SOLUCIONES ENERO 2018

Soluciones extraídas del libro:

XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA 2014

Obtenibles en http://www.concursoprimavera.es#libros

NIVEL: Segundo ciclo de la E. S. O.

AUTORES: Colectivo "Concurso de Primavera". Comunidad de Madrid

Enero 1: Sea n un natural. ¿Cuál es el natural más cercano al cuadrado de $n+\frac{1}{2}$?

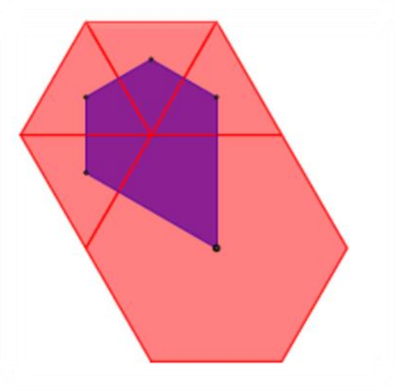
Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: Puesto que:

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 = n^2+n+\frac{1}{4}$$

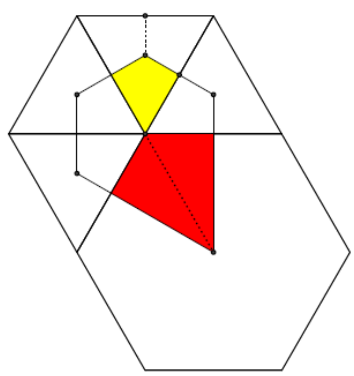
El natural más cercano al cuadrado de $n+\frac{1}{2}$ es $n^2 + n$.

Enero 2-3: En dos lados consecutivos de un hexágono regular se han dibujado cuatro triángulos equiláteros. Con los centros de los polígonos regulares se ha construido un pentágono. Calcular el área del pentágono



Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: El pentágono se compone de una pieza roja y 4 piezas amarillas. La pieza roja es la sexta parte del hexágono. La pieza amarilla es la tercera parte de un triángulo equilátero, que es la sexta parte del hexágono. Por lo tanto, cuatro de estas piezas equivalen a 4/18 del hexágono. El pentágono corresponde a (1/6 + 4/18 =) 7/18 del hexágono



Enero 4: Calcular el valor del producto:

$$\prod_{i=2}^{2017}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)$$

Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: Tenemos:

$$\prod_{i=2}^{2017}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot \ldots\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2016^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2017^2}\right)$$

$$=\left(\frac{2^2-1}{2^2}\right)\cdot\left(\frac{3^2-1}{3^2}\right)\cdot\left(\frac{4^2-1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{2016^2-1}{2016^2}\right)\cdot\left(\frac{2017^2-1}{2017^2}\right)$$

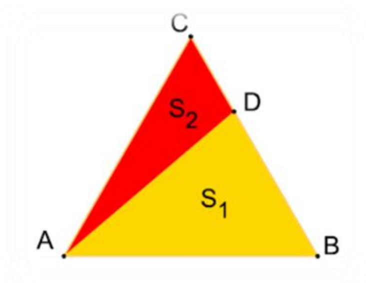
$$=\frac{(2-1)\cdot(2+1)}{2\cdot 2}\cdot\frac{(3-1)\cdot(3+1)}{3\cdot 3}\cdot\frac{(4-1)\cdot(4+1)}{4\cdot 4}\cdot\ldots\cdot\frac{(2016-1)\cdot(2016+1)}{2016\cdot 2016}$$

$$\cdot\frac{(2017-1)\cdot(2017+1)}{2017\cdot 2017}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\ldots\cdot\frac{2015\cdot 2017}{2016\cdot 2016}\cdot\frac{2016\cdot 2018}{2017\cdot 2017}$$

Notemos que (salvo en la primera y última fracción) el primer factor del denominador es el segundo factor del numerador de la fracción anterior y que el segundo factor del denominador es el primer factor del numerador de la fracción siguiente. Al simplificar queda pues:

$$\prod_{i=2}^{2017}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{1}{2\cdot 2}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{2018}{2017}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2018}{2017}=\frac{1009}{2017}$$

Enero 5-6: En un triángulo equilátero ΔABC de lado 4, se toma D en CB. Si S_1 es el área del triángulo ΔADB y S_2 es el área del triángulo ΔADC, ¿cuál es el mayor valor del producto $S_1 \cdot S_2$?



