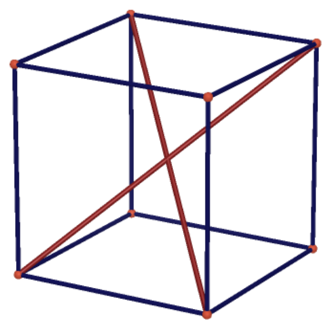
SOLUCIONES ABRIL 2018

AUTOR: Ricard Peiró i Estruch. IES “Abastos”. València

ABRIL 1-8: Calcular el ángulo que forman dos diagonales de un cubo



Nivel: A partir de 4ESO.

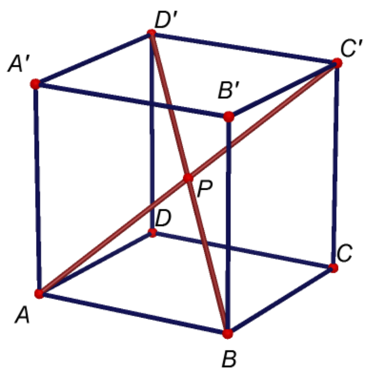
Solución: Sea ABCDA’B’C’D’ el cubo de arista $a=\overline{AB}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ΔABC: $\overline{AC}=a\sqrt{2}$.

Aplicando el teorema de Pitàgores al triángulo rectángulo $\Delta ACC'$: $\overline{AC'}=\overline{BD'}=a\sqrt{3}$.

Las dos diagonales se intersectan en el punto medio P:

$$\overline{BP}=\overline{AP}=\frac{\overline{AC'}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

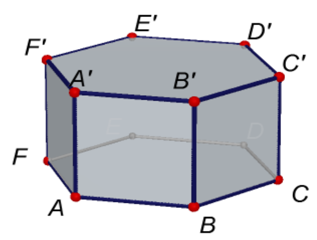


Sea $\alpha=\angle APB$ el ángulo que forman las diagonales $\overline{AC'}$ y $\overline{BD'}$. Aplicando el teorema del coseno al triángulo ΔABP:

$$a^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2\cos\alpha.$$

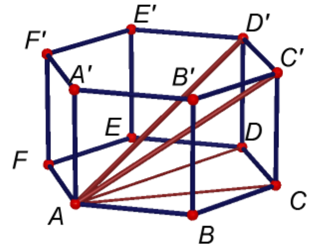
Simplificando: $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. $\alpha=\arccos\frac{1}{3}\approx 70^{o}31'43.6''$.

Abril 4-5: Sea ABCDEFA’B’C’D’E’F’ un prisma hexagonal con todas sus aristas iguales a a. Calcular las diagonales AC’ y AD’. Calcular el área de la sección del prisma que pasa por A, B, D’. Calcular el perímetro de la sección del prisma que pasa por A, B, D’



Nivel: A partir de 4ESO.

Solución: Tenemos, para la primera pregunta: $\overline{AD}=2a$, $\angle ABC=120^{o}$.



Aplicando el teorema del coseno al triángulo ΔABC.

$$\overline{AC}^2=a^2+a^2-2a^2\cos 120=3a^2.$$

Aplicando el teorema de Pitàgores al triángulo rectángulo $\Delta ACC'$:

$$\overline{AC'}^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2.$$

$$\overline{AC'} = 2a.$$

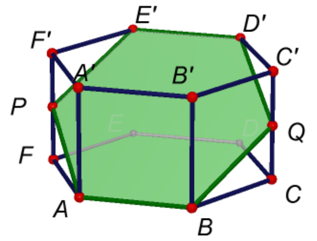
Aplicando el teorema de Pitàgores al triángulo rectángulo ΔADD’:

$$\overline{AD'}^2 = a^2 + (2a)^2 = 5a^2.$$

$$\overline{AD'} = a\sqrt{5}.$$

Notemos que la sección pasa por los puntos medios P, Q de les aristas $\overline{FF'}$, $\overline{CC'}$, respectivamente.

