar sólo números de una cifra pues

$$\sum_{i=0}^{9} x_i = \frac{0+9}{2} \cdot 10 = 45$$

Otra vez, exigimos conseguir 360 con números de una cifra con dígitos distintos y sin repetir ningún dígito.

$$\sum_{i \in U} x_i + 10 \sum_{j \in D} x_j = 360$$

De la misma forma que antes tendremos que $\sum_{i \in U} x_i$ puede ser 10, 20, 30 o 40 (50 y ninguno posterior a él, pues 50 excede a la suma máxima de 45).

Si $\sum_{i \in U} x_i$ = 10 $\Rightarrow$ 10+10· $\sum_{j \in D} x_j$ = 360 $\Rightarrow$ $\sum_{j \in D} x_j$ = 35 y entonces:

$$45 = \sum_{i=0}^{9} x_i = \sum_{i \in U} x_i + \sum_{j \in D} x_j = 10 + 35 = 45$$

Es decir, en este caso, participan en los números todos los dígitos. En otras palabras, U y D son una partición de {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Además, los dos conjuntos han de tener cardinalidad 5 pues si |U|=6 y |D|=4 la mayor suma $\sum_{j \in D} x_j$ con |D|=4mes 6+7+8+9 = 30 ≠ 35. E idéntico razonamiento se puede utilizar con |U|∈{7, 8, 9} y |D|∈{3, 2, 1}. Luego hemos de particionar {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} en dos conjuntos con $\sum_{i \in U} x_i = 10$ y $\sum_{j \in D} x_j = 35$ y esto es sólo posible si $\{x_i\}_{i \in U}$ = {0, 1, 2, 3, 4} y $\{x_j\}_{j \in D}$= {5, 6, 7, 8, 9}. Como la primera decena (5) se puede combinar con 5 unidades, la segunda decena (6) se puede combinar con 4 unidades y así sucesivamente hay 5·4·3·2·1 = 5! = 120 formas de conseguir suma 360.

Si $\sum_{i \in U} x_i$ = 20 (30, 40) $\Rightarrow$ 20 (30, 40) +10· $\sum_{j \in D} x_j$ = 360 $\Rightarrow$ $\sum_{j \in D} x_j$ = 34 (33, 32) que es un absurdo pues:

$$45 = \sum_{i=0}^{9} x_i \geq \sum_{i \in U} x_i + \sum_{j \in D} x_j = 20 + 34\ (30 + 33, 40 + 32) = 54 \quad (63, 72\ )$$

Diciembre 2: Se sabe que:

αβδ78η·792=2540abc88

con a, b, c, α, β, δ, η dígitos. Hallar esos dígitos desconocidos

Nivel: Preparación OME.

Solución:

A. Como 792 = 2^3·9·11 tendremos que N = 2540abc88 es múltiplo de 8, de 9 y de 11.

B. Como al multiplicar las dos últimas cifras de los factores obtenemos $2 \cdot \eta = \underbrace{\ldots}8$. De donde η = 4 o η = 9.

C. Si η = 4 entonces $\underbrace{\ldots}784 \cdot 792 = \underbrace{\ldots}928 \neq \underbrace{\ldots}c88$. Si η = 9 entonces $\underbrace{\ldots}789 \cdot 792 = \underbrace{\ldots}888 \Rightarrow$ $\boxed{\eta = 9 \text{ y } c = 8}$

D. Como N es múltiplo de 11 la suma de las cifras que ocupan lugares impares menos la suma de cifras que ocupan lugares pares debe ser múltiplo de 11. Es decir: (8 + 8 + a + 4 + 2) – (8 + b + 0 + 5) = 9 + a – b $\in\{0, 11\}$ pues $0 \le 9 + a - b \le 18$. Luego a – b = – 9 o a – b = 2

E. Como N es múltiplo de 9 la suma de todas sus cifras es múltiplo de 9. Es decir: 2 + 5 + 4 + 0 + a + b + 8 + 8 +8 = 35 + a + b debe ser múltiplo de 9. Como $35 \le 35 + a + b \le 53$ debe ser a + b + 35 = 36 o a + b + 35 = 45, es decir a + b = 1 o a + b = 10.

F. $\left.\begin{matrix} a+b=1 \\ a-b=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ 2a = 3 \ \text{No aporta soluciones}$

G. $\left.\begin{matrix} a+b=1 \\ a-b=-9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ 2a = -8 \ \text{No aporta soluciones}$

H. $\left.\begin{matrix} a+b=10 \\ a-b=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ 2a = 12 \ \Rightarrow \ \boxed{a = 6, b = 4}$

I. $\left.\begin{matrix} a+b=10 \\ a-b=-9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ 2a = 1 \ \text{No aporta soluciones}$

J. Es decir, tenemos: $\alpha\beta\delta789 \cdot 792 = 254064888 \ \Rightarrow \ \alpha\beta\delta789 = \frac{254064888}{792} = 320789$

<u>Diciembre 3-10:</u> En el IES “La Plana” hay 280 alumnos de sexo masculino de un total de 614. De los que cursan bachillerato, siete de cada quince son de sexo masculino. Y de los que cursan ESO, la proporción de mujeres es 127/232. Hallar el porcentaje de alumnado que cursa bachillerato y la proporción de mujeres que cursan bachillerato

<u>Nivel:</u> Segundo de bachillerato.

<u>Solución:</u> Sea M (F) el suceso ser de sexo masculino (femenino) y B (E) es suceso ser alumno que cursa bachillerato (ESO). De los datos:

$$P(M) = \frac{280}{614}, \quad P\left({}^{M}/_{B}\right) = \frac{7}{15}, \quad P\left({}^{F}/_{E}\right) = \frac{127}{232}$$

Sea x = P(B $\cap$ M) e y = P(E $\cap$ F), entonces podemos obtener la siguiente tabla de contingencia:

	M	F	
B	x	$\frac{334}{614} - y$	$x + \frac{334}{614} - y$
E	$\frac{280}{614} - x$	y	$\frac{280}{614} - x + y$
	$\frac{280}{614}$	$\frac{334}{614}$	1

De las probabilidades condicionadas tenemos:

$$P\left({}^{M}/_{B}\right) = \frac{7}{15} = \frac{P(M \cap B)}{P(B)} = \frac{x}{x - y + \frac{334}{614}}, \dots, 8x + 7y = \frac{1169}{307}$$

$$P\left({}^{F}/_{E}\right) = \frac{127}{232} = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} = \frac{y}{y - x + \frac{280}{614}}, \dots, 127x + 105y = \frac{17780}{307}$$

$$\left.\begin{aligned} 8x+7y &= \frac{1169}{307} \\ 127x+105y &= \frac{17780}{307} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1169}{307} & 7 \\ \frac{17780}{307} & 105 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 127 & 105 \end{vmatrix}} = \frac{35}{307} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 8 & \frac{1169}{307} \\ 127 & \frac{17780}{307} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 127 & 105 \end{vmatrix}} = \frac{127}{307} \end{aligned}$$

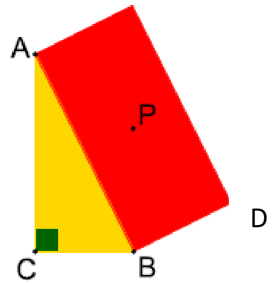
La tabla de contingencia queda:

	M	F	
B	$\frac{35}{307}$	$\frac{40}{307}$	$\frac{75}{307}$
E	$\frac{105}{307}$	$\frac{127}{307}$	$\frac{232}{307}$
	$\frac{140}{307}$	$\frac{167}{307}$	1

Y podemos contestar a cualquier pregunta:

$$P(B)=\frac{75}{307}\approx 24{,}43\%;\quad P\left({}^{E}\!/_{B}\right)=\frac{P(F\cap B)}{P(B)}=\frac{{}^{40}\!/_{307}}{{}^{75}\!/_{307}}=\frac{40}{75}\approx 53{,}33\%$$

Diciembre 4-5: Sea ΔABC un triángulo rectángulo en C con CB = 1 y ∠A = 30°. Sobre AB se dibuja un rectángulo de área $4\sqrt{3}$. Sea P el centro del rectángulo. Hallar perímetro y área de los triángulos ΔCAP y ΔCPB.