Nivel: A partir de 3ESO.

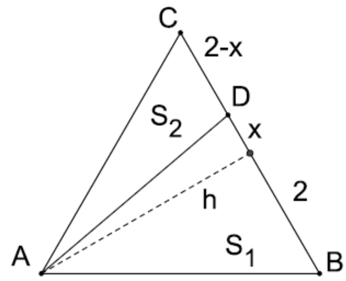
Solución: Sea h la altura por el vértice A. Por Pitágoras:

$$h=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$$

Tendremos, al calcular áreas:

$$S_1=\frac{(2+x)\cdot 2\sqrt{3}}{2};\quad S_2=\frac{(2-x)\cdot 2\sqrt{3}}{2}$$

$$S_1\cdot S_2=3\cdot(4-x^2)$$



Obviamente el producto $S_1 \cdot S_2$ es máximo cuando x=0, en cuyo caso el producto vale 12

Enero 7: Si el número de nueve cifras: N = 19700019d es primo, ¿qué dígito es el representado por d?

Nivel: A partir de 1ESO.

Solución: Desde luego d∉{0, 2, 4, 6, 8}, pues en caso contrario sería par y por tanto divisible por 2 y de aquí, no primo. Debe cumplirse, pues, que d∈{1, 3, 5, 7, 9}. Pero si d = 5 el número es múltiplo de 5.

Además la suma de las cifras del número es 27 + d. De aquí, si d = 3 el número es múltiplo de 3 y si d = 9, el número es múltiplo de 9. Si d = 7 tenemos:

$$197000197 = 197 \cdot 1000000 + 197 = 197 \cdot (1000000 + 1) = 197 \cdot 1000001$$

y el número debería ser múltiplo de 197. Sólo que da la posibilidad de que d = 1.

<u>Enero 8-9:</u> Hace dos años el número de estudiantes de mi centro era un cuadrado perfecto. El año pasado se matricularon 100 estudiantes más que el anterior y el nuevo número resultó ser un cuadrado perfecto más uno. Este año se matricularon 100 estudiantes más que el año anterior y de nuevo el número de estudiantes es un cuadrado perfecto. ¿Cuántos estudiantes se matricularon este año?
<u>Nivel:</u> Preparación OMS de segundo ciclo.

<u>Solución:</u> Sea N el número de estudiantes matriculados el primer año. Tendremos pasando la información del enunciado a ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{c} N = x^2 \\ N + 100 = y^2 + 1 \\ N + 200 = z^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x^2 + 100 = y^2 + 1 \\ x^2 + 200 = z^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 100 = z^2 - y^2 - 1 \Rightarrow 101 = (z + y) \cdot (z - y)$$

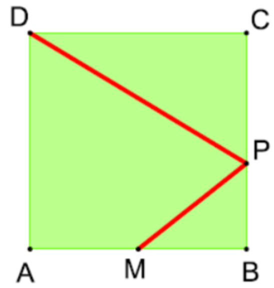
Y como 101 es primo y z + y > z – y, la ecuación última es equivalente al sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{c} z + y = 101 \\ z - y = 1 \end{array}\right\}$$

Fácilmente resoluble y que aporta la solución $N = x^2 = 2401$.