La sección es el hexágono ABQD’E’P.



$$\overline{PQ} = \overline{FC} = 2a.$$

$$\overline{AE'} = \overline{BD'} = \overline{AC'} = 2a.$$

El área del hexágono ABQD’E’P es igual al doble del área del trapecio ABQP:

$$S_{ABQD'E'P} = 2\left(\frac{\overline{AB}+\overline{PQ}}{2}\frac{\overline{AE'}}{2}\right) = 2\left(\frac{a+2a}{2}a\right) = 3a^2$$

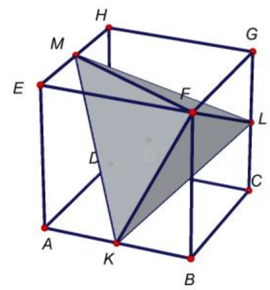
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ΔAFP:

$$\overline{AP}^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{5}{4}a^2.\ \overline{AP} = \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

El perímetro del hexágono ABQD’E’P es:

$$P_{ABQD'E'P} = 2\overline{AB} + 4\overline{AP} = \left(2+2\sqrt{5}\right)a.$$

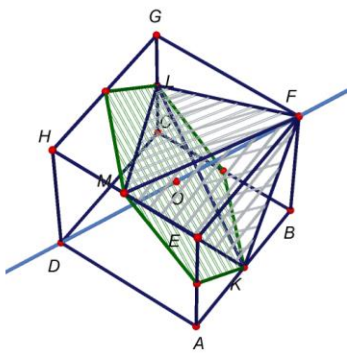
<u>**Abril 2-3:**</u> Sea el cubo ABCDEFGH. Sean K, L, M los puntos medios de las aristas AB, CG y EH, respectivamente. Determinar la proporción entre los volúmenes del tetraedro KLMF y el cubo original



<u>**Nivel:**</u> A partir de 4ESO.

<u>**Solución:**</u> Sea $\overline{AB} = a$ la arista del cubo ABCDEFGH.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ΔAKE: $\overline{EK} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ΔKEM: $\overline{MK} = \frac{\sqrt{6}}{2}a$. Análogamente,



$$\overline{KL} = \overline{LK} = \overline{MK} = \frac{\sqrt{6}}{2}a$$

El centre O del cubo es el centre del triángulo equilátero ΔKLM. $\overline{FK}=\overline{FL}=\overline{FM}=\overline{EK}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$.

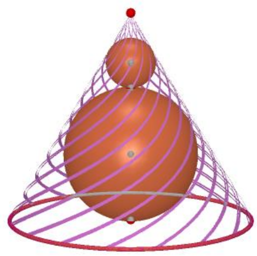
Entonces, F pertenece a la mediatriz del triángulo ΔKLM. Y, además, $\overline{OF}$ es perpendicular al triángulo ΔKLM. $\overline{OF}=\frac{1}{2}\overline{DF}=\frac{a}{2}\sqrt{3}$. El volumen del tetraedro es:

$$V_{KLMF}=\frac{1}{3}S_{KJLM}\cdot\overline{OF}=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)^2\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{3}{16}a^3.$$

La proporción entre los volúmenes del tetraedro y el cubo es:

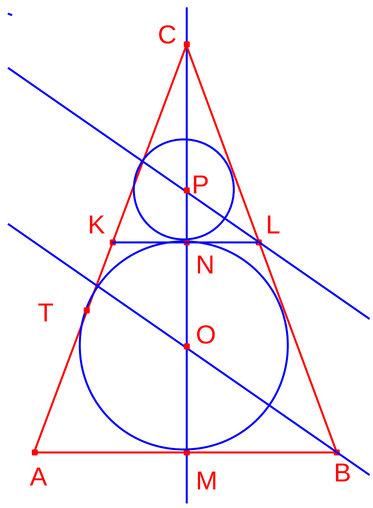
$$\frac{V_{KLMF}}{V_{cub}}=\frac{\frac{3}{16}a^3}{a^3}=\frac{3}{16}.$$

Abril 6-7: En el interior de un cono están dispuestas dos esferas tangentes entre sí i tangentes a la superficie del cono. La proporción entre los radios de las esferas es igual a m/n (m>n). Determinar el ángulo en el vértice de la sección axial del cono



Nivel: A partir de 4ESO.

Solución: Consideremos la sección axial del cono ΔABC (triángulo isósceles $\overline{AC}=\overline{BC}$). Sea M el punto medio del diámetro $\overline{AB}$ de la base.



Sea O el centro de la esfera inscrita al cono y a la base del cono de radio m.

Sea $h=\overline{CM}$, la altura del cono.

Sea P el centro de la esfera superior tangente a la anterior y la superficie lateral del cono de radio n.

El plano tangente a las dos esferas corta las generatrices $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ en los puntos K, L, respectivamente. Sea N la intersección de la altura $\overline{CM}$ y $\overline{KL}$.

Los triángulos ΔABC y ΔKLC son semejantes y la razón de semejanza es m/n.

Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{h}{h-2m}=\frac{m}{n}$$

Resolviendo la ecuación:

$$h = \frac{2m^2}{m-n}.$$

Sea $\alpha = \angle ACM$. El ángulo en el vértice de la sección axial es, $\angle ACB = 2\alpha$.
Sea T el punto de tangencia de la esfera de centro O i la generatriz $\overline{AC}$.
Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo ΔOTC:

$$\sin\alpha = \frac{m}{h-m} = \frac{m}{\frac{2m^2}{m-n}-m} = \frac{m-n}{m+n}.$$

$$\alpha = \arcsin\frac{m-n}{m+n}.$$

$$\angle ACB = 2\alpha = 2\cdot\arcsin\frac{m-n}{m+n}.$$

Abril 6-7: En cualquier prisma el número total de cares C y el número total de aristas A, cumplen: $\mathbf{C = \frac{A}{3} + 2}$

Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: Sea la base del prisma un polígono de n lados.

El número de caras es:

$$C = n + 2.$$

El número V de vértices es:

$$V = 2n.$$

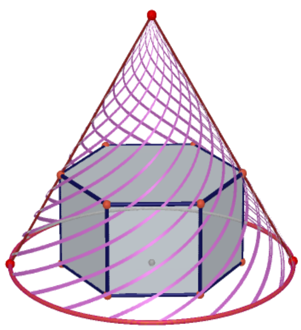
Aplicando la fórmula de Euler:

$$C + V = A + 2\ ,\ \ n + 2 + 2n = A + 2.$$

Resolviendo la ecuación: A = 3n, y queda

$$\frac{A}{3} + 2 = \frac{3n}{3} + 2 = n + 2 = C.$$

Abril 10-11: En un cono equilátero (cono en el que el diámetro de la base es igual a la generatriz) se ha inscrito un prisma regular hexagonal con todas sus aristas iguales. Determinar la proporción entre los volúmenes del prisma y del cono.



Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: Sea O el centro de la base del cono, de vértice S.

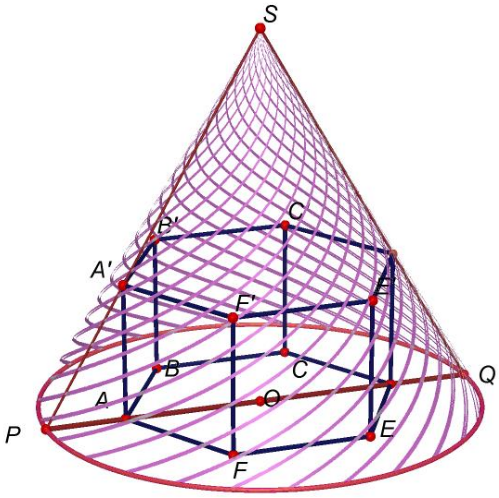
Sea ABCDEFA’B’C’D’E’F’ el prisma regular hexagonal tal que

$$\overline{AB} = \overline{AA'} = x.$$

$$\overline{OA} = x.$$

$$\overline{AD} = \overline{A'D'} = 2x.$$

Sea $\overline{PQ} = 2R$ el diámetro que pasa por los puntos A, D.



$$\overline{AS} = 2R.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ΔPOS:

$\overline{OS} = R\sqrt{3}$, altura del cono.

$$\overline{PA} = R - x.$$

$$\angle SPO = 60^{\circ}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\Delta PAA'$:

$$\overline{AA'} = \sqrt{3} \cdot \overline{PA}, \quad x = \sqrt{3}(R - x).$$

Resolviendo la ecuación:

$$x = \frac{3-\sqrt{3}}{2}R.$$

El volumen del prisma es:

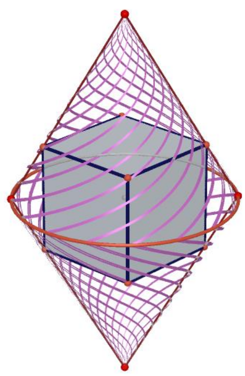
$$V_{prisma} = 6\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \cdot x = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}R\right)^3 = \frac{81\sqrt{3}-135}{8}R^3.$$

El volumen del cono equilátero es:

$$V_{con} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R\sqrt{3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}R^3.$$

La proporción entre los volúmenes del prisma y del cono

$$\frac{V_{prisma}}{V_{con}} = \frac{\frac{81\sqrt{3}-135}{8}R^3}{\frac{\pi\sqrt{3}}{3}R^3} = \frac{243\sqrt{3}-405}{8\pi\sqrt{3}} \approx 0.3650.$$