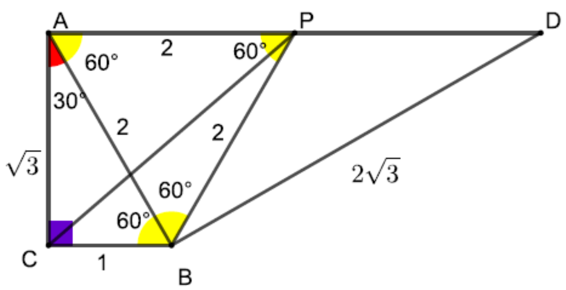


Nivel: A partir de 4ESO.

Solución: El triángulo ΔABC cumple ∠C = 90°, ∠A = 30° y ∠B = 60°.

Es decir ΔABC es un triángulo 30°-60°-90° y por tanto la hipotenusa mide el doble del cateto pequeño y el cateto grande mide $\sqrt{3}$ veces el cateto pequeño, es decir CB = 1, CA = $\sqrt{3}$ y AB = 2.

Respecto del rectángulo tenemos que su altura es 2 y su área es $4\sqrt{3}$, por tanto, su base, BD = $2\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $AD=\sqrt{4+12}=4$ $\Rightarrow PB=AP=\frac{1}{2}AD=2$ $\Rightarrow$ ΔABP es equilátero $\Rightarrow$ sus ángulos miden 60° $\Rightarrow$ ΔACP es rectángulo en A (pues 30° + 60° = 90°) $\Rightarrow$ $A_{\Delta ACP}=\frac{\sqrt{3}\cdot 2}{2}=\sqrt{3}$



Y al aplicar Pitágoras al triángulo ΔACP:

$$\mathrm{CP} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{7} \Rightarrow \text{Perímetro} = \sqrt{3} + 2 + \sqrt{7}$$

Respecto al triángulo ΔCBP tenemos:

Perímetro: CP + BP + CB = $\sqrt{7} + 2 + 1 = 3 + \sqrt{7}$

$$\text{Área} = \frac{\mathrm{CB} \cdot \mathrm{BP} \cdot \sin(60° + 60°)}{2} = 2 \cdot \sin(60°) \cdot \cos(60°) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

El área puede encontrarse de forma alternativa como:

$$\mathrm{A}_{\Delta\mathrm{CBP}} = \mathrm{A}_{\text{cuadrilátero}} - \mathrm{A}_{\Delta\mathrm{CAP}} = (\mathrm{A}_{\Delta\mathrm{ABC}} + \mathrm{A}_{\Delta\mathrm{ABP}}) - \mathrm{A}_{\Delta\mathrm{CAP}} = \left(\frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\right) - \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Diciembre 6: ¿Cuáles son los naturales que tienen p divisores siendo p un número primo?

Nivel: Preparación OME.

Solución: Recordemos que:

a) Si $\mathrm{N} = \mathrm{p}_1^{\alpha_1} \cdot \mathrm{p}_2^{\alpha_2} \cdot \mathrm{p}_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot \mathrm{p}_\mathrm{n}^{\alpha_\mathrm{n}}$ con $\{p_i\}_{i=1}^{n}$ primos y exponentes naturales, es la descomposición factorial de N en producto de primos, el número de divisores de N es

$$\prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} (\alpha_\mathrm{i} + 1)$$

b) Los números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157,……

Por tanto, si buscamos los naturales N con p (siendo p primo) divisores naturales, puesto que p no se puede factorizar, N es la potencia de un primo. Con más precisión, N = q^{p-1} con q cualquier primo

Diciembre 7-8: Simplificar la expresión:

$$\mathbf{A = \cos^2 \frac{2\pi}{3} - 4sen\,\frac{2\pi}{3}\,sen\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}}$$

Nivel: Bachillerato.

Solución: Recordemos que sin (2α) = 2·sin α·cos α. Con esto:

$$\begin{aligned} \mathrm{A} = \cos^2\frac{2\pi}{3} - 4\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3} &= \cos^2\frac{2\pi}{3} - \mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}\,2\left(2\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{3} \\ &= \cos^2\frac{2\pi}{3} - \mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}\left(2\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\right) = \cos^2\frac{2\pi}{3} - \mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}\left(\mathrm{sen}\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \cos^2\frac{2\pi}{3} - \mathrm{sen}^2\,\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

Habida cuenta que cos(2α) = $\cos^2$α - $\sin^2$α. Por último:

$$\mathrm{A} = \cos\frac{4\pi}{3} = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

Diciembre 9: ¿Cuántos naturales existen de manera que el producto de sus dígitos sea 78?

Nivel: Preparación OME.

Solución: Puesto que 78= 2·3·13 y 13 es primo, y por tanto no se puede expresar como producto de números de una cifra, no podemos poner 78 como producto de cifras de números y por tanto no existen naturales de manera que el producto de sus cifras sea 78.

Diciembre 11: ¿Cuántos naturales de tres cifras cumplen que el producto de sus cifras es 72? ¿Y cuántos de cuatro cifras?

Nivel: Preparación OME.

Solución: Buscamos números generados con las cifras α, β y δ para los que $\alpha\cdot\beta\cdot\delta = 72 = 2^3\cdot 3^2$. Las diferentes posibilidades son:

A. $\alpha = 1$, $\beta = 8$, $\delta = 9$. Estas cifras generan 3! = 6 números diferentes (Tres posibilidades para las centenas, dos posibilidades para las decenas y una posibilidad para las unidades)

B. $\alpha = 2$, $\beta = 4$, $\delta = 9$. Estas cifras generan 3! = 6 números diferentes.

C. $\alpha = 2$, $\beta = 6$, $\delta = 6$. Estas cifras generan 3 números diferentes (las maneras diferentes de colocar el dos y completar os números con los dos seises)

D. $\alpha = 3$, $\beta = 3$, $\delta = 8$. Estas cifras generan 3 números diferentes.

E. $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $\delta = 6$. Estas cifras generan 3! = 6 números diferentes

En total hay (6 + 6 + 3 + 3 + 6 =) 24 números de tres cifras de manera que el producto de sus cifras es 72.