<u>Enero 10:</u> ¿Cuál es el mayor resto posible cuando divides un número de dos cifras entre la suma de estas?
<u>Nivel:</u> Preparación OMS de segundo ciclo.
<u>Solución:</u> En una división entera el resto siempre ha de ser menor que el divisor. Como se pide el mayor resto, vamos a comenzar probando con el mayor divisor posible: 9 + 9 = 18. El resto de la división de 99 entre 18 es 9. El siguiente divisor posible es: 9 + 8 = 17. El resto de la división de 98 (89) entre 17 es 13 (4). El siguiente divisor posible es 9 + 7 = 8 + 8 = 16. El resto de la división de 97 (88, 79) entre 16 es 1 (8, 15). El siguiente divisor posible es 15. Pero ya no se necesario seguir: El resto de las divisiones por números menores o iguales a 15 son menores que 15. En definitiva, el mayor resto posible al dividir un número de dos cifras por la suma de las cifras es 15 que sale al dividir 79 entre 16.

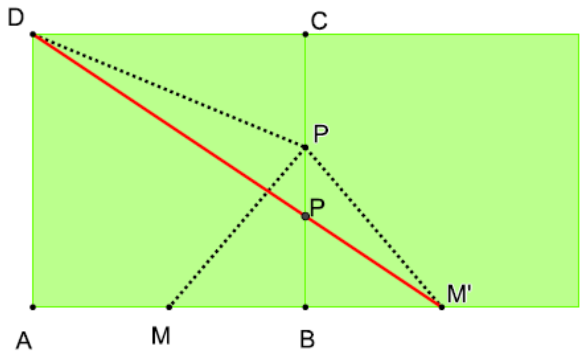
Enero 11-12: En un cuadrado ABCD de 2 m de lado, M es el punto medio del lado AB y P es un punto cualquiera del lado CB. Hallar el menor valor posible de DP + PM.



Nivel: Preparación OMS de segundo ciclo.

Solución: Dibujamos el simétrico del cuadrado ABCD respecto de la arista CB. Sea M' el simétrico de M respecto de CB. El menor valor de DP + DM sale cuando P está en el segmento que une D y M'. Aplicando Pitágoras, tenemos que el menor valor posible de DP + PM es:

$$\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$$



Enero 13: La suma de los m primeros impares es 212 más la suma de los n primeros pares. ¿Cuál es la suma de todos los valores que puede tomar n?

Nivel: Preparación OMS de segundo ciclo.

Solución: La suma de los primeros m impares es: 1 + 3+ 5+ … + (2m – 1) = $\frac{1+2m-1}{2}\cdot m = m^2$. La suma de los primeros n pares es: 2 + 4+ …. + 2n =$\frac{2+2n}{2}\cdot n = n^2+n$. Por lo tanto, debe cumplirse $m^2 = 212 + n + n^2$.

Si definimos d ($\in$N) como m = n + d, tenemos: $(n + d)^2 = 212 + n + n^2 \Rightarrow 2dn + d^2 = 212 + n \Rightarrow n=\frac{212-d^2}{2d-1}$

Dando valores a d, tenemos:

$$d=1 \Rightarrow n=\frac{212-1^2}{2\cdot 1-1}=\frac{211}{1}=211; \qquad d=2 \Rightarrow n=\frac{212-2^2}{2\cdot 2-1}=\frac{208}{3}\notin \mathbb{N}$$

$$d=3 \Rightarrow n=\frac{212-3^2}{2\cdot 3-1}=\frac{203}{5}\notin \mathbb{N}; \qquad d=4 \Rightarrow n=\frac{212-4^2}{2\cdot 4-1}=\frac{196}{7}=28$$

$$d=5 \Rightarrow n=\frac{212-5^2}{2\cdot 5-1}=\frac{187}{9}\notin \mathbb{N}; \qquad d=6 \Rightarrow n=\frac{212-6^2}{2\cdot 6-1}=\frac{176}{11}=16$$

$$d=7 \Rightarrow n=\frac{212-7^2}{2\cdot 7-1}=\frac{163}{13}\notin \mathbb{N}; \qquad d=8 \Rightarrow n=\frac{212-8^2}{2\cdot 8-1}=\frac{148}{15}\notin \mathbb{N}$$