__Abril 12-13:__ En la figura, hay un doble cono y un cubo. Los dos conos son equiláteros (el diámetro de la base es igual a la generatriz). La cara inferior (superior) del cubo es tangente a la cara lateral del cono inferior (superior). Calcular la proporción entre los volúmenes del cubo y del doble cono

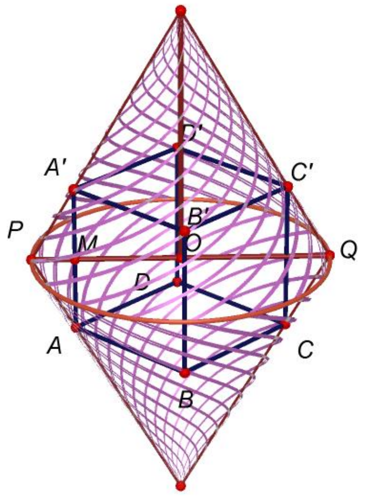
__Nivel:__ A partir de 3ESO.

__Solución:__ Sea el cubo ABCDA’B’C’D’ de arista $\overline{AB} = x$.

Sea O el centro del cubo y del doble cono.

Sea $\overline{PQ} = 2R$ el diámetro del doble cono.

Sea M la intersección del diámetro $\overline{PQ}$ y la arista $\overline{AA'}$.



$$\overline{AC} = x\sqrt{2}\,,\ \overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}x\ \overline{PM} = R - \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

$$\overline{A'M} = \frac{1}{2}x\,,\ \angle A'PO = 60^{o}\,.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ΔPAA':

$$\overline{A'M} = \sqrt{3}\cdot\overline{PM}\,,\ \frac{1}{2}x = \sqrt{3}\left(R - \frac{\sqrt{2}}{2}x\right).$$

Resolviendo la ecuación:

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}+1}R = \frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{5}R\,.$$

El volumen del cubo es:

$$V_{cub} = x^3 = \left(\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{5}\right)^3 R^3 = \frac{648\sqrt{2}-456\sqrt{3}}{125}R^3\,.$$

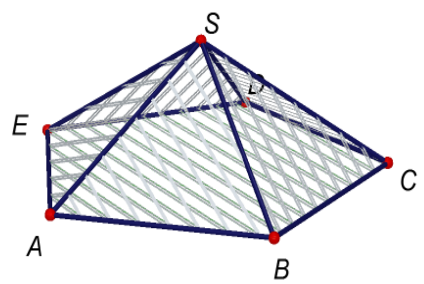
El volumen del doble cono es:

$$V_{2con} = 2\cdot\frac{1}{3}\pi R^2\cdot R\sqrt{3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}R^3\,.$$

La proporción entre los volúmenes del cubo y del doble cono es:

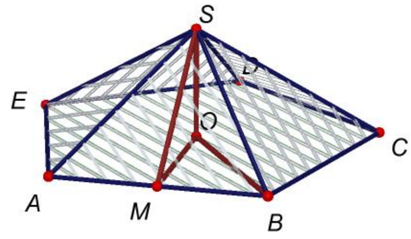
$$\frac{V_{cub}}{V_{2con}} = \frac{\frac{648\sqrt{2}-456\sqrt{3}}{125}R^3}{\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}R^3} = \frac{\frac{648\sqrt{2}-456\sqrt{3}}{125}}{\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}} = 0.2792$$

<u>Abril 14-15:</u> Sea dada una pirámide regular pentagonal tal que sus cares laterales son triángulos equiláteros. Determinar el ángulo que forma la cara lateral y la base. Determinar el ángulo que forma una arista lateral y la base.



Nivel: A partir de 4ESO.

Solución: Sea ABCDES la pirámide de base el pentágono regular ABCDE y que tiene todas las aristas iguales, $\overline{AB} = a$.



Sea O el centro del pentágono regular. Sea M el punto medio de la arista $\overline{AB}$. $\angle MBO = 54^{\circ}$.

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo ΔOMB:

$$\frac{a}{2\cdot\overline{OB}} = \cos 54^{\circ}.\ \overline{OB} = \frac{a}{2\cos 54^{\circ}},\ \frac{2\cdot\overline{OM}}{a} = \text{tg}54^{\circ}.\ \overline{OM} = 2a\cdot\text{tg}54^{\circ}.$$

Para la primera pregunta, tenemos: El ángulo que forma una arista lateral y la base es igual al ángulo $\alpha = \angle OBS$.