Buscamos ahora los números generados con las cifras α, β, δ y ηpara los que $\alpha\cdot\beta\cdot\delta\cdot\eta = 72 = 2^3\cdot 3^2$. Algunas posibilidades son las halladas anteriormente añadiendo un 1 en cualquiera de las posibles posiciones, es decir:

A. $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\delta = 8$, $\eta = 9$. Estas cifras generan $\binom{4}{2}\cdot 2 = 12$ números (Hay $\binom{4}{2}$ maneras de elegir dos posiciones de entre cuatro en las que colocar los unos y cada una de estas posiciones genera dos números colocando primero el ocho y luego el nueve o primero el nueve y luego el ocho.

B. $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\delta = 4$, $\eta = 9$. Estas cifras generan 4! = 24 números.

C. $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\delta = 6$, $\eta = 6$. Estas cifras generan $\binom{4}{2}\cdot 2 = 12$ números

D. $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\delta = 3$, $\eta = 8$. Estas cifras generan $\binom{4}{2}\cdot 2 = 12$ números

E. $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\delta = 4$, $\eta = 6$. Estas cifras generan 4! = 24 números

A estas opciones hemos de añadir:

A. $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\delta = 2$, $\eta = 9$. Estas cifras generan 4 números (Hay 4 formas de colocar el nueve y luego los doses).

B. $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\delta = 3$, $\eta = 4$. Estas cifras generan $\binom{4}{2}\cdot 2 = 12$ números.

C. $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\delta = 3$, $\eta = 6$. Estas cifras generan $\binom{4}{2}\cdot 2 = 12$ números.

En total hay (12 + 24 + 12+ 12 + 24 + 4 + 12 + 12 =) 112 números

Diciembre 12-13: ¿Cuántos subconjuntos con al menos seis elementos se pueden formar a partir de

A= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

de manera que la suma de sus elementos sea múltiplo de 9?

Nivel: Preparación OME.

Solución: Tenemos en primer lugar que 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 +7 + 8 + 9 = 45 que es un múltiplo de 9. Por lo tanto, hay un subconjunto con 9 elementos, el propio A que cumple el requisito del enunciado.

Consideremos los subconjuntos de ocho elementos. Si extraemos de A un elemento las sumas extremas que podemos obtener son: (45 – 9 =) 36 y (45 – 1 =) 44. El único múltiplo de 9 entre 36 y 44 es 36. Luego {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} es el único subconjunto de 8 elementos extraído de A con suma de todos sus elementos múltiplo de 9.

Si extraemos de A dos elementos las sumas extremas que podemos obtener son: (45 – 9 – 8 =) 28 y (45 – 1 – 2 =) 42. El único múltiplo de 9 entre 28 y 42 es 36. Hemos de quitar de A dos elementos que sumen (45 – 36 =) 9, es decir hemos de quitar a {1, 8}, {2, 7}, {3, 6}, {4, 5}. Luego {2, 3, 4, 5, 6, 7, 9}, {1, 3, 4, 5, 6, 8, 9}, {1, 2, 4, 5, 7, 8, 9} y {1, 2, 3, 6, 7, 8, 9} son los únicos subconjuntos de 7 elementos extraído de A con suma de todos sus elementos múltiplo de 9.

Si extraemos de A tres elementos las sumas extremas que podemos obtener son: (45 – 9 – 8 – 7 =) 21 y (45 – 1 – 2 – 3 =) 39. los únicos múltiplos de 9 entre 21 y 39 es 27 y 36. Hemos de quitar de A tres elementos:

A. que sumen (45 – 27 =) 18, es decir hemos de quitar a {9, 8, 1}, {9, 7, 2}, {9, 6, 3}, {9, 5, 4} {8, 7, 3}, {8, 6, 4}, {7, 6, 5}. Luego {2, 3, 4, 5, 6, 7}, {1, 3, 4, 5, 6, 8}, {1, 2, 4, 5, 7, 8}, {1, 2, 3, 6, 7, 8}, {1, 2, 4, 5, 6, 9}, {1, 2, 3, 5, 7, 9} y {1, 2, 3, 4, 8, 9} son los únicos subconjuntos de 6 elementos extraído de A con suma de todos sus elementos 27 que es múltiplo de 9.
B. que sumen (45 – 36 =) 9, es decir hemos de quitar a {1, 2, 6}, {1, 3, 5}, {2, 3, 4}. Luego {2, 3, 4, 5, 6, 7}, {1, 2, 4, 5, 6, 9}, {1, 2, 3, 4, 8, 9} son los únicos subconjuntos de 6 elementos extraído de A con suma de todos sus elementos 36 que es múltiplo de 9.

En total los subconjuntos que solicita el enunciado son:

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9}, {1, 3, 4, 5, 6, 8, 9}, {1, 2, 4, 5, 7, 8, 9}, {1, 2, 3, 6, 7, 8, 9}

{2, 3, 4, 5, 6, 7}, {1, 3, 4, 5, 6, 8}, {1, 2, 4, 5, 7, 8}, {1, 2, 3, 6, 7, 8}, {1, 2, 4, 5, 6, 9}, {1, 2, 3, 5, 7, 9}, {1, 2, 3, 4, 8, 9}, {2, 3, 4, 5, 6, 7}, {1, 2, 4, 5, 6, 9}, {1, 2, 3, 4, 8, 9}

Diciembre 14: ¿Cuál es la mayor potencia de 2 que divide a $2^{2017}+10^{2017}+100^{2017}$?

Nivel: Preparación OME.

Solución: Tenemos:

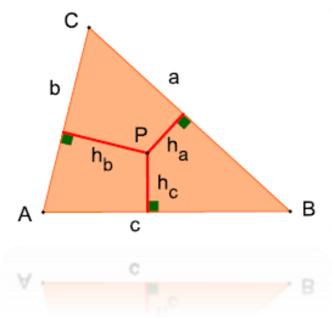
$$2^{2017}+10^{2017}+100^{2017}=2^{2017}+2^{2017}\cdot 5^{2017}+2^{4034}\cdot 5^{4034}$$
$$=2^{2017}\cdot(1+5^{2017}+2^{2017}\cdot 5^{4034})$$

Por lo tanto, parece ser la contestación 2^{2017}. Pero 5^{2017} acaba en 25 (toda potencia de 5 excepto 5^0 y 5^1 acaba en 25). Lo que implica que $1 + 5^{2017}$ acaba en 26, y por tanto $1 + 5^{2017}$ acaba en 26, y por tanto $1 + 5^{2017}$ es múltiplo de 2 pero no de 4. Por tanto $1 + 5^{2017} = 2 \cdot k$ donde k es impar. Por otra parte, $2^{2016} \cdot 5^{4034}$ es par. En definitiva:

$$2^{2017} + 10^{2017} + 100^{2017} = 2^{2017} \cdot \left(2 \underbrace{k}_{\text{impar}} + 2^{2017} 5^{4034}\right) = 2^{2018} \left(\underbrace{k}_{\text{impar}} + \underbrace{2^{2016} \cdot 5^{4034}}_{\text{par}}\right)$$

Por tanto, la mayor potencia de base 2 que divide a $2^{2017}+10^{2017}+100^{2017}$ es 2^{2018}.

Diciembre 15-16: Sea ΔABC un triángulo acutángulo de área A y perímetro Π. Sea P un punto interior y h_a (h_b, h_c) la distancia de P (en perpendicular) a CB (CA, AB) y r el radio de la circunferencia inscrita al triángulo. Demostrar que $2A = b \cdot h_b + c \cdot h_c + a \cdot h_a$, que $2A = \Pi r$, y que si el triángulo es equilátero de lado a $2A = 3ar$



Nivel: A partir de 2ESO.