$$d=9 \Rightarrow n=\frac{212-9^2}{2\cdot 9-1}=\frac{131}{17}\notin \mathbb{N}; \qquad d=10 \Rightarrow n=\frac{212-10^2}{2\cdot 10-1}=\frac{112}{19}\notin \mathbb{N}$$

$$d=11 \Rightarrow n=\frac{212-11^2}{2\cdot 11-1}=\frac{91}{21}\notin \mathbb{N}; \qquad d=12 \Rightarrow n=\frac{212-12^2}{2\cdot 12-1}=\frac{68}{23}\notin \mathbb{N}$$

$$d=13 \Rightarrow n=\frac{212-13^2}{2\cdot 13-1}=\frac{43}{25}\notin \mathbb{N}; \qquad d=14 \Rightarrow n=\frac{212-14^2}{2\cdot 14-1}=\frac{16}{27}\notin \mathbb{N}$$

No hace falta seguir, valores más grandes de d aportan menor numerador y mayor denominador y por tanto valores de $n < 1$, que no son admisibles. Hay únicamente tres valores de n: 211, 28 y 16 cuya suma es 255.

Enero 14: En un triángulo rectángulo de hipotenusa 4 cm, la suma de sus catetos es $\sqrt{18}$ cm. Calcular el área del triángulo

Nivel: Preparación OMS de primer ciclo.

Solución: Sean x e y los catetos del triángulo rectángulo. Al aplicar Pitágoras tendremos $x^2 + y^2 = 16$. Por otra parte, del enunciado, $x + y = \sqrt{18}$. Tenemos formado el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 16 \\ x + y &= \sqrt{18} \end{aligned}\right\}$$

que no es necesario resolver, pues, elevando al cuadrado la segunda ecuación tenemos:

$$18 = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 16 + 2xy \;\Rightarrow\; \text{área} = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{\frac{18 - 16}{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

Enero 15: Al sumar 329 al número de tres cifras 2A4 obtenemos 5B3. Si 5B3 es múltiplo de 3, ¿cuál es el mayor valor posible de A?

Nivel: A partir de 1ESO.

Solución 1: Puesto que 5B3 es múltiplo de 3, la suma de sus cifras debe ser múltiplo de 3. La suma de cifras es 8 + B, por lo que B puede ser 1, 4 o 7.

Si B = 1 $\Rightarrow$ 2A4 = 513 – 329 = 184 $\Rightarrow$ 2 = 1 (al comparar las centenas). Por lo tanto, B $\neq$ 1

Si B = 4 $\Rightarrow$ 2A4 = 543 – 329 = 214 $\Rightarrow$ A = 1.

Si B = 7 $\Rightarrow$ 2A4 = 573 – 329 = 244 $\Rightarrow$ A = 4.

El mayor posible valor de A es 4.

Solución 2: Al tenerse:

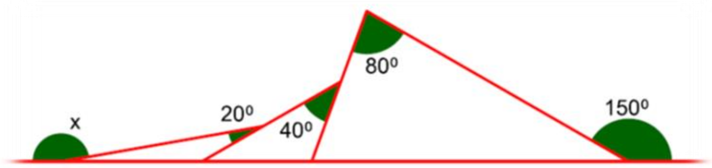
$$\begin{array}{cccc} & 3 & 2 & 9 \\ + & 2 & A & 4 \\ \hline & 5 & B & 3 \end{array}$$

debe de cumplirse que 3 + A = B. Como el valor más grande de B es 7, el valor más grande de A es 4.