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo ΔSOB:

$$\alpha = \arccos\frac{\overline{OB}}{\overline{BS}} = \arccos\frac{1}{2\cos 54^{\circ}} \approx 31^{\circ}43'3''.$$

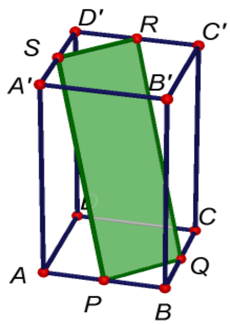
Para la segunda pregunta, tenemos: El ángulo que forma una cara lateral y la base es igual al ángulo $\beta = \angle OMS$ .Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo ΔSMB:

$$\overline{MS} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo ΔSOM:

$$\alpha = \arccos\frac{\overline{OM}}{\overline{MS}} = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}\text{tg}54^{\circ} \approx 37^{\circ}22'39''.$$

Abril 16-17: Sea ABCDA’B’C’D’ un prisma regular de base cuadrada de arista 1 y altura 2. Sean P, Q, R y S los puntos medios de las aristas AB, BC, C’D’ y A’D’, respectivamente. Determinar el área del rectángulo PQRS



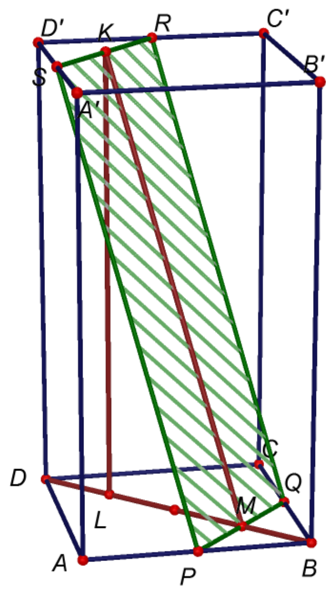
Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: Tenemos: $\overline{BP} = \overline{BQ} = \frac{1}{2}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles ΔPBQ:

$$\overline{PQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles ΔBAD:



$$\overline{BD} = \sqrt{2}.$$

Sea M el punto medio del segmento $\overline{PQ}$, K el punto medio del segmento $\overline{RS}$. Sea L la proyección de K sobre la base ABCD.

$$\overline{DL} = \overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{PQ} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \ \overline{LM} = \overline{BD} - 2\cdot\overline{BM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

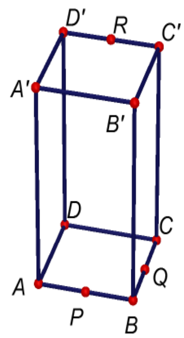
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ΔKLM:

$$\overline{KM} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

El área del rectángulo PQRS es:

$$S_{PQRS} = \overline{PQ}\cdot\overline{KM} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Abril 18-19: Sea ABCDA'B'C'D' un prisma regular de base cuadrada de arista 1 y altura 2. Sean P, Q y R los puntos medios de las aristas AB, BC y C'D', respectivamente. Determinar el área de la sección del prisma determinada por el plano PQR



Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: La sección determinada por los puntos P, Q, R es el hexágono PQURST, tal que U es el punto medio de la arista $\overline{CC'}$, S es el punto medio de la arista $\overline{A'D'}$ y T es el punto medio de la arista $\overline{AA'}$.

$$\overline{BP} = \overline{BQ} = \frac{1}{2}.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles ΔPBQ:

$$\overline{PQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

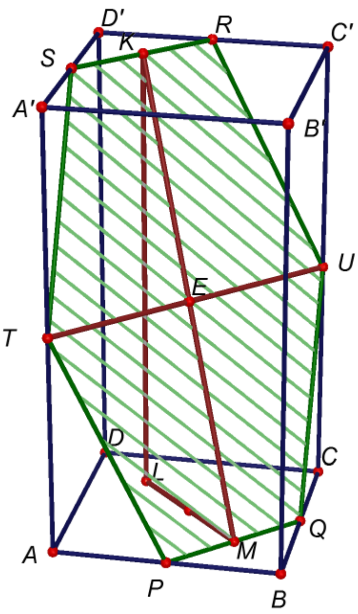
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles ΔABC:

$$\overline{AC} = \overline{TU} = \overline{BD} = \sqrt{2}.$$

Sea L la proyección de K sobre la base ABCD.

$$\overline{DL}=\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\overline{LM}=\overline{BD}-2\cdot\overline{BM}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ΔKLM:

$$\overline{KM}=\sqrt{2^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

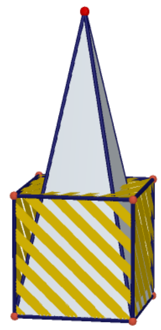
Sea E el punto medio del segmento $\overline{TU}$.

