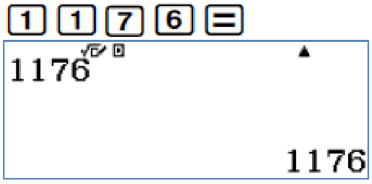
SOLUCIONES MARZO 2018

Problemas con calculadora (CASIO fx-570SPX o similar)

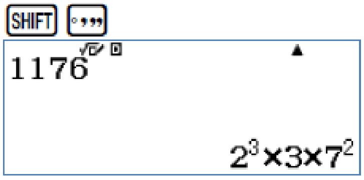
Marzo 1: ¿Cuál es el menor número natural que al multiplicarlo por 1176 se obtiene un cuadrado perfecto? ¿Cuál es el cuadrado perfecto?

Nivel: A partir de 1ESO.

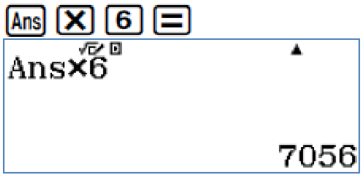
Solución: Introducimos el número 1176



Factorizamos el número:



Como buscamos el menor cuadrado perfecto buscamos los factores primos que faltan para tener cada factor primo con exponente el menor par posible. En nuestro caso solo falta un factor 2 y un factor 3. Hemos de multiplicar el número por $2 \cdot 3 = 6$.



Hemos de multiplicar por 6 y el cuadrado perfecto es 7056.

Marzo 2: Los puntos $(1, 2)$, $(5, a)$ y $(a, 7)$ son colineales.

a) Determinar el valor de a.

b) Determinar la ecuación de la recta que formen los tres puntos.

KöMaL K396.

Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ son: $\overrightarrow{AB} = (4, a-2)$.

Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AC}$ son: $\overrightarrow{AC} = (a-1, 5)$.

Los puntos A, B, C están alineados si las componentes de los vectores son proporcionales:

$$\frac{4}{a-1} = \frac{a-2}{5}.$$

Es una ecuación de segundo grado:

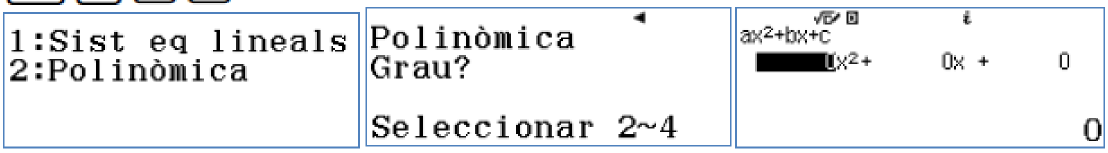
$$20 = (a-1)(a-2).$$

$$20 = a^2 - 2a - a + 2.$$

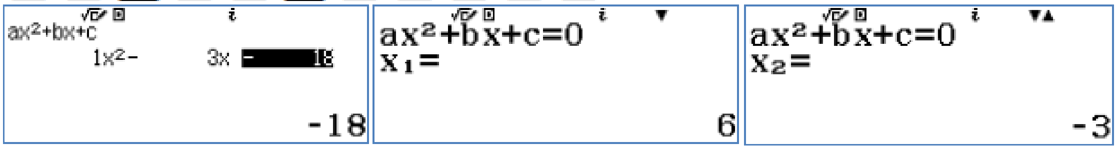
$$a^2 - 3a - 18 = 0.$$

Resolveremos la ecuación con la calculadora Casio 991:

Abrimos el menú de ecuaciones polinómicas de segundo grado



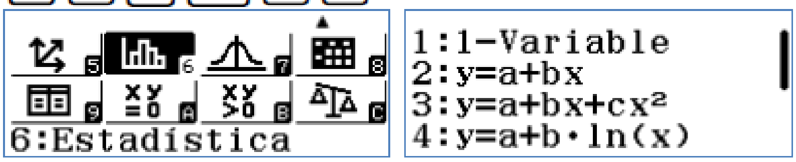
Introduïm els coeficients de l'equació i resolem:



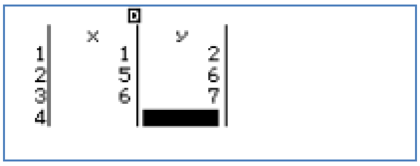
Las soluciones son $a = 6$, $a = -3$.

Si $a = 6$ los puntos son $A(1, 2)$, $(5, 6)$ i $(6, 7)$.

Abrimos el menú estadística con regresión lineal



Rellenamos las coordenadas de los tres puntos



Con las opciones calculamos la regresión lineal:

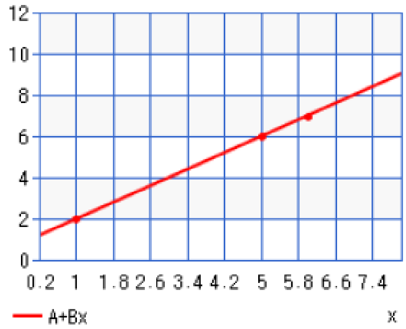
La ecuación de la recta es

$$y = x + 1.$$

Con el QR la dibujamos

AC OPTN 3 OPTN OPTN 4 SHIFT OPTN

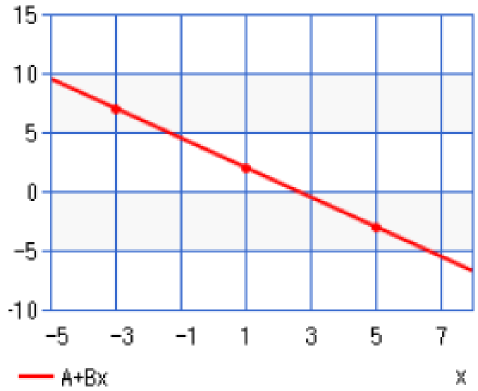
1/1



Si $a = -3$ los puntos son $A(1, 2)$, $(5, -3)$ i $(-3, 7)$. El procedimiento sería análogo.

```
y=a+bx
   a=3.25
   b=-1.25
   r=-1
```

La ecuación de la recta es $y = -1.25x + 3.25$.



<u>Marzo 3-4:</u> Dani escribió los primeros 2018 naturales en una tabla como la mostrada a la izquierda. ¿Cuál es el último número de la segunda fila? *KöMaL, K489.*

1	3	6	10	15	21	...
2	5	9	14	20		
4	8	13	19			
7	12	18				
11	17					
16						
⋮						

<u>Nivel:</u> Preparación OMS segundo ciclo.

<u>Solución 1:</u> Los términos de la primera fila son los números triangulares:

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \ldots\ldots\ldots \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

La segunda fila es la sucesión:

2, 5, 9, 14, 20, 27,....

Las diferencias de dos términos consecutivos son:

3, 4, 5, 6, 7,.....

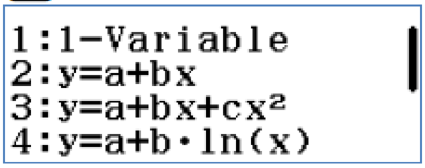
La diferencia de dos términos consecutivos de les diferencias es:

$$1, 1, 1, 1, \ldots.$$

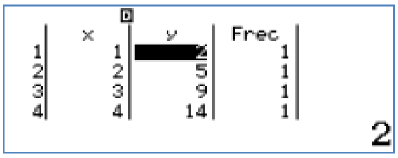
es una sucesión aritmética de segundo orden.

Veamos si la sucesión es un polinomio de segundo grado.

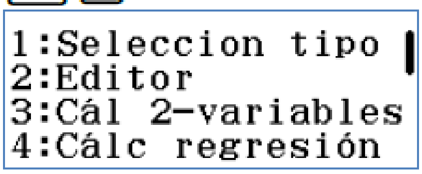
Abrimos el menú estadística de dos variables, regresión cuadrática:

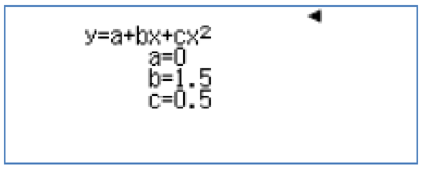


Introducimos los datos en la calculadora: en x los números naturales y en y los términos de la sucesión.