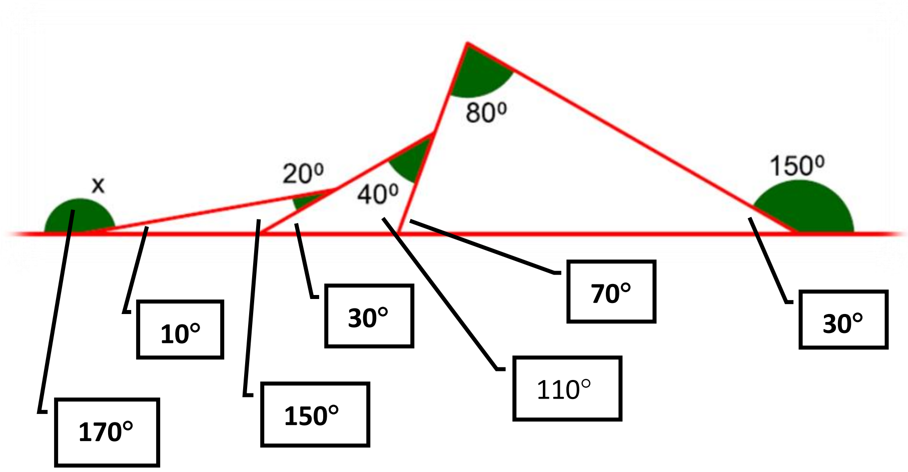
Enero 16-17: En la figura adjunta, ¿cuál es el valor del ángulo x?

Nivel: A partir de 2ESO.

Solución: Aplicamos que la suma de los



tres ángulos de un triángulo es 180°. Tendremos de derecha a izquierda



Enero 18: Hallar el menor y mayor valor posible de n, tal que n·(n+1) da resto 1 al dividirlo por 3

Nivel: Preparación OMS de primer ciclo.

Solución: Si n es múltiplo de 3 $\Rightarrow$ n·(n + 1) es múltiplo de 3 y no puede dar de resto 1.

Si n da resto 1 al dividirlo por 3 $\Rightarrow$ (n + 1) da resto 2 al dividirlo por 3 $\Rightarrow$ n·(n + 1) da resto (1·2 =) 2 al dividirlo por 3, luego tampoco puede dar resto 1.

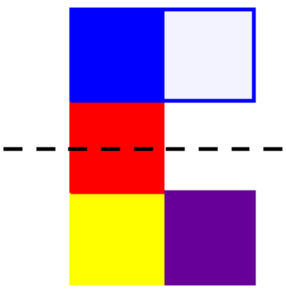
Si n da resto 2 al dividirlo por 3 $\Rightarrow$ (n + 1) es múltiplo de 3 $\Rightarrow$ n·(n + 1) es múltiplo de 3 y no puede dar de resto 1.

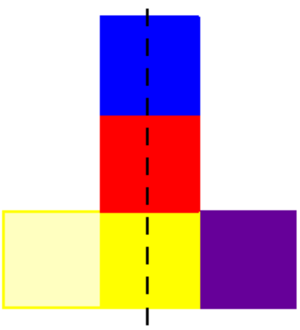
Por tanto, n·(n + 1) nunca da resto 1 al ser dividido por 3

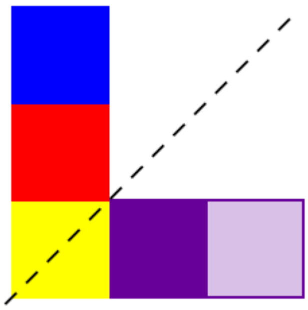
Enero 19-20: ¿De cuantas maneras podemos añadir un cuadrado igual a los cuatro de la figura para que la figura resultante tenga al menos un eje de simetría?

Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: Hay tres maneras de añadir un cuadrado idéntico a los de la figura para que se tenga al menos un eje de simetría







Enero 21: Hallar el mayor natural que divida a todos los términos de la sucesión $a_n = n^5 - n$

Nivel: Preparación OMS de segundo ciclo.