Solución: Tendremos uniendo P con los vértices del triángulo: A, B y C que se forman tres triángulos de manera que el área del triángulo inicial es suma de áreas de estos tres triángulos:

$$A = \frac{c \cdot h_c}{2} + \frac{b \cdot h_b}{2} + \frac{a \cdot h_a}{2} \Rightarrow 2A = a \cdot h_a + b \cdot h_b + c \cdot h_c$$

Si tomamos P como el punto donde se cortan las bisectrices de los tres ángulos del triángulo inicial, entonces: $r = h_a = h_b = h_c$ donde r es el radio de la circunferencia inscrita, y:

$$2A = a \cdot h_a + b \cdot h_b + c \cdot h_c = a \cdot r + b \cdot r + c \cdot r = r \cdot (a + b + c) = \Pi \cdot r$$

Por último, si el triángulo es equilátero $a = b = c$, y $2A = 3 \cdot a \cdot r$

Diciembre 17: ¿Para cuántos naturales n de una cifra es $n^2 + n + 1$ un divisor de $n^{2017} + 150$?

Nivel: A partir bachillerato.

Solución: Tenemos:

$$n^{2017} + 150 = (n^2 + n + 1) \cdot (n^{2015} - n^{2014} + n^{2012} - n^{2011} + \cdots + n^5 - n^4 + n^2 - n) + n + 150$$

Para que $n^2 + n + 1$ sea un divisor de $n^{2017} + 150$, $n^2 + n + 1$ ha de ser un divisor de $n + 150$. Veamos que valores de n de una cifra hacen que $n + 150$ sea divisible por $n^2 + n + 1$

n	n + 150	$n^2 + n + 1$	¿$n^2 + n + 1$ divide a n + 150?
1	151	3	¿3 divide a 151? NO
2	152	7	¿7 divide a 152? NO
3	153	13	¿13 divide a 153? NO
4	154	21	¿21 divide a 154? NO
5	155	31	¿31 divide a 155? SI

6	156	43	¿43 divide a 156? NO
7	157	57	¿57 divide a 157? NO
8	158	73	¿73 divide a 158? NO
9	159	91	¿91 divide a 159? NO

Por tanto, sólo para n = 5, $n^{2017} + 150$ es divisible por $n^2 + n + 1$.

Diciembre 18: Demostrar que 2018 no es suma de un cuadrado y un cubo con bases de distinta paridad (es decir una par y la otra impar)

Nivel: Preparación OME.

Solución 1: Por reducción al absurdo.

Si $2018 = \underbrace{\underbrace{(2n)^2}_{\text{par}} + \underbrace{(2m+1)^3}_{\text{impar}}}_{\text{impar}}$ tendríamos que 2018 es impar

Si $2018 = \underbrace{\underbrace{(2n+1)^2}_{\text{impar}} + \underbrace{(2m)^3}_{\text{par}}}_{\text{impar}}$ tendríamos que 2018 es impar

Solución 2: Consideremos congruencias módulo 4. Tenemos:

$$\text{n par} \;\Rightarrow\; \begin{cases} n = 0(4) \;\Rightarrow\; n^2 = 0(4) \;\Rightarrow n^3 = 0(4) \\ n = 2(4) \Rightarrow\; n^2 = 0(4) \;\Rightarrow n^3 = 0(4) \end{cases}$$

$$\text{n impar} \;\Rightarrow\; \begin{cases} n = 1(4) \;\Rightarrow\; n^2 = 1(4) \;\Rightarrow n^3 = 1(4) \\ n = 3(4) \Rightarrow\; n^2 = 1(4) \;\Rightarrow n^3 = 3(4) \end{cases}$$

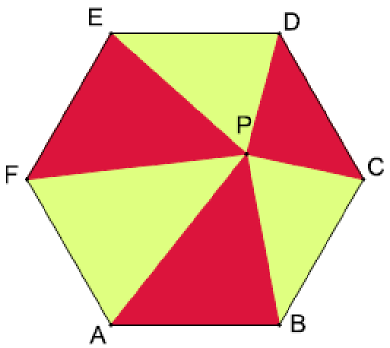
Además:

$$\left.\begin{array}{r} \text{n es par} \;\Rightarrow\; n^2 = 0(4) \\ \text{m es impar} \;\Rightarrow\; m^2 = 1(4) \;\Rightarrow m^3 = \begin{cases} 1(4) \\ 3(4) \end{cases} \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; n^2 + m^3 = \begin{cases} 1(4) \\ 3(4) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{n es impar} \;\Rightarrow\; n^2 = 1(4) \\ \text{m es par} \;\Rightarrow\; m^2 = 0(4) \Rightarrow m^3 = 0(4) \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; n^2 + m^3 = 1(4)$$

Por lo tanto, $n^2 + m^3$ con n y m de distinta paridad nunca pueden dar 0(4) o 2(4). Como 2018 = 2(4), tenemos que 2018 no puede ponerse como suma de un cuadrado y un cubo con bases de diferente paridad.

Diciembre 19-26: Sea ABCDEF un hexágono regular con AB = 1. Sea P un punto del interior del hexágono. Sea S la suma de las áreas de los triángulos ΔABP, ΔCDP y ΔEFP. Calcular el valor de S

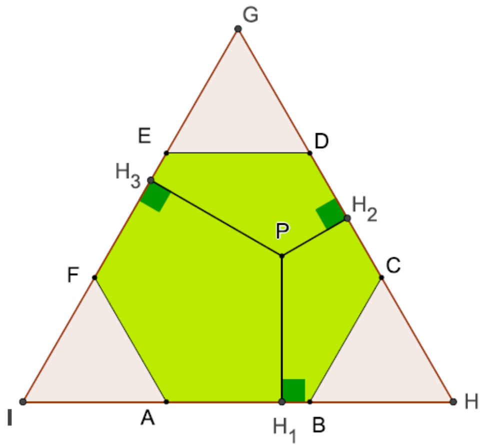


Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: Sea H_1 (H_2, H_3) el punto de AB (CD, EF) de manera que PH_1 (PH_2, PH_3) es perpendicular a AB (CD, EF)

Entonces:

$$S = \frac{AB \cdot PH_1}{2} + \frac{CD \cdot PH_2}{2} + \frac{EF \cdot PH_3}{2} =$$
$$= \left\{ \begin{matrix} AB = CD = \\ EF = 1 \end{matrix} \right\} =$$
$$= \frac{1}{2}(PH_1 + PH_2 + PH_3)$$



Por otra parte, sea I (H, G) la intersección de AB y EF (AB y DC, EF y CD). Entonces ΔIGH es equilátero de lado 3, y por tanto su área es $\frac{9}{4}\sqrt{3}$. Pero P descompone el triángulo equilátero en tres triángulos con alturas H_1 (H_2 y H_3) y base 3. De donde:

$$\frac{9}{4}\sqrt{3} = \frac{3 \cdot PH_1}{2} + \frac{3 \cdot PH_2}{2} + \frac{3 \cdot PH_3}{2} = \frac{3}{2}(PH_1 + PH_2 + PH_3) \;\; \Rightarrow \;\; PH_1 + PH_2 + PH_3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(Este último razonamiento puede evitarse con el teorema de Viviani que garantiza que la suma de los segmentos $PH_1 + PH_2 + PH_3$ es la altura del triángulo equilátero). Por tanto:

$$S = \frac{1}{2}(PH_1 + PH_2 + PH_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Diciembre 20: Demostrar que 2017 no es suma de un cuadrado y un cubo con bases de la misma paridad (es decir las dos pares o las dos impares)

Nivel: Preparación OME.