$$\overline{ME}=\frac{1}{2}\overline{KM}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

El área de la sección es igual al doble del área del trapecio PQUT:

$$S_{PQURST}=2\left(\frac{\overline{PQ}+\overline{TU}}{2}\overline{ME}\right)=2\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}}{2}\,\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{9}{4}$$

__Abril 20-21:__ Sea dado un cubo y una pirámide cuadrangular recta que tiene por base una cara del cubo. Supongamos que el cubo y la pirámide tienen la misma área. Hallar la proporción entre los volúmenes de la pirámide y el cubo



__Nivel:__ A partir de 3ESO.

__Solución:__ Sea el cubo ABCDA’B’C’D’ de arista $\overline{AB}=a$. Sea ABCDV la pirámide cuadrangular regular.

Sea O el centro de la cara ABCD. Sea M el punto medio de la arista $\overline{AB}$. Sea $\overline{MV}=x$ la altura de una cara lateral de la pirámide. Sea $\overline{OV}=h$ la altura de la pirámide. El área del cubo es:

$$S_{cub}=6a^2$$

El área total de la pirámide es:

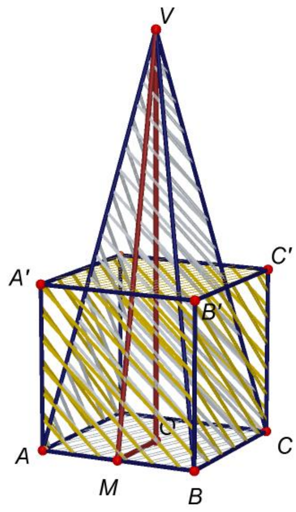
$$6a^2=a^2+4\frac{1}{2}ax$$

El cubo y la pirámide tienen la misma área, entonces: $6a^2=a^2+2ax$.

Resolviendo la ecuación: $x=\frac{5}{2}a$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ΔMOV:

$$\left(\frac{5}{2}a\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h^2.$$



Resolviendo la ecuación:

$$h = a\sqrt{6}.$$

El volumen de la pirámide es:

$$V_{\text{piràmide}} = \frac{1}{3}a^2 a\sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}a^3.$$

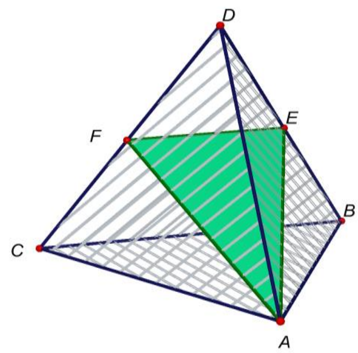
El volumen del cubo es:

$$V_{\text{cub}} = a^3.$$

La proporción entre los volúmenes de la pirámide y el cubo es:

$$\frac{V_{\text{piràmide}}}{V_{\text{cub}}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}a^3}{a^3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

<u>Abril 22-29:</u> Sea ABCD un tetraedro regular de arista 2. Sean E y F los puntos medios de las aristas BD y CD, respectivamente. Determinar el área del triángulo ΔAEF



<u>Nivel:</u> A partir de 3ESO.

<u>Solución:</u> Sea $\overline{EF}$ la paralela mediana de la cara ΔBCD, ENTONCES:

$$\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 1$$

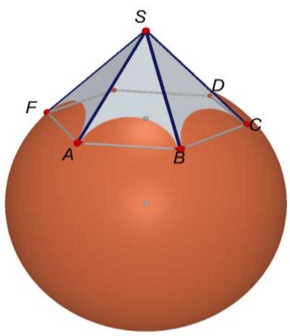
Aplicando el teorema de Pitàgores al triángulo rectángulo ΔAFC:

$$\overline{AF} = \overline{AE} = \sqrt{3}.$$

Utilizando la fórmula de Herón el área del triángulo ΔAEF es:

$$S_{AEF} = \frac{\sqrt{\left(2\sqrt{3}+1\right)\cdot 1\cdot 1\cdot \left(2\sqrt{3}\right)-1}}{4} = \frac{\sqrt{11}}{4}.$$

Abril 23-30: Sea ABCDEFS una pirámide hexagonal regular de base un hexágono regular ABCDEF de lado a. Sea a la altura de la pirámide. Una esfera es tangente a las aristas laterales de la pirámide en los vértices de la base. Calcular el radio de la esfera