Abrimos opciones **cálculo regresión**:





El término general de la sucesión es $\{0.5n^2 + 1.5n\}_{n=1}^{\infty}$

El último término de la fila ha de ser menor o igual que 2015.

$$\frac{n^2 + 3n}{2} \leq 2015 .$$

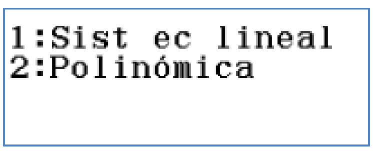
Resolvemos la ecuación:

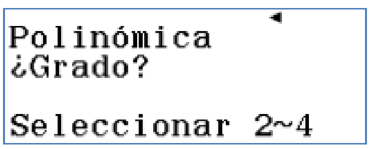
$$\frac{n^2 + 3n}{2} = 2015 .$$

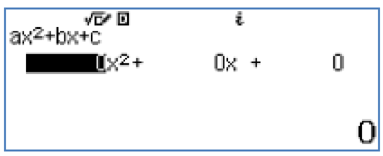
Simplificándola:

$$n^2 + 3n - 4030 = 0 .$$

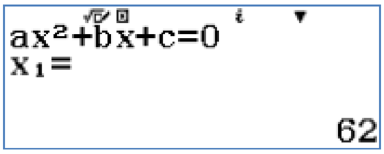
Abrimos el menú ecuaciones:

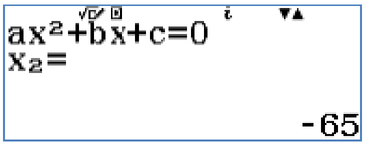






Introducimos los coeficientes y resolvemos:





La solución es natural. En la segunda fila el lugar 62 está ocupado por el 2015.

Solución 2: La sucesión 2, 5, 9, 14, 20,.... es una sucesión recurrente:

$$a_1 = 2\,,\ \ a_{n+1} = n + 2 + a_n\ .$$

Si resolvemos la ecuación de sucesiones con la Casio CP400:

$$a_n = \frac{n^2 + 3n}{2}.$$

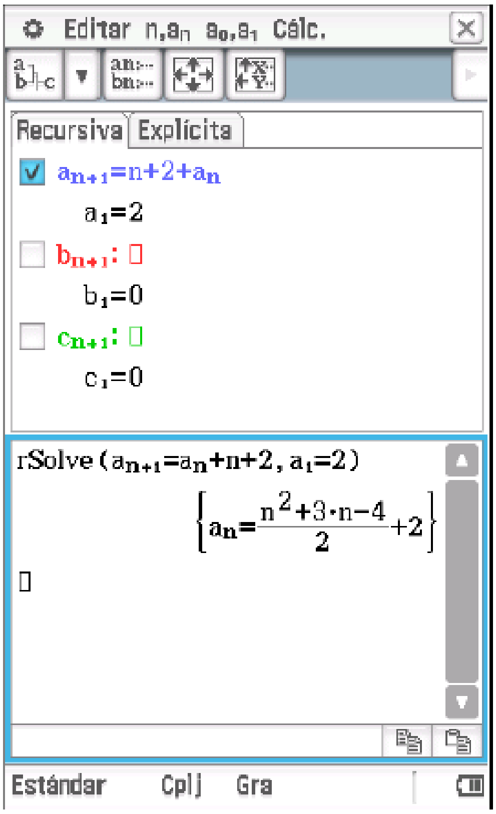
Calculemos el número natural tal que $a_n \le 2015$:

$$\frac{n^2 + 3n}{2} \le 2015$$

$$1 \le n \le 62$$

Si $n = 62$, $a_{62} = 2015$.

El último número de la segunda fila es 2015.



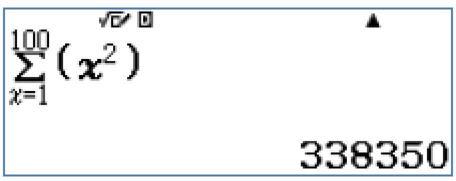
Marzo 5: A.- Calcular la suma de los primeros 100 cuadrados perfectos.

B.- Calcular: 1 – 2 + 3 – 4 +·····+ 99 – 100

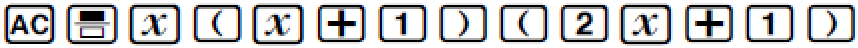
Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: Dos soluciones para el apartado A

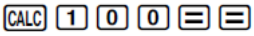
1. La fórmula és $S_{100} = \sum_{x=1}^{100} x^2$

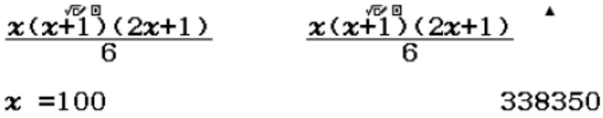


2. La fórmula es $S_n = \sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Introducimos la fórmula:



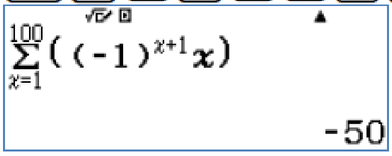
Calculamos el valor para x = 100



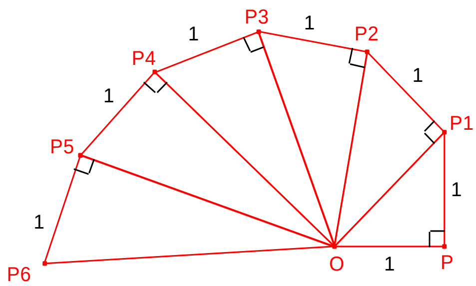


Para el apartado B, tenemos:

La fórmula es $S_{100} = \sum_{x=1}^{100} (-1)^{x+1} \cdot x$. Introducimos la fórmula:



Marzo 6-7: En la figura todos los triángulos son rectángulos en P, P_1, P_2,....., P_n,.... Además, se cumple $1 = OP = PP_1 = P_1P_2 = ...$ Calcular las medidas de las primeras diez hipotenusas OP_1, OP_2,..., OP_{10} de los triángulos. Calcular la hipotenusa OP_n. Calcular la suma de las 10 primeras hipotenusas y la suma de áreas de los primeros 10 triángulos



Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OPP_1}$:

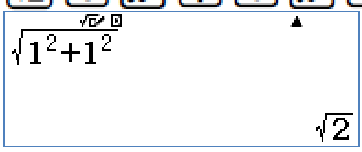
$\overline{OP_1} = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{PP_1}^2}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OP_1P_2}$: $\overline{OP_2} = \sqrt{\overline{OP_1}^2 + \overline{P_1P_2}^2}$.