Solución 1: Consideremos congruencias módulo 4. Tenemos:

$$\text{n par} \;\; \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} n = 0(4) \;\Rightarrow\; n^2 = 0(4) \;\Rightarrow n^3 = 0(4) \\ n = 2(4) \Rightarrow\; n^2 = 0(4) \;\Rightarrow n^3 = 0(4) \end{matrix} \right.$$

$$\text{n impar} \;\; \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} n = 1(4) \;\Rightarrow\; n^2 = 1(4) \;\Rightarrow n^3 = 1(4) \\ n = 3(4) \Rightarrow\; n^2 = 1(4) \;\Rightarrow n^3 = 3(4) \end{matrix} \right.$$

Además:

$$\left. \begin{matrix} \text{n es par} \;\Rightarrow\; n^2 = 0(4) \\ \text{m es par} \;\Rightarrow\; m^3 = 0(4) \end{matrix} \right\} \;\Rightarrow\; n^2 + m^3 = 0(4)$$

$$\left. \begin{matrix} \text{n es impar} \;\Rightarrow\; n^2 = 1(4) \\ \text{m es impar} \;\Rightarrow\; m^2 = 1(4) \;\Rightarrow m^3 = \left\{ \begin{matrix} 1(4) \\ 3(4) \end{matrix} \right. \end{matrix} \right\} \;\Rightarrow\; n^2 + m^3 = \left\{ \begin{matrix} 2(4) \\ 0(4) \end{matrix} \right.$$

Por lo tanto, ningún número que dé resto 1 o 3, al dividirlo por 4 puede expresarse como suma de un cuadrado y un cubo con bases con la misma paridad. Como 2017 = 1(4) tenemos lo deseado.

Solución 2: Al absurdo:

Si 2017 = $(2n)^2 + (2m)^3$. Entonces: 2017 = $4(n^2 + 2m^3)$ $\Rightarrow$ 2017 es par

Si 2017 = $(2n+1)^2 + (2m + 1)^3$. Entonces 2017 = $2(2n^2 + 2n + 4m^3 + 6m^2 + 3m + 1) \Rightarrow$ 2017 es par

Diciembre 21: Demostrar que, si a es primo diferente de 2 y 3, $a^{2n} - 1$ es múltiplo de 6

Nivel: Preparación OME.

Solución: Demostraremos que, bajo las condiciones del enunciado $a^{2n} - 1$ es múltiplo de 24. Tenemos:

$$a^{2n} - 1 = (a^n - 1) \cdot (a^n + 1)$$

Como a es primo diferente de 2, resulta que a es impar. Por tanto, a^n es impar. De donde $a^n \pm 1$ son pares i consecutivos. Luego uno es múltiplo de 2 y el otro múltiplo de 4. Y por tanto $a^{2n} - 1$ es múltiplo de 8.

Por otra parte, a es diferente de 3, por tanto, en a^n no aparece el factor 3 en su descomposición factorial como producto de primos. Como $a^n - 1$, a^n y $a^n + 1$, son tres números consecutivos, uno de ellos es múltiplo de 3, como no lo es el número central tenemos que o bien $a^n - 1$ o $a^n + 1$ es múltiplo de 3. Por último, $a^{2n} - 1$ es múltiplo de 8 y múltiplo de 3, luego es múltiplo de 24.

Diciembre 22: Hallar los enteros z que cumplen que $z^4 - 21z^2$ es un cuadrado perfecto

Nivel: Preparación OME.

Solución: Obviamente z = 0 es solución. Si $z \neq 0$ tenemos:

$$z^4 - 21z^2 = z^2 \cdot (z^2 - 21)$$

Por lo que $z^4 - 21z^2$ será un cuadrado perfecto sii lo es $z^2 - 21$. Buscamos pues las soluciones de la ecuación $z^2 - 21 = n^2$ con z entero y n natural (*).

Si $z^2 - 21 = n^2$ entonces $z^2 = n^2 + 21$. Como $z^2 > n^2$ debe existir s tal que $n^2 + 21 = (n + s)^2 = n^2 + 2ns + s^2$. Es decir, $z^2 - 21 = n^2$ es equivalente a $21 = 2ns + s^2$

Para $s = 1 \Rightarrow 21 = 2n + 1 \Rightarrow n = 10$

Para $s = 2 \Rightarrow 21 = 4n + 4 \Rightarrow n \notin N$

Para $s = 3 \Rightarrow 21 = 6n + 9 \Rightarrow n = 2$

Para $s = 4 \Rightarrow 21 = 8n + 16 \Rightarrow n \notin N$

Valores posteriores de s provocarían que n es negativo y por lo tanto no tienen sentido valores de s > 4.

Salen dos valores para n en (*)

$$z^2 - 21 = 10^2 \Rightarrow z^2 = 121 \Rightarrow z = \pm 11$$

$$z^2 - 21 = 2^2 \Rightarrow z^2 = 25 \Rightarrow z = \pm 5$$

Por lo tanto, sólo para $z \in \{-11, -5, 0, 5, 11\}$ se tiene que $z^4 - 21z^2$ es un cuadrado perfecto.

Diciembre 23: Demostrar que $11^{3n} - 1$ es múltiplo de 70

Nivel: Preparación OME.

Solución: Tenemos (para n = 1)

$$11^3 - 1 = 1331 - 1 = 1330$$

que es múltiplo de 7 (1330 = 13·100 +30 =13·(7·14 + 2) + 30 = 13·14·7 + 2·13 + 30. Por tanto$1330 = \dot{7}$ $\Leftrightarrow$ $2 \cdot 13 + 30 = 56 = \dot{7}$, y como 56 = 7·8 tenemos que 1330 es múltiplo de 7. (Otro criterio de divisibilidad de 7: xyzt es múltiplo de 7 sii 2·xy + zt es múltiplo de 7)). Ahora de la factorización:

$$x^k - 1 = (x-1) \cdot \left(x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + x + 1\right) = \dot{\widehat{(x-1)}}$$

tenemos, haciendo x = 11^3:

$$11^{3k} - 1 = \dot{\widehat{11^3 - 1}} = \dot{\widehat{1330}}$$

Y como 1330 es múltiplo de 10 y de 7 tenemos que $11^{3k} - 1$ es múltiplo de 70.

NOTA: Hemos demostrado más de lo propuesto: Hemos demostrado que $11^{3n} - 1$ es múltiplo de 1330, es decir múltiplo de 10, de 7 y de 19

<u>Solución más simple (Professor Smudge. @ProfSmudge)</u>

$$11^3=1331$$

$(1330+1)^n$=(teorema del binomio(Newton), aplicando que los n primeros sumandos tiene el factor 1330)=$1330 \cdot k+1^n$

de donde se deduce obviamente lo propuesto

<u>Diciembre 24:</u> Consideremos A = {1, 2, ...,30}. Demostrar que cualquier subconjunto de A con 21 elementos, tiene, al menos tres con la misma cifra en las unidades

<u>Nivel:</u> Preparación OME.