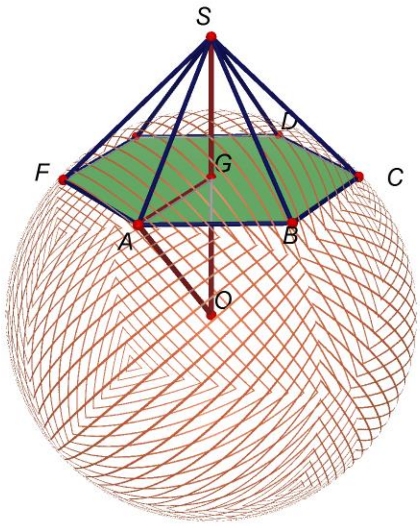
Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: Sea G el centro de la base ABCDEF de la pirámide

Sea $\overline{SG} = a$, la altura de la pirámide. Sea O el centro de la esfera.

$$\angle SAO = 90^o, \ \angle AGO = 90^o.$$

Sea $\overline{OA} = R$ el radio de la esfera. Sea $\overline{OG} = x$



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles ΔAGS: $\overline{AS} = a\sqrt{2}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles ΔSAO:

$$\left(a\sqrt{2}\right)^2 + R^2 = (a+x)^2 \quad (1)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles ΔAGS:

$$a^2 + x^2 = R^2 \quad (2)$$

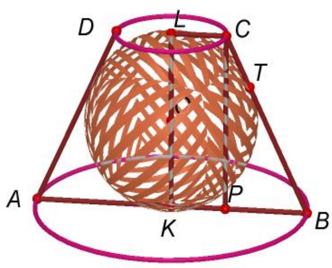
Consideremos el sistema formado per las expresiones (1) (2):

$$\begin{cases} \left(a\sqrt{2}\right)^2 + R^2 = (a+x)^2 \\ a^2 + x^2 = R^2 \end{cases}.$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x = a \\ R = a\sqrt{2} \end{cases}.$$

Abril 24-25: Una esfera está inscrita en un cono truncado. Probar que el área de la esfera es menor o igual que el área lateral del cono truncado



Nivel: A partir de 4ESO.

Solución: Sea r el radio de la esfera. Sea ABCD una sección axial del cono truncado.

Sea K el centro de la base inferior del cono truncado. Sea $\overline{BK} = a$ el radio de la base inferior del cono truncado. Sea L el centro de la base superior del cono truncado. Sea $\overline{CL} = b$ el radio de la base superior del cono truncado. Sea $a > b$. $\overline{KL} = 2r$. Sea $\alpha = \angle ABC,\ \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Sea T el punto de tangencia de la esfera y la generatriz $\overline{BC}$ del cono.

$$\overline{BK} = \overline{BT} = a\,,\ \overline{CL} = \overline{CT} = b\,.\ \overline{BC} = a + b\,.$$

Sea P la proyección de P sobre la base inferior del cono truncado. $\overline{PB} = a - b$.

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo ΔCPB: $\sin\alpha = \dfrac{2r}{a+b}$.

El área de la esfera es:

$$S_{esfera} = 4\pi r^2 = \pi(a+b)^2 \sin^2\alpha\,.$$

El área lateral del cono truncado es:

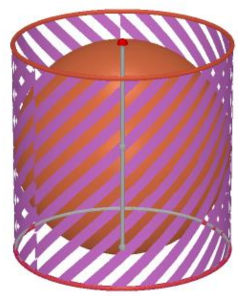
$$S_{conT} = \left(\frac{2\pi a + 2\pi b}{2}\right)\overline{BC} = \pi(a+b)^2\,.$$

$$S_{esfera} = \pi(a+b)^2 \sin^2\alpha < \pi(a+b)^2 = S_{conT}\,.$$

El área lateral del cono truncado es:

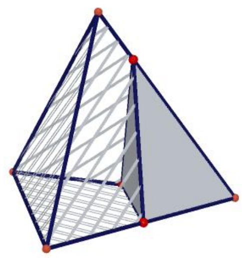
$$S_{conT} = \left(\frac{2\pi a + 2\pi b}{2}\right)\overline{BC} = \pi(a+b)^2\,.$$

$$S_{esfera} = \pi(a+b)^2 \sin^2\alpha < \pi(a+b)^2 = S_{conT}\,.$$



Nota: El área de una esfera inscrita en un cilindro es igual a el área lateral del cilindro

Abril 26-27: La sección de un tetraedro regular que pasa por dos puntos medios de dos aristas de la base y es perpendicular a la base, divide al tetraedro en dos poliedros. Determinar la proporción entre los volúmenes de los dos poliedros



Nivel: A partir de 3ESO.