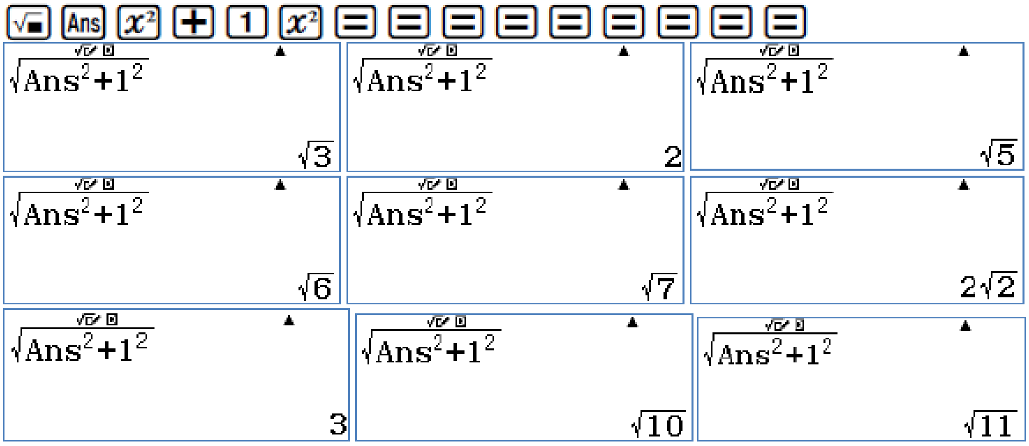
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OP_2P_3}$: $\overline{OP_3} = \sqrt{\overline{OP_2}^2 + \overline{P_2P_3}^2}$.

a)

Utilizaremos la función M de la calculadora



$\overline{OP_1} = \sqrt{2}$



Las medidas de les primeras hipotenusas son:

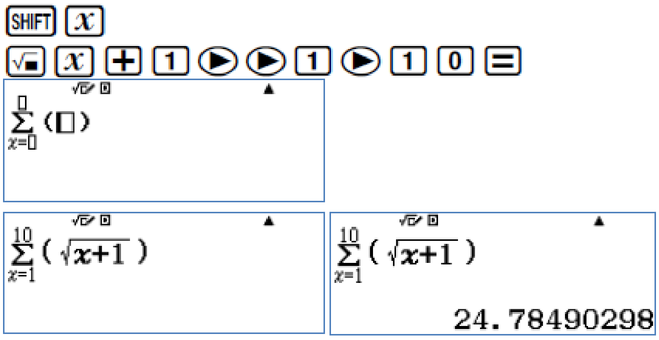
$\overline{OP_2} = \sqrt{3}, \overline{OP_3} = \sqrt{4} = 2, \overline{OP_4} = \sqrt{5}, \overline{OP_5} = \sqrt{6}, \overline{OP_6} = \sqrt{7}, \overline{OP_7} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \overline{OP_8} = \sqrt{9} = 3$

b)

$\overline{OP_n} = \sqrt{n+1}$. Se puede probar esta conjetura por inducción completa.

c)

Utilizaremos la función suma de series finitas



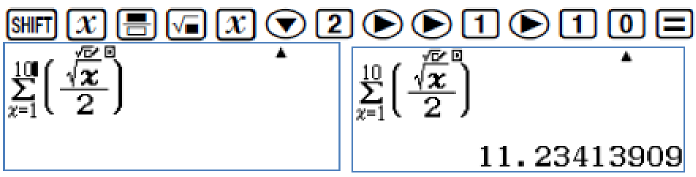
La suma es aproximadamente, 24.78490298.

d)

Las áreas de los primeros triángulos son:

$$S_1 = \frac{1\cdot 1}{2},\ S_2 = \frac{\sqrt{2}\cdot 1}{2},\ S_3 = \frac{\sqrt{3}\cdot 1}{2},\ S_4 = \frac{\sqrt{4}\cdot 1}{2},\ S_5 = \frac{\sqrt{5}\cdot 1}{2}, ..., S_n = \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Para hacer la suma de las áreas utilizaremos la función de sumas finitas de la calculadora.

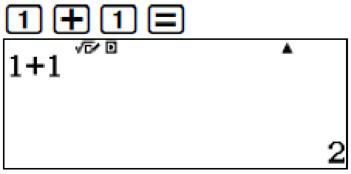


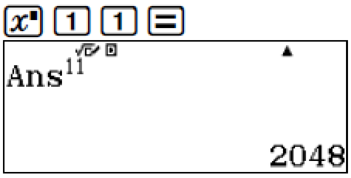
La suma es aproximadamente 11.23413909.

Marzo 8: Si los únicos números que se pueden utilizar de tu calculadora son el 0 y el 1, cuál es el menor número de teclas que se deben apretar para obtener el número 2048

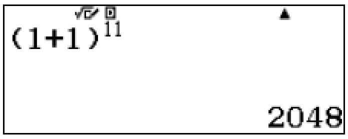
Nivel: A partir de 1ESO.

Solución: Partimos del hecho de que 2018 = 2^{11}. Si sólo podemos utilizar las teclas numéricas 0 y 1:

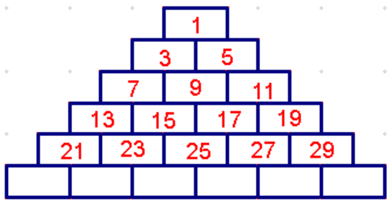




Total 8 teclas. Si utilizamos las teclas de paréntesis utilizamos 9 teclas



Marzo 9-10: Se ha construido la siguiente pirámide de números. ¿Cuál es la fila cuya suma es 29791? En la diagonal {1, 3, 7,...}, ¿qué número ocupa la posición sexta?, ¿y la posición 100? Generaliza el resultado. En la diagonal {1, 5, 11, ...} ¿qué número ocupa la posición sexta?, ¿y la posición 100? Generaliza el resultado.



Nivel: A partir de 3ESO.

Solución:

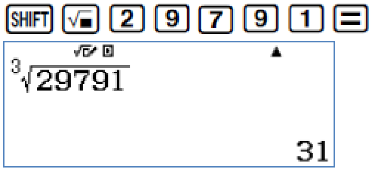
a)

La sucesión de las sumas de las filas es:

$$1, 3+5=8, 7+9+11=27, 13+15+17+19=64,.....$$

Es la sucesión de las potencias cúbicas de los naturales:

$$1^3, 2^3, 3^3, 4^3,....., n^3,... \qquad n^3 = 29791 ; \quad n = \sqrt[3]{29791} .$$

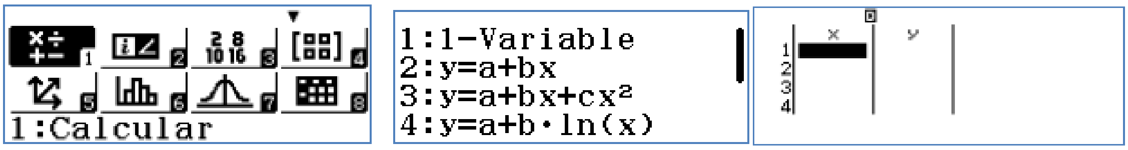


b)

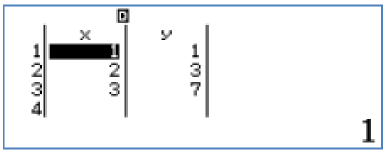
1, 3, 7, 13, 21, 31…

La sucesión de las primeras diferencias es: 2, 4, 6, 8, ….. La sucesión de las segundas diferencias es: 2, 2, 2, …. sucesión constante. La sucesión 1, 3, 7, 13, 21, 41… es una sucesión aritmética de segundo orden.

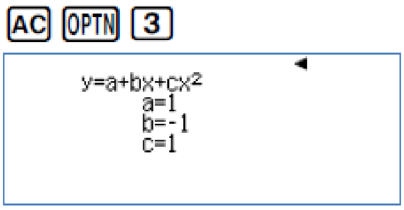
Utilizaremos el menú de estadística (regresión cuadrática) para calcular el término general.



Introducimos tres valores de la sucesión:

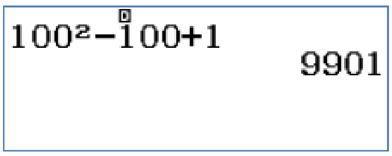


Calculamos la regresión:



El término general es $b_n = n^2 - n + 1$.

El término 100 es:

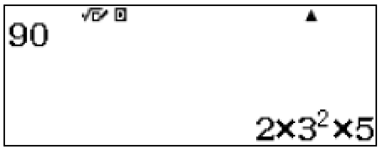


Tenemos b_{100} = 9901

Marzo 11: Hallar los naturales a y b cuyo mcm es 90 y de los que se sabe que $\left\lfloor \frac{a+b}{7} \right\rfloor = 3$

Nivel: A partir de 1ESO.