<u>Solución:</u> Consideremos

A_i = {números de A que dan resto i al dividirlos por 10}

Es decir:

A_0 = {10, 20, 30}; A_1 = {1, 11, 21}; A_2 = {2, 12, 22}; …. ; A_8 = {8, 18, 28}; A_9 = {9, 19, 29}. Estos conjuntos son una partición de A. Por el principio de Dirichlet, extraídos 21 elementos de A al menos hay un A_i (nido) al que pertenecen 3 números (palomos)de los 21 considerados. Los tres elementos de ese A_i tienen la misma cifra en las unidades.

<u>Diciembre 25:</u> ¿Para qué valores de n $\mathbf{2^n + 3^n + 5^n + 7^n}$ es múltiplo de 5?

<u>Nivel:</u> Preparación OME.

<u>Solución:</u> Veamos en que cifra termina cada una de las potencias 2^n, 3^n, 5^n y 7^n para distintos valores de n:

n	2^n acaba en
1, 5, 9, ………, n = 1(4)	2
2, 6, 10, ……, n = 2(4)	4
3, 7, 11, ……, n = 3(4)	8
4, 8, 12, ……, n = 0(4)	6

n	3^n acaba en
1, 5, 9, ………, n = 1(4)	3
2, 6, 10, ……, n = 2(4)	9
3, 7, 11, ……, n = 3(4)	7
4, 8, 12, ……, n = 0(4)	1

5^n siempre acaba en 5

n	7^n acaba en
1, 5, 9, ………, n = 1(4)	7
2, 6, 10, ……, n = 2(4)	9
3, 7, 11, ……, n = 3(4)	3
4, 8, 12, ……, n = 0(4)	1

Por tanto:

n	$2^n + 3^n + 5^n + 7^n$ acaba en
1, 5, 9, ………, n = 1(4)	(2 + 3 + 5 + 7 =) 7
2, 6, 10, ……, n = 2(4)	(4 + 9 + 5 + 9 =) 7
3, 7, 11, ……, n = 3(4)	(8 +7 + 5 + 3 =) 3
4, 8, 12, ……, n = 0(4)	(6 + 1 + 5 + 1 =) 3

Luego para cualquier n natural $2^n + 3^n + 5^n + 7^n$, no es múltiplo de 5.

Diciembre 27: Demostrar que $\mathbf{2018^{2018}}$ no es suma de dos cubos perfectos

Nivel: Preparación OME.

Solución: Consideremos congruencias módulo 7. Tenemos:

$$\text{Si } n = 0(7) \Rightarrow n^2 = 0(7) \Rightarrow n^3 = 0(7)$$

$$\text{Si } n = 1(7) \Rightarrow n^2 = 1(7) \Rightarrow n^3 = 1(7)$$

$$\text{Si } n = 2(7) \Rightarrow n^2 = 4(7) \Rightarrow n^3 = 1(7)$$

$$\text{Si } n = 3(7) \Rightarrow n^2 = 2(7) \Rightarrow n^3 = 6(7)$$

$$\text{Si } n = 4(7) \Rightarrow n^2 = 2(7) \Rightarrow n^3 = 1(7)$$

$$\text{Si } n = 5(7) \Rightarrow n^2 = 4(7) \Rightarrow n^3 = 6(7)$$

$$\text{Si } n = 6(7) \Rightarrow n^2 = 6(7) \Rightarrow n^3 = 6(7)$$

Por lo tanto:

$$(*)\ n^3 + m^3 = \begin{cases} 0(7) \\ 1(7) \\ 2(7) \\ 5(7) \\ 6(7) \end{cases}$$

Por otra parte, hallemos el resto de la división de 2018^{2018} entre 7. Tenemos:

$2018 = 2(7) \Rightarrow 2018^{2018} = 2^{2018}(7)$

Hallemos los restos de la división de 2^n entre 7:

n	2^n
1, 4, 7, 10, …. , 1(3)	2(7)
2, 5, 8, 11, …. , 2(3)	4(7)
3, 6, 9, 12, … , 0(3)	1(7)

Como $2018 = 2(3) \Rightarrow 2^{2018} = 4(7)$. Así, pues, $2018^{2018} = 4(7)$, lo que contradice (*). Por tanto, 2018^{2018} no es suma de dos cubos perfectos.

Diciembre 28-29: ¿Para qué valores de n, se cumple que $1^n+2^n+3^n+4^n+5^n+6^n+7^n+8^n+9^n$ es múltiplo de 5?

Nivel: Preparación OME.

Solución: Veamos en que cifra termina cada una de las potencias, para distintos valores de n:

Obviamente 1^n es 1, para cualquier valor de n

n	2^n acaba en
1, 5, 9, ………, n = 1(4)	2
2, 6, 10, ……, n = 2(4)	4
3, 7, 11, ……, n = 3(4)	8
4, 8, 12, ……, n = 0(4)	6

n	3^n acaba en
1, 5, 9, ………, n = 1(4)	3
2, 6, 10, ……, n = 2(4)	9
3, 7, 11, ……, n = 3(4)	7
4, 8, 12, ……, n = 0(4)	1

n	4^n acaba en
1, 3, 5, … , n = 1(2)	4
2, 4, 6, … , n = 0(2)	6

5^n siempre acaba en 5

6^n siempre acaba en 6

n	7^n acaba en
1, 5, 9, ………, n = 1(4)	7
2, 6, 10, ……, n = 2(4)	9
3, 7, 11, ……, n = 3(4)	3
4, 8, 12, ……, n = 0(4)	1

n	8^n acaba en
1, 5, 9, ………, n = 1(4)	8
2, 6, 10, ……, n = 2(4)	4
3, 7, 11, ……, n = 3(4)	2
4, 8, 12, ……, n = 0(4)	6

n	9^n acaba en
1, 3, 5, … , n = 1(2)	9
2, 4, 6, … , n = 0(2)	1

Por tanto:

n	$1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n + 7^n + 8^n + 9^n$ acaba en
1, 5, 9, ………, n = 1(4)	(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 =) 5
2, 6, 10, ……, n = 2(4)	(1 + 4 + 9 + 6 + 5 + 6 + 9 + 4 + 1=) 5
3, 7, 11, ……, n = 3(4)	(1 + 8 +7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9 =) 5
4, 8, 12, ……, n = 0(4)	(1 + 6 + 1 +6 + 5 + 6 + 1 + 6 + 1 =) 3

Luego para todo n natural no múltiplo de 4, $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n + 7^n + 8^n + 9^n$ es múltiplo de 5.

Diciembre 30: Hallar los enteros z tales que $z^6 - 387z^3$ es un cubo

Nivel: Preparación OME.

Solución: Obviamente z = 0 es una solución. Sea $z \neq 0$, tenemos: $z^6 - 387z^3 = z^3\cdot(z^3 - 387)$. Por tanto, $z^6 - 387z^3$ es un cubo perfecto sii lo es $z^3 - 387$. Exigimos, pues, que $z^3 - 387 = n^3$ (*), con $n \in Z$.

