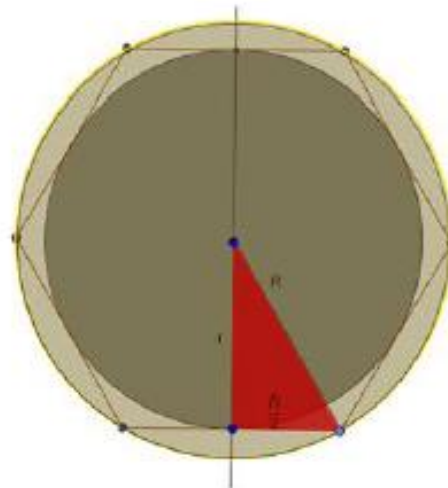


SOLUCIONS OCTUBRE 2017

AUTOR: Mario Mestre. INS "Pont de Suert". L'Alta Ribagorça

Octubre 1-8: En un hexàgon regular hem inscrit i circumscrit dues circumferències. Si l'àrea de la corona es 4π , trobeu l'àrea del hexàgon

Nivell: 3ESO



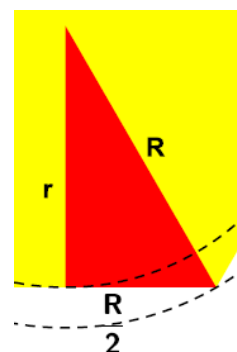
Solució: Si R (r) es el radi de la circumferència circumscrita (inscrita) en el hexàgon tenim el següent sistema de equacions:

$$\left. \begin{array}{l} 4\pi = \pi(R^2 - r^2) \\ R^2 = r^2 + \frac{R^2}{4} \end{array} \right\}$$

La seua solució és: $R = 4$ i $r = 2\sqrt{3}$

Per últim:

$$A_{\text{hexàgon}} = 12 \cdot A_{\text{triangle roig}} = 12 \cdot \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$$

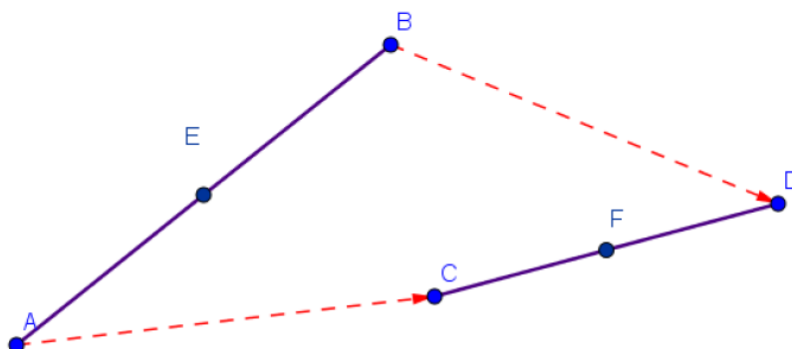


Octubre 2: Siguen donats els segments AB i CD , amb E i F els seus punts mitjans. Demostrar:

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{EF}$$

Nivell: Segon de batxillerat

Solució:



$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{FD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC}) + (\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD}) =$$

$$2\overrightarrow{EF} + (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FD}) =$$

$$2\overrightarrow{EF} + (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CF}) =$$

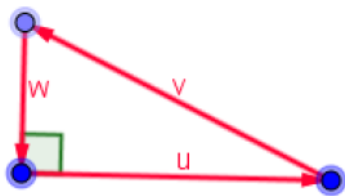
$$2\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EE} + \overrightarrow{FF} =$$

$$2\overrightarrow{EF} + \vec{O} + \vec{O} = 2\overrightarrow{EF}$$

Octubre 3: Demostrar vectorialment el teorema de Pitàgores i que en un paral·lelogram la suma de quadrats de les diagonals és igual a la suma de quadrats dels costats

Nivell: Segon de batxillerat.