Solución: Sea ABCD el tetraedro regular de arista $\overline{AB} = a$.

Siga O el baricentro del triángulo equilátero $\overset{\Delta}{ABC}$. Sea $h = \overline{OD}$ la altura del tetraedro ABCD.

El volumen del tetraedro regular ABCD es:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 h = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2 h$$

Sean M, N los puntos medios de las aristas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, respectivamente.

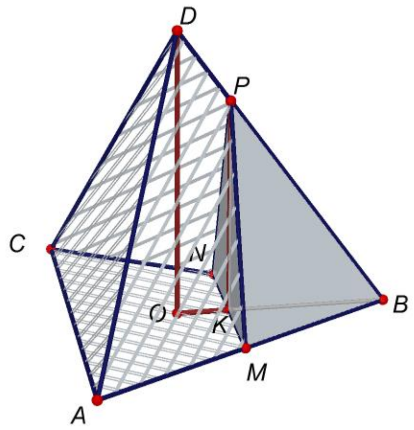
Sea K el punto medio del segmento $\overline{MN}$.

Sea MNP la sección perpendicular a la base $\triangle ABC$.

$$\overline{OB}=\frac{\sqrt{3}}{3}a,\ \overline{BK}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a.$$

Los triángulos rectángulos $\triangle DOB$ y $\triangle PKB$ son semejantes. Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{h}{\frac{\sqrt{3}}{3}a}=\frac{\overline{PK}}{\frac{\sqrt{3}}{4}a},\ \overline{PK}=\frac{3}{4}h.$$



El volumen del tetraedro MNBP es:

$$V_{MNBP}=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2\frac{3}{4}h=\frac{\sqrt{3}}{64}a^2h.$$

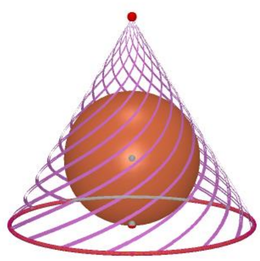
El volumen del poliedro AMNCPD es igual al volumen del tetraedro ABCD menos el volumen del tetraedro MNBP:

$$V_{AMNCPD}=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2h-\frac{\sqrt{3}}{64}a^2h=\frac{13\sqrt{3}}{192}a^2h.$$

La proporción entre los volúmenes de los poliedros AMNCPD i MNBP es:

$$\frac{V_{AMNCPD}}{V_{MNBP}}=\frac{\frac{13\sqrt{3}}{192}a^2h}{\frac{\sqrt{3}}{48}a^2h}=\frac{13}{3}.$$

<u>Abril 28:</u> Sea un cono recto con área de la base S_1 y área lateral S_2. Se inscribe una esfera. Hallar el radio de la esfera



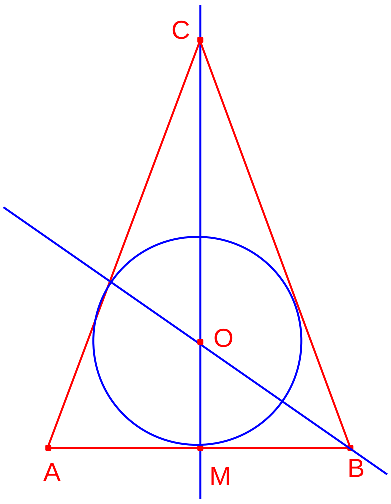
<u>Nivel:</u> A partir de 3ESO.

<u>Solución: Nivel:</u> A partir de 3ESO.

<u>Solución:</u> Consideremos la sección axial del cono $\triangle ABC$ (triángulo isósceles $\overline{AC}=\overline{BC}=g$).

Sea M el punto medio del diámetro $\overline{AB} = 2R$ de la base.

Sea O el centro de la esfera inscrita al cono. Sea $r = \overline{OM}$ el radio de la esfera.



$S_1 = \pi R^2$, $S_2 = \pi R g$.

El área del triángulo ΔABC es:

$$S_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{MC}}{2} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}}{2} r .$$

$$R\sqrt{g^2 - R^2} = (g + R) r .$$

$$r = R\sqrt{\frac{g^2 - R^2}{(g+R)^2}} = R\sqrt{\frac{g-R}{g+R}} = \sqrt{R^2 \frac{\frac{S_2}{\pi R} - R}{\frac{S_2}{\pi R} + R}} = \sqrt{R^2 \frac{S_2 - \pi R^2}{S_2 + \pi R^2}} = \sqrt{\frac{S_1}{\pi} \cdot \frac{S_2 - S_1}{S_2 + S_1}}$$