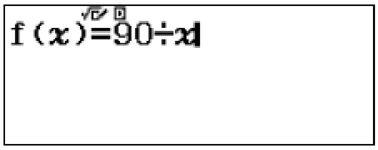
Solución: Como el cociente de la división entera de *a* + *b* entre 7 es 3, *a* + *b* > 21 i *a* + *b* <28. Por tanto, 21 < *a* + *b* < 28. Si *a* + *b* es primo mcd (*a*, *b*) = 1 y además del enunciado mcm (*a*, *b*) = 90. Por tanto, a · *b* = 90 y *a* + *b* = 23. De aquí buscamos dos números primos entre sí cuyo producto sea 90 y la suma sea 23. Con la factorización:



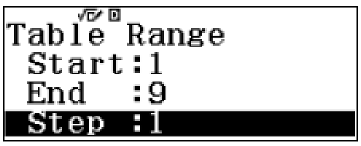
Con una tabla buscamos las parejas de divisores de 90.

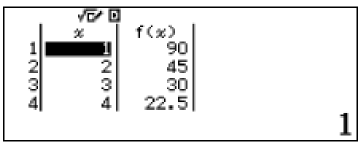
D(90)	1	3	9
1	1	1	1
2	2	6	18
5	5	15	45
2·5	10	30	90

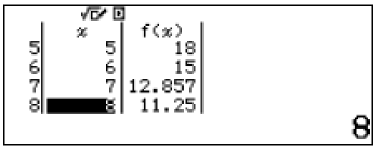
Los números son 18 y 5, su suma es23. Si buscamos los divisores de 90 con la máquina

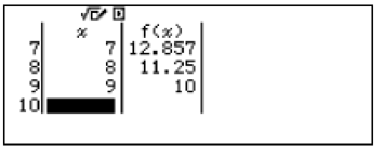


Para definir la tabla sabemos que para encontrar las parejas de divisores sólo hay que buscarlas hasta la raíz cuadrada de 90



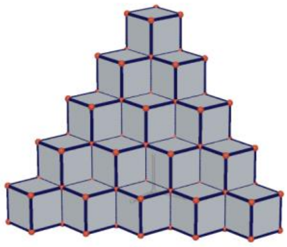






Entre todas las parejas las que cumplen todas las condiciones son 5 y 18.

<u>Marzo 12-13:</u> Esta pirámide está hecha con 35 cubos y tiene 5 capas. ¿cuántos cubos son necesarios para una pirámide de 10 capas? ¿Y para una pirámide con 100 capas?



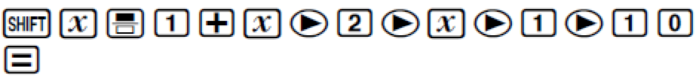
<u>Nivel:</u> A partir de 3ESO.

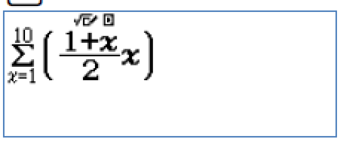
<u>Solución:</u> Tenemos

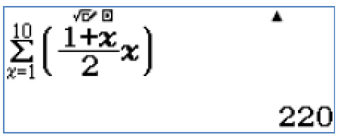
Núm. capa n	1	2	3	4	5	n
Núm. cubos en la capa n	1	3	6	10	15	
Total de cubos en la capa n	1	4	10	20	35	

El número de cubos per capa sigue la sucesión de números triangulares. El término general es $\frac{1+n}{2}n$. El total de cubos hasta la capa $n=10$ es igual a la suma de los cubos de las $n=10$ capas.

Utilizaremos la función de sumas finitas.

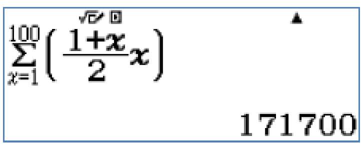






Se necesitan 220 cubos.

El total de cubos hasta la capa $n=100$ es igual a la suma de los cubos de las $n=100$ capas:

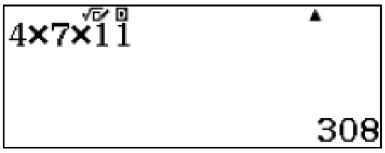


Son necesarios 171.700 cubos.

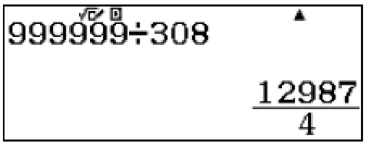
<u>Marzo 14:</u> ¿Cuál es el mayor número de seis cifras que dividido por 4, 7 y 11 da resto 3?

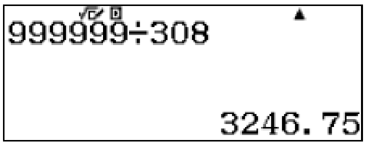
<u>Nivel:</u> A partir de 1ESO.

<u>Solución:</u> Buscamos los múltiplos de 4, 7 y 11. Como son primos entre sí los múltiplos son los múltiplos de 4·7·11 = 308

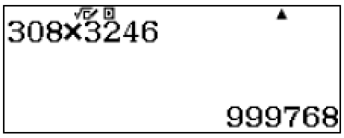


Dividimos el mayor número de seis cifras entre 308.

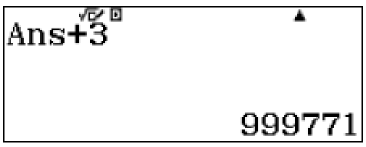




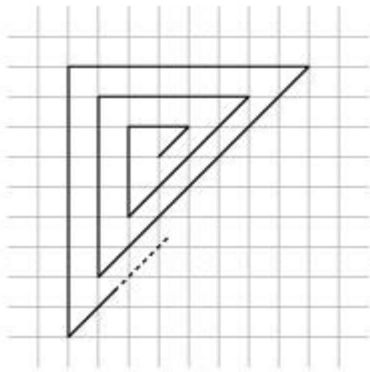
Multipliquemos 308 por 3246



Y como el residuo ha de ser 3, sumamos 3 al resultado



El número buscado es 999.771



<u>Marzo 15-16:</u> En un papel cuadriculado (cada cuadrícula mide 5mm de lado) se ha dibujado la siguiente cenefa de 999 segmentos ¿Cuánto mide la línea poligonal? Aproxima a metres. *KöMaL K360. Desembre 2012.*

<u>Nivel:</u> A partir de 3ESO.

<u>Solución:</u> Supongamos que cada cuadrícula mide de lado 1u.

Comenzando por el segmento más pequeño las medidas de los segmentos forman la sucesión:

$$\sqrt{2},\ 2,\ 3,\ 4\sqrt{2},\ 5,\ 6,\ 7\sqrt{2},\ 8,\ 9,\ 10\sqrt{2}, \ldots\ldots\ldots, 997\sqrt{2},\ 998,\ 999\,.$$

La suma de todos los segmentos es:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 999 + \left(\sqrt{2} - 1\right)\left(1 + 4 + 7 + \ldots\ldots\ldots + 997\right).$$

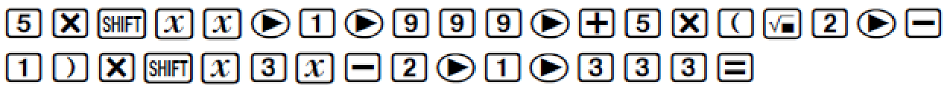
$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 999 = \sum_{x=1}^{999} x\,.$$

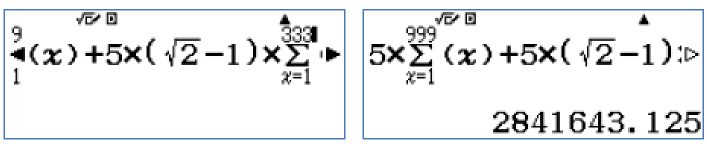
$$1 + 4 + 7 + \ldots\ldots\ldots + 997 = \sum_{x=1}^{333} 3x - 2\,.$$

La medida total de los segmentos en mm es:

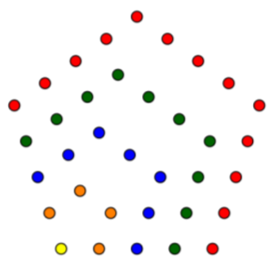
$$L = 5 \cdot \sum_{x=1}^{999} x + 5 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)\sum_{x=1}^{333} 3x - 2\,.$$

Utilizando la calculadora Casio 991:





La longitud de la poligonal es: $L = 2841643.13\text{mm} \cong 2.842\text{m}$



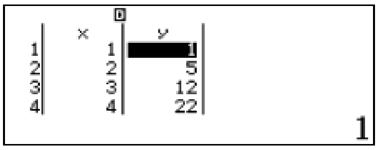
<u>Marzo 17:</u> El número 1369, ¿es pentagonal?