Solució:

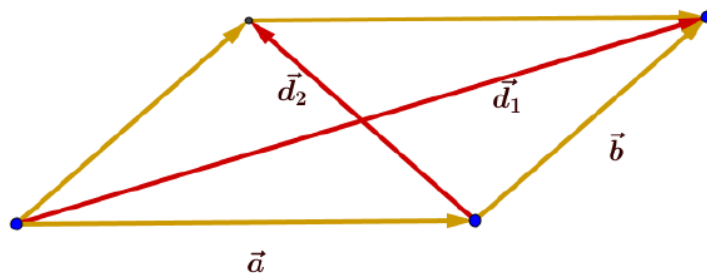


$$\mathbf{w} + \mathbf{u} = \mathbf{v}$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2 \cdot \cos 0^\circ = |\mathbf{v}|^2$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (\text{perpendiculars})$$

$$(\mathbf{w} + \mathbf{u})(\mathbf{w} + \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{w}|^2 + 0 + |\mathbf{u}|^2$$



$$(|d_1|^2 + |d_2|^2 = 2a^2 + 2b^2)$$

$$|\vec{d}_1|^2 + |\vec{d}_2|^2 = \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1 + \vec{d}_2 \cdot \vec{d}_2 =$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$$

Octubre 4: Dani surt de sa casa amb la seua col·lecció de cromos. Cada vegada que se troba amb un amic li dona la meitat dels que té més un. Després del sext amic se queda sense cromos. Quants tenia?

Nivell: A partir de 2ESO

Solució: Tenim el següent diagrama, considerant que Dani surt amb x cromos

	Li dona	Li queden
Primer amic	$\frac{x}{2} + 1$	$\frac{x - 2}{2}$
Segon amic	$\frac{x - 2}{4} + 1$	$\frac{x - 6}{2}$
Tercer amic	$\frac{x - 6}{4} + 1$	$\frac{x - 14}{8}$
Quart amic	$\frac{x - 14}{16} + 1$	$\frac{x - 30}{16}$
Quint amic	$\frac{x - 30}{32} + 1$	$\frac{x - 62}{32}$
Sext amic	$\frac{x - 62}{64} + 1$	$\frac{x - 126}{64}$

Com després del sext amic ja no li queden cromos, necessàriament $x = 126$. També, sense necessitat de recórrer a l'àlgebra, per el procediment de la “marxa enrere” (començant per el sext amic al que li dona 2 i es queda sense cap cromo):

	Li dona	Li queden
Primer amic	64	62
Segon amic	32	30
Tercer amic	16	14
Quart amic	8	6
Quint amic	4	2
Sext amic	2	0

Per tant, al sortir de casa portava $(64 + 52 =) 126$ cromos

Octubre 5: Demostrar vectorialment la identitat:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

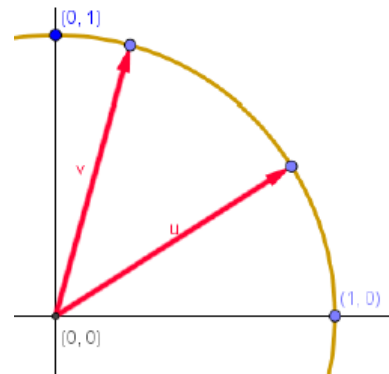
Nivell: Segon de batxillerat.

Solució:

Siguen α i β els angles que formen els vectors $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ amb l'eix d'abscisses, respectivament. Al ser vectors unitaris, tindrem:

$$\mathbf{u} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$\mathbf{v} = (\cos \beta, \sin \beta)$$



$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\cos \alpha, \sin \alpha) \cdot (\cos \beta, \sin \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos (\alpha - \beta) = 1 \cdot 1 \cdot \cos (\alpha - \beta)$$

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Octubre 6: La agulla minutera està m minuts per darrere de l'horària. Quant temps ha de passar per a que estiga n minuts por d'avant?

Nivell: A partir de segon de ESO.

Solució: Siga x el temps necessari per a que la minutera estiga n minuts després de l'horària per primera vegada. El temps x es compon de tres sumands: els m minuts que va per d'arrere, els n minuts que deu anar per endavant i el temps que descriu l'horària en eixos x minuts. Com:

$$v_h = \frac{5 \text{ min}}{60 \text{ min}} = \frac{1}{12} \text{ min/min}$$

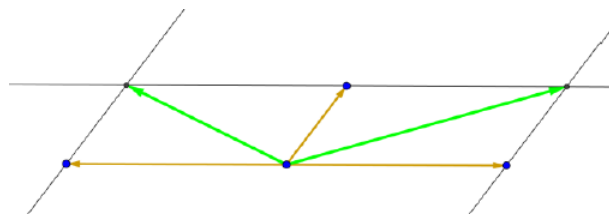
tindrem:

$$m + n + \frac{x}{12} = x \Rightarrow x = \frac{12}{11} (m + n)$$

Octubre 7: Demostreu vectorialment que les bisectrius dels angles que formen los vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ i els vectors $-\vec{u}$ i $\vec{v}$ son perpendiculars.