Solución: Tenemos $n^5 - n = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (n^2 + 1)$. Por tanto, cada término de la sucesión es múltiplo del producto de tres naturales consecutivos. Por tanto, cada término de la sucesión es múltiplo de 3 (ya que en tres naturales consecutivos hay uno que es múltiplo de 3). Además, tenemos:

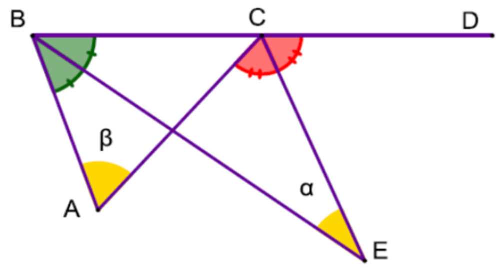
n acaba en	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^5 acaba en	1	2	3	4	5	6	7	8	9

por lo que $n^5 - n$ acaba en 0. O en otras palabras cada término es múltiplo de 10. Tenemos, pues, que cada término es múltiplo de 30. Como, además, el segundo término es 30, no puede haber un divisor mayor.

Enero 22-23: En la figura, $\angle ABE = \angle EBC$ y $\angle ACE = \angle ECD$. Si $\alpha = \angle CEB$, hallar el ángulo $\angle BAC = \beta$.

Nivel: Preparación OMS de segundo ciclo.

Solución: Llamamos x a la mitad del ángulo verde e y a la mitad del ángulo rojo. Tendremos, en el triángulo ΔABC:



$2x + \beta + 180 - 2y = 180 \Rightarrow 2x - 2y + \beta = 0$ (*)

y en el triángulo ΔBCE:

$x + \alpha + 180 - 2y + y = 180 \Rightarrow x - y + \alpha = 0 \Rightarrow 2x - 2y + 2\alpha = 0$ (**)

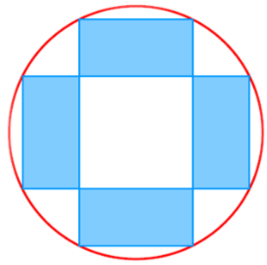
De las ecuaciones (*) y (**) tenemos: $\beta = 2\alpha$

Enero 24: Hallar el máximo de la expresión $x - x^2$ cuando x es un real cualquiera

Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: $y = x - x^2$ es una parábola invertida ($a = -1 < 0$), y por tanto $x - x^2 \le y_V$ (= la ordenada del vértice de la parábola). Como

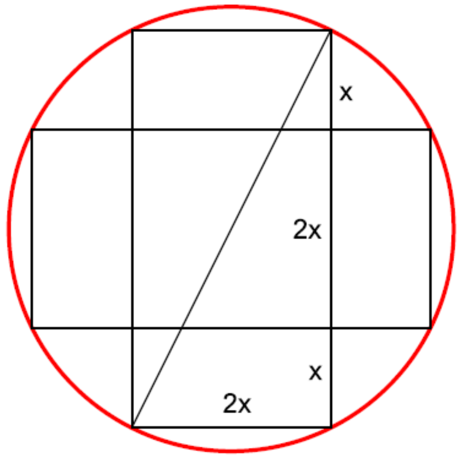
$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2\cdot(-1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow y_V = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$



Enero 25-26: En la figura se tiene una circunferencia de radio 1 y los rectángulos dibujados son todos iguales con un lado doble de otro. ¿Cuál es el área de cada rectángulo?

Nivel: A partir de 2ESO.

Solución: Dibujamos el diámetro de la figura de abajo y, al aplicar Pitágoras al triángulo rectángulo generado, tenemos:



$$2^2 = (2x)^2 + (4x)^2, \;\; 4 = 4x^2 + 16x^2 = 20x^2$$

$$x^2 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$\text{Área} = 2x^2 = 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

Enero 27: ¿Cuántos números de 5 cifras, todas distintas, cumplen que la cifra de las unidades es la suma de las restantes?

Nivel: Preparación OMS de segundo ciclo.