1.- (Solución Ignacio Larrosa @ilarrosac)

Si z = n + a, (*) lleva a $3n^2a + 3na^2 + a^3 = 3^2\cdot 43$ (**) $\Rightarrow$ $a(3n^2 + 3na + a^2) = 3^2\cdot 43$ (***)

De (**), como $3n^2a + 3na^2$ es múltiplo de 3 $\Rightarrow$ a^3 es múltiplo de 3 $\Rightarrow$ a es múltiplo de 3

Si a fuese múltiplo de 9, como $3n^2 + 3na + a^2$ es múltiplo de 3 en (***) faltarían factores 3. Por tanto $a = \pm 3$

Si a = 3, (***) lleva a n = 5 i n = - 8, y por tanto a z = 8 y z = - 5. Si a = - 3 no hay soluciones en (***)

2.- (Solución Danielo, @danielo_Gg)

$$z^3 - 387 = n^3 \Leftrightarrow z^3 - n^3 = 387 \Leftrightarrow (z-n)\cdot(z^2 + zn + n^2) = 387 = 3^2 \cdot 43$$

La última ecuación lleva a seis sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\left.\begin{matrix} z-n=1 \\ z^2+zn+n^2=387 \end{matrix}\right\};\quad \left.\begin{matrix} z-n=3 \\ z^2+zn+n^2=129 \end{matrix}\right\};\quad \left.\begin{matrix} z-n=9 \\ z^2+zn+n^2=43 \end{matrix}\right\};\quad \left.\begin{matrix} z-n=43 \\ z^2+zn+n^2=9 \end{matrix}\right\};$$

$$\left.\begin{matrix} z-n=129 \\ z^2+zn+n^2=3 \end{matrix}\right\};\quad \left.\begin{matrix} z-n=387 \\ z^2+zn+n^2=1 \end{matrix}\right\}$$

Solo uno de ellos tiene soluciones admisibles

$$\left.\begin{matrix} z-n=3 \\ z^2+zn+n^2=129 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow (3+n)^2 + (3+n)\cdot n + n^2 = 129 \Leftrightarrow n^2 + 3n - 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 5 \Rightarrow z = 8 \\ n = -8 \Rightarrow z = -5 \end{cases}$$

3.- (Solución "fuerza bruta")

Sea $s \in Z$ definido como z = n + s. Tendremos:

$$z^3 - 387 = n^3 \Leftrightarrow (n+s)^3 - 387 = n^3 \Leftrightarrow (3s)n^2 + (3s^2)n + (s^3 - 387) = 0$$

Esta última es una ecuación diofántica (de segundo grado en $n \in Z$ y de tercer grado en $s \in Z$). Hallemos las soluciones para n. El discriminante para n de esta ecuación es:

$$\Delta = 9s^4 - 4\cdot 3s\cdot(s^3 - 387) = 3s\cdot(1548 - s^3)$$

Si s < 0 (3s < 0 y $s^3 < 0$ de donde $\Delta < 0$) la ecuación no tiene soluciones. Si s > 0, la ecuación tiene soluciones sii $s < \sqrt[3]{1548}$, es decir sii s < 12.

Para s = 1, la ecuación es, $3n^2 + 3n - 386 = 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{9 + 4632} \notin N$

Para s = 2, la ecuación es, $6n^2 + 12n - 379 = 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{144 + 9096} \notin N$

Para s = 3, la ecuación es, $9n^2 + 27n - 360 = 0 \Rightarrow n = \frac{-27 \mp \sqrt{729 + 12960}}{18} = \begin{cases} -8 \\ 5 \end{cases}$

Para s = 4, la ecuación es, $312 + 48n - 323 = 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{2304 + 15504} \notin N$

Para s = 5, la ecuación es, $15n^2 + 75n - 262 = 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{5625 + 15720} \notin N$

Para s = 6, la ecuación es, $18n^2 + 108n - 171 = 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{11664 + 12312} \notin N$

Para s = 7, la ecuación es, $21n^2 + 147n - 44 = 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{21609 + 3696} \notin N$

Para s = 8, la ecuación es, $24n^2 + 192n + 125 = 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{192^2 - 4\cdot 24\cdot 125} \notin N$

Para s = 9, la ecuación es, $27n^2 + 243n + 342 = 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{243^2 - 4\cdot 27\cdot 342} \notin N$

Para s = 10, la ecuación es, $30n^2 + 300n + 613 = 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{300^2 - 4\cdot 30\cdot 613} \notin N$

Para s = 11, la ecuación es, $33n^2 + 363n + 944 = 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{363^2 - 4\cdot 33\cdot 944} \notin N$

Las únicas soluciones salen cuando s = 3 y en este caso n = - 8 y n = 5, en cuyo caso z = 3 – 8 = - 5 y z = 5 + 3 = 8

Diciembre 31: ¿Cuántos naturales hay menores que 500 con 12 divisores naturales?

Nivel: Preparación OME.

Solución: Recordemos que:

1. Si $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ con $\{p_i\}_{i=1}^{n}$ primos y exponentes naturales, es la descomposición factorial de N en producto de primos, el número de divisores de N es
$$\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1)$$
2. Los números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, ……

Por tanto, si buscamos los naturales N con 12 divisores, si $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$son los exponentes de la descomposición factorial de N en producto de primos, debe cumplirse:

$$\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1) = 12 = 3 \cdot 2^2$$

y, por tanto:

a) $n = 1$, $\alpha_1 + 1 = 12$, $\alpha_1 = 11$
b) $n = 2$, $(\alpha_1 + 1)\cdot(\alpha_2 + 1) = 3\cdot 4$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$
c) $n = 2$, $(\alpha_1 + 1)\cdot(\alpha_2 + 1) = 6\cdot 2$ $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 1$
d) $n = 3$, $(\alpha_1 + 1)\cdot(\alpha_2 + 1)\cdot(\alpha_3 + 1) = 2\cdot 2\cdot 3$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$

$\boxed{N = p_1^{11}}$

Como $2^{11} = 2048 > 500$ no hay ningún natural menor que 500 con 12 divisores con esta configuración

$\boxed{N = p_1^2 \cdot p_2^3}$

$$N = 2^2 \cdot p_2^3 \quad \Rightarrow \quad p_2 < \sqrt[3]{\frac{500}{4}} = 5 \quad \Rightarrow \quad p_2 \in \{3\} \quad \Rightarrow \quad N = 108$$

$$N = 3^2 \cdot p_2^3 \quad \Rightarrow \quad p_2 < \sqrt[3]{\frac{500}{9}} \cong 3{,}81 \quad \Rightarrow \quad p_2 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 72$$

$$N = 5^2 \cdot p_2^3 \quad \Rightarrow \quad p_2 < \sqrt[3]{\frac{500}{25}} \cong 2{,}71 \quad \Rightarrow \quad p_2 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 200$$

$$N = 7^2 \cdot p_2^3 \quad \Rightarrow \quad p_2 < \sqrt[3]{\frac{500}{49}} \cong 2{,}16 \quad \Rightarrow \quad p_2 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 392$$

$$N = 11^2 \cdot p_2^3 \quad \Rightarrow \quad p_2 < \sqrt[3]{\frac{500}{121}} \cong 1{,}6 \quad \text{no hay números que cumplan el requisito}$$