Nivell: segon de batxillerat.

Solució:



Realitzant el producte escalar:

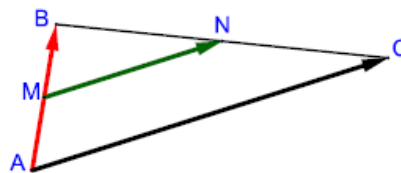
$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (-\vec{u} + \vec{v}) = -\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 =$$

Per a que siguin las bisectrius hem d'imposar la condició: $|\vec{u}| = |\vec{v}|$

Amb el que el producte escalar anterior es igual a zero.

Octubre 9: Proveu vectorialment, que, si M i N són els punts mitjans dels segments AB i BC, aleshores:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$$



Nivell: Segon de batxillerat.

Solució:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$$

Octubre 10: En la cartera tenim un bitllet de cadascun dels següents valors: 5 €, 10 €, 20 €, 50 € i 100 €. Quantes quantitats de diners diferents podem formar?

Nivell: A partir de 4ESO.

Solució: Tindrem

Quantitats que es poden generar amb un únic bitllet = $C_1^5 = 5$

Quantitats que es poden generar amb dos bitllets = $C_2^5 = 10$

Quantitats que es poden generar amb tres bitllets = $C_3^5 = 10$

Quantitats que es poden generar amb quatre bitllets = $C_4^5 = 5$

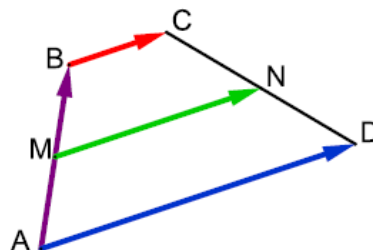
Quantitats que es poden generar amb cinc bitllets = $C_5^5 = 1$

Hi han un total de 31 quantitats diferents que es poden generar amb eixos bitllets.

També es pot fer un diagrama d'arbre.

Octubre 11: Si $BC \parallel AD$ i M i N són els punts mitjans d'AB i CD, demostreu vectorialment que

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

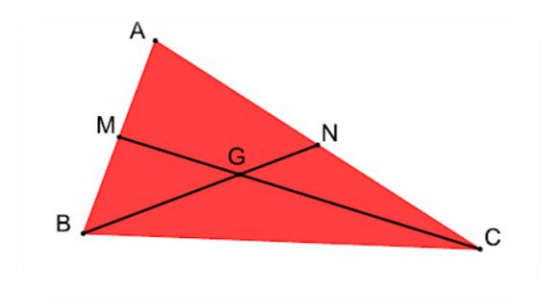


Nivell: Segon de batxillerat.

Solució: Tenim:

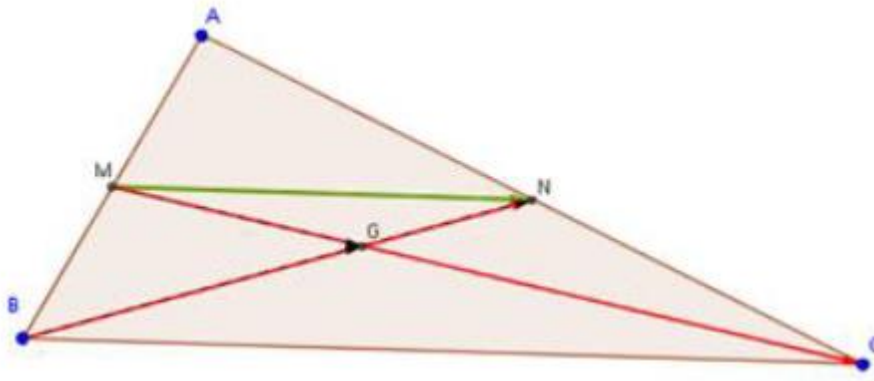
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

Octubre 12-13: Sigui G el baricentre d'un triangle, demostreu vectorialment que G divideix cada mediana en la relació 2:1



Nivell: Segon de batxillerat.