Solución: Veamos las diferentes posibilidades que hay en la cifra de las unidades y en las restantes cifras.

cifra en las unidades	cifras en las demás posiciones		
6	0, 1, 2, 3		
7	0, 1, 2, 4		
8	0, 1, 2, 5,	0, 1, 3, 4	
9	0, 1, 2, 6	0, 1, 3, 5	0, 2, 3, 4

Veamos los que terminan en 6: Para la primera posición tenemos 3 candidatos (no participa la cifra 0, pues el número no tendría cinco cifras). Para la segunda posición tenemos otros tres candidatos (pues ahora no participa la cifra elegida en la primera posición y si participa el 0). Para la tercera posición tenemos dos candidatos. Para la cuarta posición tenemos un candidato y `para las unidades sólo tenemos a la cifra 6. En total: (3·3·2·1·1 =) 18 números.

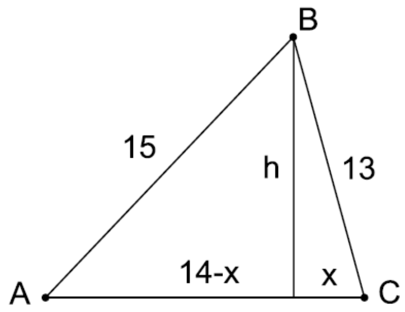
Lo mismo ocurre con cada grupo asociado a cada una de las posibles unidades (7, 8, 9).

En total salen (18· 7 =) 126 números que cumplen el requisito exigido en el enunciado.

Enero 28: En el triángulo ∆ABC, con BC=13, CA=14 y AB=15, hallar la altura por B

Nivel: Preparación OMS de segundo ciclo.

Solución: Sea h la altura por B. Quedan definidos dos triángulos rectángulos. Al aplicar sobre ellos el teorema de Pitágoras, tenemos:

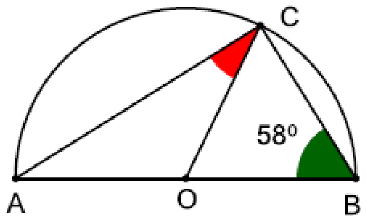


$$\left.\begin{array}{r}15^2 = h^2 + (14-x)^2 \\ 13^2 = x^2 + h^2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}h^2 = 15^2 - (14-x)^2 \\ h^2 = 13^2 - x^2\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\ 225 - 196 + 28x = 169 \ \Rightarrow\ 28x = 140$$

$$\Rightarrow\ x = 5;\ \ h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

Enero 29: En una circunferencia de centro O y diámetro AB, se tiene una cuerda BC. Si ∠OBC=58º, ¿cuánto mide el ángulo ∠OCA?



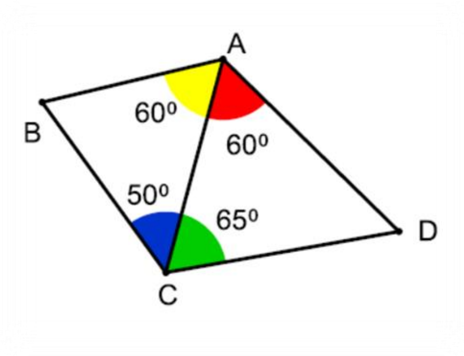
Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: Como OB = OC (= radio circunferencia) tenemos que ∠OCB = ∠CBO = 58°

Por otra parte (ángulo central = ∠AOB = 2·∠ACB ⇒) ∠ACB = 90°. De aquí:

∠ACO = ∠ACB - ∠OCB = 90° - 58° = 32°

Enero 30-31: Ordena los cinco segmentos de la figura por su longitud.



Nivel: Preparación OMS de segundo ciclo.

Solución: Aplicaremos que en un triángulo a mayor ángulo se le opone mayor lado.

En ΔACD, tenemos que ∠D = (180° - (60° + 65°)=) 55°, y aplicando lo anterior: AC < CD < AD.

En ΔABC, tenemos ∠B = (180° - (60° + 50°)=) 70°, y aplicando lo anterior: AB < BC < AC. Y en definitiva:

AB < BC < AC < CD < AD