$\boxed{N = p_1^5 \cdot p_2}$

$$N = 2^5 \cdot p_2 \quad \Rightarrow \quad p_2 < \frac{500}{32} = 15{,}625 \quad \Rightarrow \quad p_2 \in \{3, 5, 7, 11, 13\} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} N = 32 \cdot 3 = 96 \\ N = 32 \cdot 5 = 160 \\ N = 32 \cdot 7 = 224 \\ N = 32 \cdot 11 = 352 \\ N = 32 \cdot 13 = 416 \end{matrix}$$

$$N = 3^5 \cdot p_2 \quad \Rightarrow \quad p_2 < \frac{500}{3^5} \cong 2{,}05 \quad \Rightarrow \quad p_2 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 486$$

$$N = 5^5 \cdot p_2 \quad \Rightarrow \quad p_2 < \frac{500}{5^5} 0{,}16 \quad \text{no hay números que cumplan el requisito}$$

$$\boxed{N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ p_3^2}$$

$$N = 2 \cdot 3 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{6}} \cong 9{,}12 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{5, 7\} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} N = 150 \\ N = 294 \end{matrix}$$

$$N = 2 \cdot 5 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{10}} \cong 7{,}07 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{3, 7\} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} N = 90 \\ N = 490 \end{matrix}$$

$$N = 2 \cdot 7 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{14}} \cong 5{,}97 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{3, 5\} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} N = 126 \\ N = 350 \end{matrix}$$

$$N = 2 \cdot 11 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{22}} \cong 4{,}76 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{3\} \quad \Rightarrow \quad N = 198$$

$$N = 2 \cdot 13 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{26}} \cong 4{,}38 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{3\} \quad \Rightarrow \quad N = 338$$

$$N = 2 \cdot 17 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{34}} \cong 3{,}83 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{3\} \quad \Rightarrow \quad N = 306$$

$$N = 2 \cdot 19 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{38}} \cong 3{,}62 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{3\} \quad \Rightarrow \quad N = 342$$

$$N = 2 \cdot 23 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{46}} \cong 3{,}29 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{3\} \quad \Rightarrow \quad N = 414$$

$$N = 2 \cdot 29 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{58}} \cong 2{,}93 \quad \text{no hay números que cumplan el requisito}$$

$$N = 3 \cdot 5 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{15}} \cong 5{,}77 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 60$$

$$N = 3 \cdot 7 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{21}} \cong 4{,}87 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 84$$

$$N = 3 \cdot 11 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{33}} \cong 3{,}89 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 132$$

$$N = 3 \cdot 13 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{39}} \cong 3{,}58 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 156$$

$$N = 3 \cdot 17 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{51}} \cong 3{,}13 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 204$$

$$N = 3 \cdot 19 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{57}} \cong 2{,}96 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 228$$

$$N = 3 \cdot 23 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{69}} 2{,}69 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 276$$

$$N = 3 \cdot 29 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{87}} \cong 2{,}39 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 348$$

$$N = 3 \cdot 31 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{93}} \cong 2{,}31 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 372$$

$$N = 3 \cdot 37 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{111}} \cong 2{,}12 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 444$$

$$N = 3 \cdot 41 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{123}} \cong 2{,}01 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 492$$

$$N = 3 \cdot 43 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{129}} \cong 1{,}96 \quad \text{no hay números que cumplan el requisito}$$

$$N = 5 \cdot 7 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{35}} \cong 3{,}77 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 140$$

$$N = 5 \cdot 11 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{55}} \cong 3{,}01 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 220$$

$$N = 5 \cdot 13 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{65}} \cong 2{,}77 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 248$$

$$N = 5 \cdot 17 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{85}} \cong 2{,}42 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 340$$

$$N = 5 \cdot 19 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{95}} \cong 2{,}39 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 380$$

$$N = 5 \cdot 23 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{115}} \cong 2{,}08 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 460$$

$$N = 5 \cdot 29 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{145}} \cong 1{,}85 \quad \text{no hay números que cumplan el requisito}$$

$$N = 7 \cdot 11 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{77}} \cong 2{,}54 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 308$$

$$N = 7 \cdot 13 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{91}} \cong 2{,}34 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 364$$

$$N = 7 \cdot 17 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{119}} \cong 2{,}04 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 476$$

$$N = 7 \cdot 19 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{133}} \cong 1{,}93 \text{ no hay números que cumplan el requisito}$$

$$N = 11 \cdot 13 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{143}} \cong 1{,}86 \quad \text{no hay números que cumplan el requisito}$$

En total: (4 + 6 + 11 + 11 + 6 + 3 =) 41 números menores que 500 tienen 12 divisores

NOTA. - El cálculo tedioso para el caso $N = p_1 \cdot p_2 \cdot\ p_3^2$ puede evitarse de la siguiente manera:

Buscamos naturales N de la forma $N = 3 \cdot p_2 \cdot\ p_3^2 < 500$. Como el menor valor posible de p_3 es 2, tenemos:

$3 \cdot p_2 \cdot 2^2 \leq N = p_1 \cdot p_2 \cdot\ p_3^2 < 500 \Rightarrow\ 3 \cdot p_2 \cdot 4 < 500 \ \Rightarrow\ p_2 < \frac{500}{12} = 41,\hat{6} \ \Rightarrow\ p_2$ es un primo mayor que 3 y menor o igual a 41 $\Rightarrow p_2 \in \{5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41\}$. Ahora, ¿cuántos naturales aporta cada uno de ellos?

Si consideramos el menor valor posible de p_2, que es 5, tenemos: $N = 3 \cdot 5 \cdot\ p_3^2 < 500 \ \Rightarrow\ p_3 < 5{,}7$ y como p_3 no puede ser 3 ni 5 sólo puede ser 2. Es decir $N = 3 \cdot 5 \cdot\ p_3^2$ sólo aporta un número. Como la función $y = \sqrt{\frac{500}{3x}}$ es decreciente, valores de p_2 posteriores a 5 sólo aportan un número. Es decir, la configuración $N = 3 \cdot p_2 \cdot\ p_3^2$ aporta 11 números

Buscamos naturales N de la forma $N = 2 \cdot p_2 \cdot\ p_3^2 < 500$. Como el menor valor posible de p_3 es 3, tenemos:

$2 \cdot p_2 \cdot 3^2 \leq N = p_1 \cdot p_2 \cdot\ p_3^2 < 500 \Rightarrow\ 2 \cdot p_2 \cdot 9 < 500 \ \Rightarrow\ p_2 < \frac{500}{18} = 27,\hat{7} \ \Rightarrow\ p_2$ es un primo mayor que 2 y menor o igual a 27 $\Rightarrow p_2 \in \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$. Ahora, ¿cuántos naturales aporta cada uno de ellos? Veamos cuantos aporta un primo q. Notemos que $N = 2 \cdot q \cdot\ p_3^2 < 500 \ \Rightarrow\ p_3 < \sqrt{\frac{500}{2q}}$

q	$\sqrt{\frac{500}{2q}}$	condición sobre p_3	primos que cumplen la condición	números generados
3	9,12..	$2 \neq p_3 \neq 3$, $p_3 \leq 9$	5, 7	2
5	7,37..	$2 \neq p_3 \neq 5$, $p_3 \leq 7$	3, 7	2
7	5,97..	$2 \neq p_3 \neq 7$, $p_3 \leq 5$	3,5	2
11	4,76..	$2 \neq p_3 \neq 11$, $p_3 \leq 4$	3	1

Y a partir de 11 cada primo posible sólo aporta un número. En definitiva, el formato $N = 2 \cdot p_2 \cdot\ p_3^2$ aporta

p_2	3	5	7	11	13	17	19	23	total
N	2	2	2	1	1	1	1	1	11