<u>Nivel:</u> A partir de 3ESO.

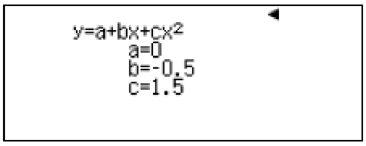
<u>Solución:</u> Los números pentagonales son 1, 5, 12, 22, 35. Como la segunda diferencia es constante, para hallar el término general se puede utilizar la regresión cuadrática con la calculadora

Primero seleccionamos el menú estadística i seleccionamos regresión cuadrática

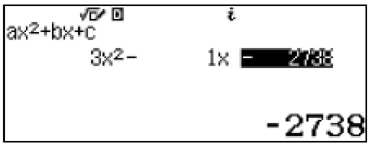
Y escogemos trabajar sin frecuencias

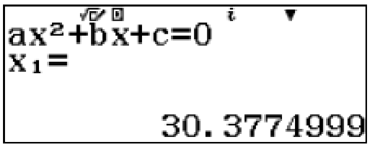


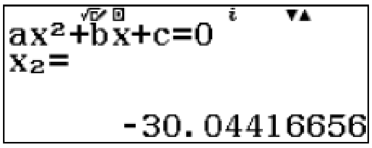
Escogemos la opción de la regresión cuadrática



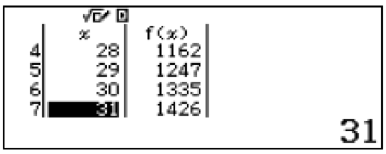
Por tanto $a_n = 1{,}5n^2 - 0{,}5n$ o $a_n = \frac{3n^2-n}{2}$. Para saber si 1369 es pentagonal resolveremos la ecuación $\frac{3n^2-n}{2} = 1369$. La preparamos para resolverla en la calculadora: $3n^2 - n - 2738 = 0$.



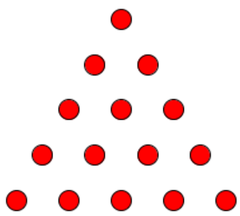




Por tanto 1369 no es pentagonal. Lo podemos comprobar con la tabla de valores de la función $f(x) = \frac{3x^2-x}{2}$

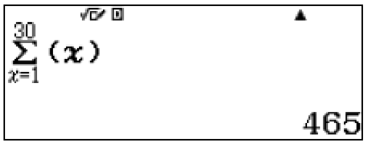


<u>Marzo 18-25:</u> Aitana colecciona monedes de un céntimo de euro. Las ha colocado según el esquema de abajo formando un triángulo equilátero (en la figura de lado cinco). ¿Cuántos euros tendrá si puede hacer un triángulo de lado treinta?

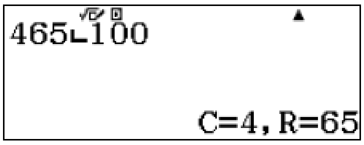


<u>Nivel:</u> A partir de 3ESO.

Solución: Nos damos cuenta de que el triángulo va aumentando añadiendo en la parte de abajo una fila que tiene tantas monedas como el número de filas ya existente más uno. Para saber cuántas monedas tiene el triángulo sumamos el número de monedas de cada fila:
1+2+3+4+5=15 céntimos en el caso del triángulo con base 5 monedes y 1+2+3+4+5+6=21 céntimos en el caso del triángulo con base 6 monedes. De esta manera para saber las monedas que hay en total en el triángulo de base 30 monedes utilizaremos en la función sumatorio:

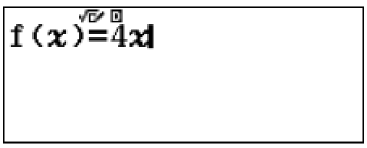


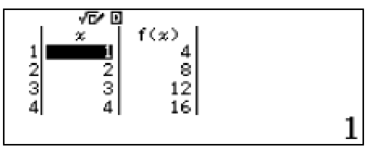
Por tanto, sabemos que el triángulo en cuestión contiene 465 céntimos de euros. Para contestar a la cuestión planteada utilizaremos la función división entera:

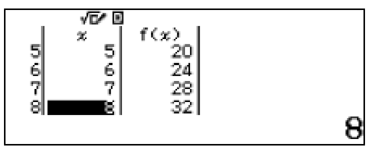


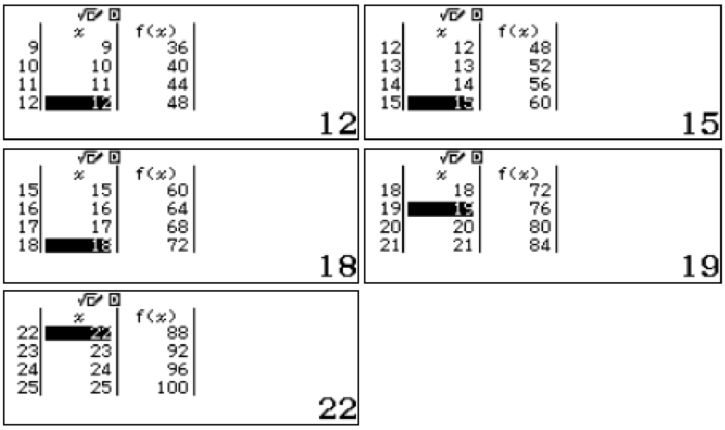
Habrá 4 euros y 65 céntimos de euro.

Marzo 19: Con los dígitos no nulos formar un número de nueve cifras diferentes ABCDEFGHI de manera que AB sea múltiplo de 2, ABC de tres, ABCD de cuatro y así sucesivamente
Nivel: A partir de 1ESO.
Solución: Como ABCDE es múltiplo de 5, el número será: ABCD5FGHI. Las cifras que ocupan lugar par han de ser números pares: B, D, F i H: 2, 4, 6 o 8. Como el 5 ya está colocado: A, C, G i I: 1,3,7 o 9. ABC múltiple de 3 y A= 1, 3, 7 o 9. B = 2, 4, 6 o 8 i C = 1, 3, 7 o 9. Como ABCD debe ser múltiplo de 4, C impar y D par, buscamos como han de terminar los múltiplos de 4 con la calculadora









Por tanto, D sólo puede ser 2 o 6. A+B+C es múltiplo de 3 menor o igual que 9+8+7= 24 y mayor o igual que 1+2+3 = 6. Sumas posibles: 6, 9, 12, 15, 18, 21 o 24. Pero, como B es par y A y C impares diferentes de 5 las posibilidades son:

123

321

147

741

183

381

189

981

387

783

789

987

Las completamos con la cuarta cifra (2 o 6) i la quinta que es 5

12365

32165

14725

14765

74125

74165

18325

18365

38125

38165

18925

18965

98125

98165

38725

38765

78325

78365

78925

78965

98725

98765

La sexta cifra ha de terminar en número par y la suma de las seis cifres ha de ser múltiplo de 3:

12365 (17+4)	123654
32165	321654
14725 (19+8)	147258
14765 (23+	Imposible
74125 (19+8)	741258
74165 (23+	Imposible
18325 (19+	Imposible
18365 (23+4)	183654
38125 (19+	Imposible
38165 (23+4)	381654
18925 (25+	Imposible
18965 (29+4)	189654
98125 (25+	Imposible
98165 (29+4)	981654
38725 (25	Imposible
38765 (29+4	387654
78325 (25	Imposible
78365 (29+4)	783654
98725 (31+	Imposible
98765 (35+4)	987654

Completamos la séptima cifra y probamos con la división o con el criterio del 7

123654

    1236547 no

    1236549 no

321654

    3216547 no

3216549

147258

    1472583

    1472589 no

741258

7412583 no

7412589 no

183654

1836547 no

1836549 no

381654

3816547

3816549 no

189654

1896543 no

1896547 no

981654

9816543 no

9816547 no

387654

3876541 no

3876549 no

783654

7836541 no

7836549

987654

9876541 no

9876543 no

Completamos la octava cifra, utilizando el criterio del 8. Dividimos les tres últimas cifres entre 8

32165498 no

14725836 no

38165472

78365492 no

Por tanto, el número buscado es 381654729

Marzo 20-21: A.- Hallar el natural n que cumple:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=10$$

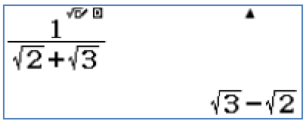
B.- Demostrar y generalizar la igualdad:

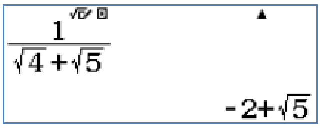
$$\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\cdots\cdot\log_{11}10=\log_{11}2$$

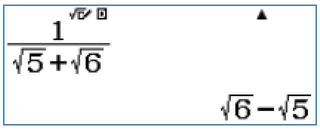
Nivel: A partir de 4ESO.

Solución: Para el apartado A tenemos:

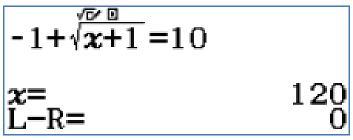
Solución 1: Simplificamos los primeros sumandos del primer miembro:







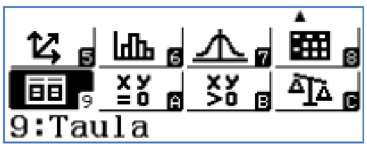
Y a partir de ellos fácilmente deducimos que la suma coincide con $-1+\sqrt{n+1}$ que ha de ser igual a 10. Resolveremos la ecuación con la función SOLVE

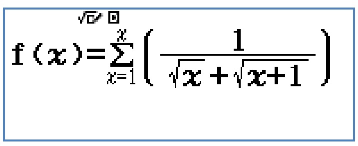


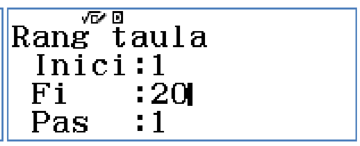
Por tanto, n = 120

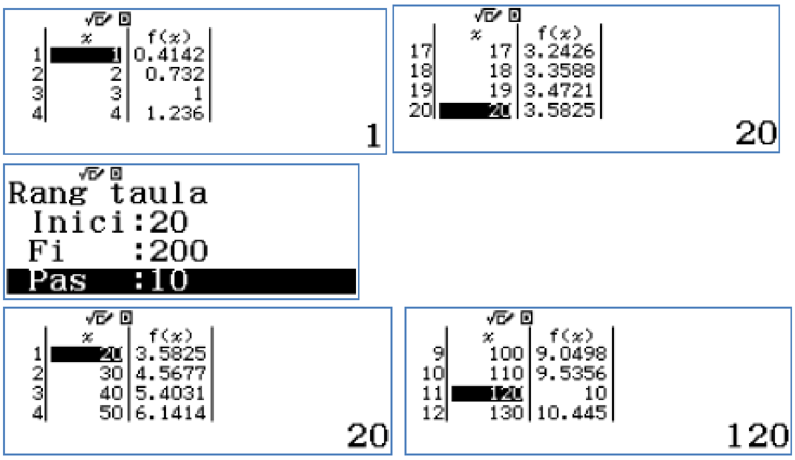
Solución 2:

Con el menú TABLA calcularemos la anti imagen de 10 de la función $f(x)=\sum_{1}^{x}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$.

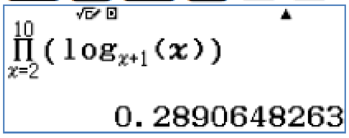




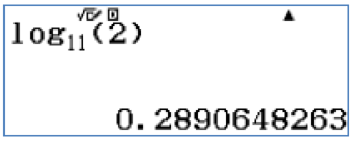




Para el apartado B tenemos: Utilizaremos la función productos finitos



Calculemos $\log_{11} 2$:



Los dos resultados son iguales.

Demostración:

Aplicando el cambio de bases de logaritmos:

$$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot ..... \cdot \log_{11} 10 = \frac{\log_{11} 2}{\log_{11} 3} \cdot \frac{\log_{11} 3}{\log_{11} 4} \cdot \frac{\log_{11} 4}{\log_{11} 5} \cdot ..... \frac{\log_{11} 9}{\log_{11} 10} \cdot \log_{11} 10 = \log_{11} 2$$

Generalización:

$$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot ..... \cdot \log_{n+1} n = \log_{n+1} 2\,, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

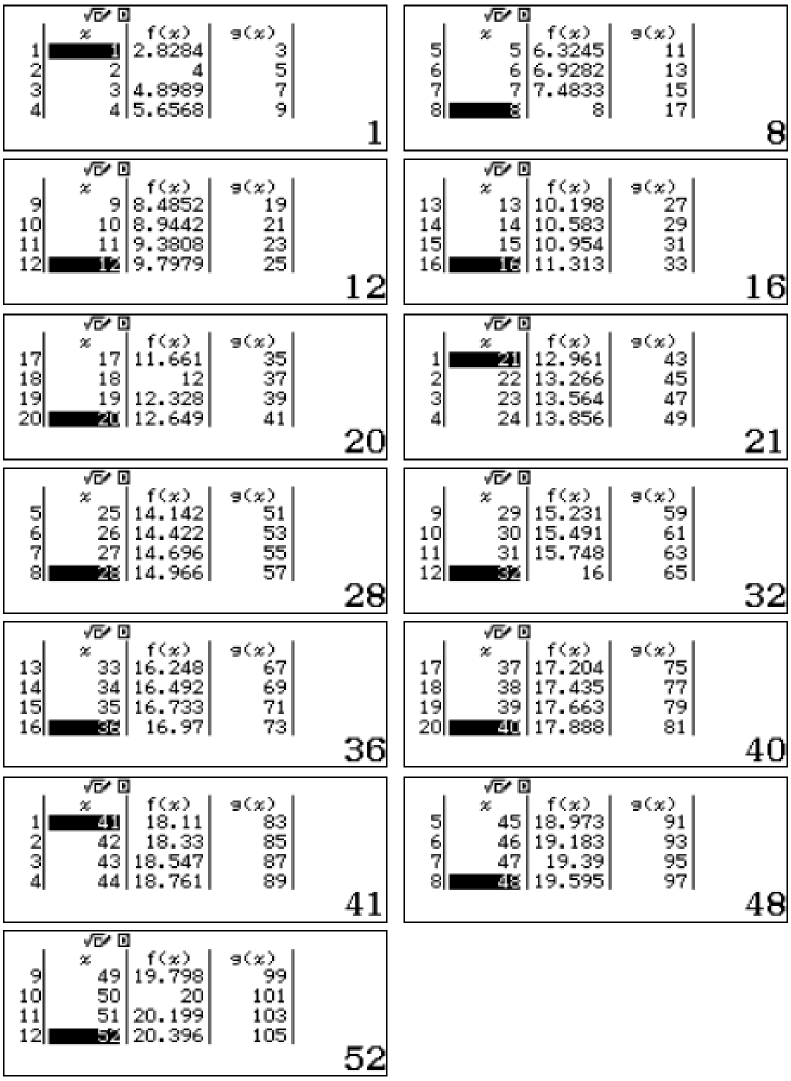
<u>Marzo 22:</u> Busca la mayor pareja de naturales impares consecutivos menores que 100 cuya diferencia de cuadrados sea un cuadrado perfecto

<u>Nivel:</u> A partir de 3ESO.

<u>Solución:</u> Tenemos:

$$(2n+1)^2 - (2n-1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 + 4n - 1 = 8n$$

con 8n un cuadrado perfecto, por tanto, buscamos los valores de n que hagan que 2n+1 sea menor que 100 i que $\sqrt{8n}$ sea natural menor que 10. Hacemos una tabla de valores de las funciones: $f(x) = \sqrt{8x}$ y $g(x) = 2x + 1$



	x	f(x)	g(x)
1	1	2.8284	3
2	2	4	5
3	3	4.8989	7
4	4	5.6568	9

1

	x	f(x)	g(x)
5	5	6.3245	11
6	6	6.9282	13
7	7	7.4833	15
8	8	8	17

8

	x	f(x)	g(x)
9	9	8.4852	19
10	10	8.9442	21
11	11	9.3808	23
12	12	9.7979	25

12

	x	f(x)	g(x)
13	13	10.198	27
14	14	10.583	29
15	15	10.954	31
16	16	11.313	33

16

	x	f(x)	g(x)
17	17	11.661	35
18	18	12	37
19	19	12.328	39
20	20	12.649	41

20

	x	f(x)	g(x)
1	21	12.961	43
2	22	13.266	45
3	23	13.564	47
4	24	13.856	49

21

	x	f(x)	g(x)
5	25	14.142	51
6	26	14.422	53
7	27	14.696	55
8	28	14.966	57

28

	x	f(x)	g(x)
9	29	15.231	59
10	30	15.491	61
11	31	15.748	63
12	32	16	65

32

	x	f(x)	g(x)
13	33	16.248	67
14	34	16.492	69
15	35	16.733	71
16	36	16.97	73

36

	x	f(x)	g(x)
17	37	17.204	75
18	38	17.435	77
19	39	17.663	79
20	40	17.888	81

40

	x	f(x)	g(x)
1	41	18.11	83
2	42	18.33	85
3	43	18.547	87
4	44	18.761	89

41

	x	f(x)	g(x)
5	45	18.973	91
6	46	19.183	93
7	47	19.39	95
8	48	19.595	97

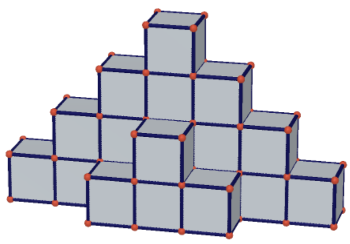
48

	x	f(x)	g(x)
9	49	19.798	99
10	50	20	101
11	51	20.199	103
12	52	20.396	105

52

El valor de n buscado es 32 y por tanto los números solicitados son 63 y 65 con diferencia de cuadrados 256 (= 16^2)

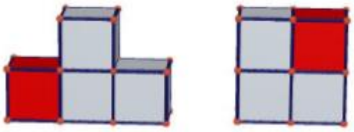
Marzo 23-24 Construimos una pirámide de cubos de la siguiente manera: Empezamos una capa con cuatro cubos Las capas posteriores son dos cubos más alta que la anterior (mirar figura). Cuando llegamos a la altura de 10 cubos, ¿cuántos cubos habremos gastado? Cuando llegamos a la altura de 50 cubos, ¿cuántos cubos habremos gastado?



Nivel: A partir de 3ESO.

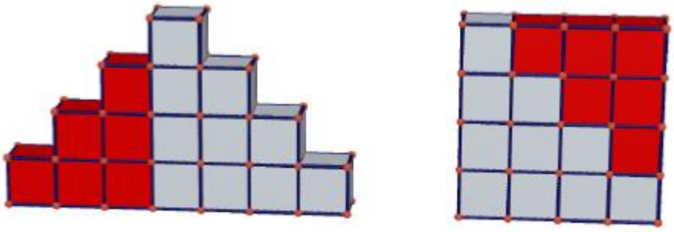
Solución: Analizando la figura tenemos:

Primera fila:



$$4 = 2^2$$

Segunda fila

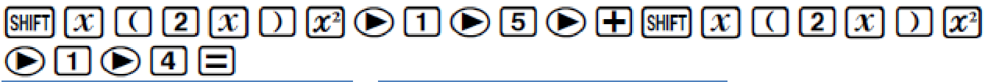


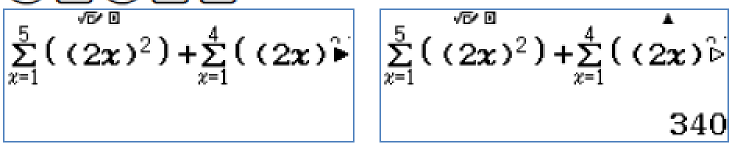
$$16 = 4^2$$

Es fácil deducir que las filas están formadas por los cuadrados de los números pares. Si la altura es de 10 cubos el total de cubos utilizados es la suma de los cuadrados de los 5 primeros pares consecutivos más la suma de los 4 primeros pares consecutivos.

$$\sum_{x=1}^{5}(2x)^2 + \sum_{x=1}^{4}(2x)^2 \ .$$

Utilizaremos la función de sumas finitas

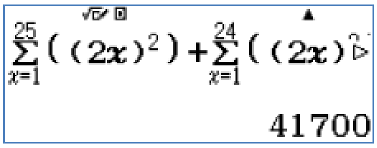




Son necesarios 340 cubos.

Análogamente, para la última pregunta, hemos de obtener:

$$\sum_{x=1}^{25}(2x)^2 + \sum_{x=1}^{24}(2x)^2$$



Son necesarios 41700 cubos.

Marzo 26-27 Partimos de un triángulo equilátero de un metro de lado. Unimos los puntos medios de los lados obteniendo de nuevo un triángulo equilátero. Repetimos este proceso obteniendo así una sucesión de triángulos equiláteros. Calcular la suma de áreas de las treinta primeras iteraciones

Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: Analicemos los primeros términos de la sucesión:

Iteración 1	Iteración 2	Iteración 3	Iteración 4	Iteración 5	Iteración 6
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{256}$	…

Observamos que los denominadores son todos potencias de 4:

Iteración 1	Iteración 2	Iteración 3	Iteración 4	Iteración 5	Iteración 6
$\frac{1}{4^0}$	$\frac{1}{4^1}$	$\frac{1}{4^2}$	$\frac{1}{4^3}$	$\frac{1}{4^4}$	…

Podemos ir sumando los valores obtenidos e intentar encontrar algún tipo de regularidad:

$$1+\frac{1}{4}=1{,}25$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=1{,}3125$$

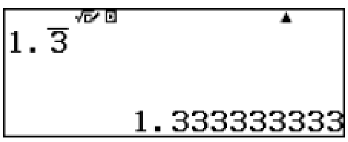
$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}=1{,}328125$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}=1{,}328125$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}=1{,}33203125$$

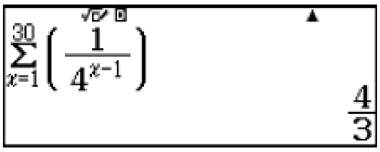
$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\frac{1}{1024}=1{,}333007813$$

Parece que la suma se aproxima a 1,333333… Si queremos dar el resultado en forma de fracción haríamos lo siguiente en la calculadora:



Ahora en lugar de tenerlo expresado como a número decimal periódico puro, lo visualizaremos como una fracción:

Pero la intuición hay que formalizarla. Tratamos de encontrar una expresión algebraica para la sucesión de áreas que hay en cada iteración. Si nos fijamos en el exponente, este es una unidad menos que la correspondiente iteración. Per tanto, el exponente podemos expresarlo en función del número de la iteración mediante: x – 1. De esta manera el área obtenida en la n-ésima iteración es: $\frac{1}{4^{n-1}}$. Si queremos saber cuánto vale la suma de las áreas de las 30 primeras iteraciones, hemos de utilizar la suma finita:



Por tanto, la suma de las áreas de les 30 primeras iteraciones es $\frac{4}{3}$.

Marzo 28: El cuadrado perfecto 25 cumple que al aumentar una unidad cada cifra se obtiene de nuevo un cuadrado. Sólo hay un cuadrado de cuatro cifras con esta propiedad. Hállalo

Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: Como hemos de encontrar un cuadrado perfecto de cuatro cifras, vamos, por tanteo, a calcular el primer natural que cumple esta condición:

$10^2 = 100$

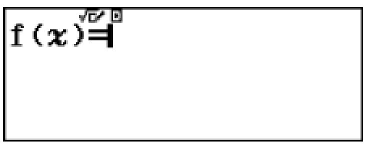
$20^2 = 400$

$30^2 = 900$

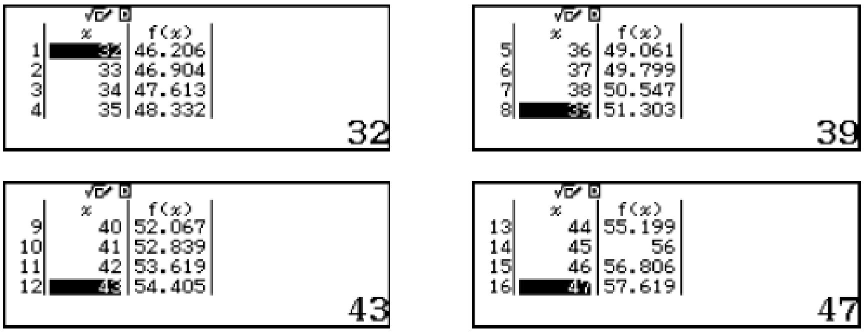
$31^2 = 961$

$32^2 = 1024$

Para resolver este problema con la calculadora vamos a utilizar el menú tabla. Primero nos ponemos en el menú tabla:



Ahora definimos la función: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1111}$, de esta manera cuando observamos en la tabla un valor exacto tendremos el número que nos pide el enunciado. La tabla comenzará por el valor 32 ya que es el primer cuadrado de cuatro cifras.



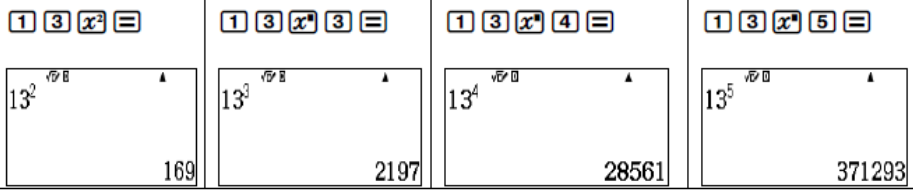
Por tanto, el número que buscamos es $56^2 = 3136 = 2116 + 1111 = 46^2 + 1111$.

Marzo 29: ¿En qué cifra termina 13^{2018}?

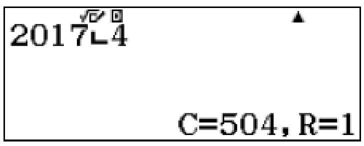
Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: Calculemos las primeras potencias de la base 13:

$13^1 = 13$	$13^2 = 169$	$13^3 = 2197$	$13^4 = 28561$	$13^5 = 371293$



Observamos que la última cifra de les potencias de trece se repite de manera cíclica cada cuatro potencias. Por tanto, lo que hemos de hacer es la división entera de 2017 entre 4 para saber el residuo y relacionarlo con la potencia correspondiente para poder contestar a la cuestión planteada

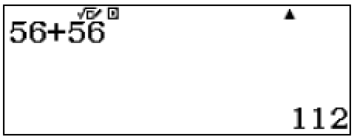


Como el residuo es 1, podemos decir que 13^{2017} termina igual que $13^1 = 13$, es decir, en 3.

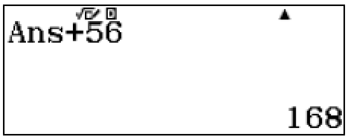
Marzo 30: Obtén en la calculadora el resultado de la división **350/56** utilizando solo la tecla de la suma y el teclado numérico

Nivel: A partir de 1ESO.

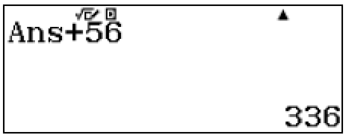
Solución: Vamos a ver cuántas veces cabe el divisor dentro del dividendo. Comenzamos sumando en la calculadora dos veces 56



Ahora sumamos una vez más:



Y ahora sólo hace falta darle a la tecla igual para continuar haciendo las sumas:



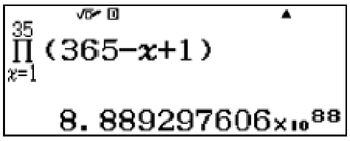
Hemos sumado seis veces 56, por tanto, el cociente es 6 y el residuo 14.

__Marzo 31:__ En una clase de 35 alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos tengan la misma fecha de aniversario?

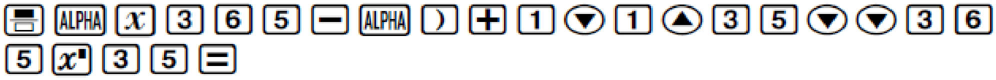
__Nivel:__ A partir de 3ESO.

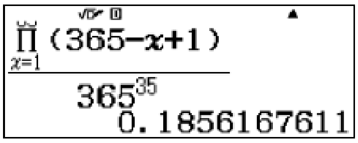
__Solución:__ Sea el suceso A = "Al menos dos personas celebren su aniversario el mismo día" y su complementario A^c = "No hay dos personas que celebren su aniversario el mismo día". Primero calculamos la probabilidad del suceso A^c que es más sencilla. El número de casos posibles de celebración de aniversario, suponiendo que el año tiene 365 días, es:

El número de casos favorables lo obtenemos del siguiente razonamiento: como la primera de las personas puede haber nacido en uno de los 365 días del año, la siguiente en uno de los 364 días restantes y así sucesivamente, el cálculo viene dado por 365·364·363·····331. Esta operación planteada en la calculadora viene dada por:



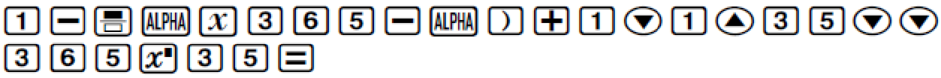
Aplicamos ahora la regla de Laplace:

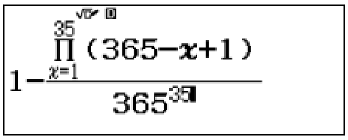


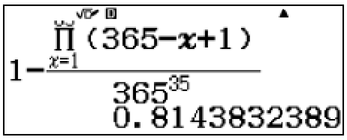


P(A^c)=casos favorables/casos posibles=0.1856167611…≈ 0.186

P(*A*)=1 - P(*A*^{c}) ≈ 1 - 0.186 = 0.814







<