Solució:



Siguen M i N els punts mitjans dels costats AB i AC . Per el teorema de la paral·lela mitjana es compleix: $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$. Com $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GN}$ y $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC}$ tenim:

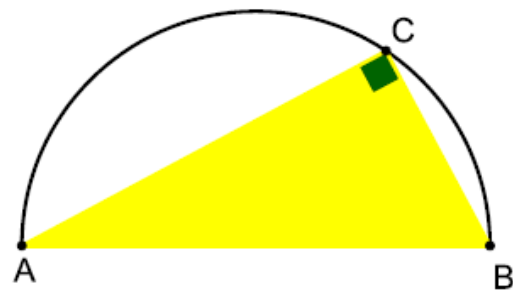
$$\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GN} \Rightarrow (\overrightarrow{BG} - 2\overrightarrow{GN}) + (\overrightarrow{GC} - 2\overrightarrow{MG}) = \vec{0}$$

Per altra part, tenim $\overrightarrow{BG} \parallel \overrightarrow{GN}$ ($\overrightarrow{GC} \parallel \overrightarrow{MG}$) i per tant els vectors són proporcionals. Si $\overrightarrow{BG} = \alpha \overrightarrow{GN}$ i $\overrightarrow{GC} = \beta \overrightarrow{MG}$ tenim:

$$(\alpha - 2)\overrightarrow{GN} + (\beta - 2)\overrightarrow{MG} = \vec{0}$$

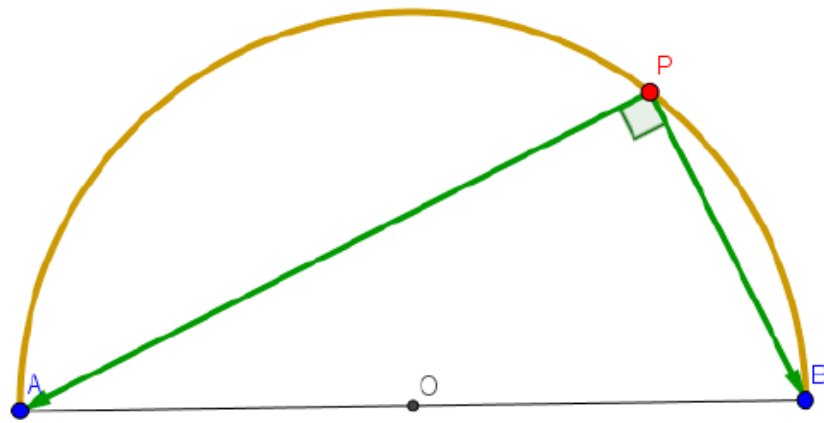
Per últim, com $\overrightarrow{GN}$ i $\overrightarrow{MG}$ no són paral·lels, arribem a $\alpha = 2$ i $\beta = 2$

Octubre 14: Demostreu vectorialment que l'angle inscrit en una semicircumferència és recte



Nivell: Segon de batxillerat.

Solució: Tenim:



$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB}) = |\overrightarrow{PO}|^2 + \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} =$$

$$r^2 + \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{PO} \cdot (-\overrightarrow{OB}) + r^2 \cos 180^\circ = r^2 - r^2 = 0$$

Octubre 15: En un tronc de con, la generatriu és el doble del radi de la base gran. Si l'àrea lateral és 54 cm² i la total és 78 cm², quin és seu volum?

Nivell: A partir de 4ESO.

Solució: Tenim:

$$\begin{aligned} V &= \frac{h}{3} (B + b + \sqrt{Bb}) \\ B &= \pi R^2 \\ b &= \pi r^2 \\ A_L &= 54 = \pi(R + r)g \Rightarrow 54 = \pi(R + r)2R \Rightarrow R + r = \frac{27}{\pi R} (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_T - A_L &= B + b \Rightarrow 24 = \pi R^2 + \pi r^2 \\ 27 &= \pi R^2 + \pi r R (*) \\ 24 &= \pi R^2 + \pi r^2 \end{aligned}$$

Les dues últimes equacions formen un sistema amb dues incògnites. Restant les dues equacions:

$$3 = \pi Rr - \pi r^2 \Rightarrow R = \frac{3 + \pi r^2}{\pi r}$$

Substituint en (*)

$$\begin{aligned} \frac{3 + \pi r^2}{\pi r} + r &= \frac{27\pi r}{\pi(3 + \pi r^2)} \\ \frac{3 + \pi r^2 + \pi r^2}{\pi r} &= \frac{27r}{(3 + \pi r^2)} \\ (3 + 2\pi r^2)(3 + \pi r^2) &= 27\pi r^2 \\ 9 + 9\pi r^2 + 2\pi^2 r^4 &= 27\pi r^2 \\ 2\pi^2 r^4 - 18\pi r^2 + 9 &= 0 \end{aligned}$$

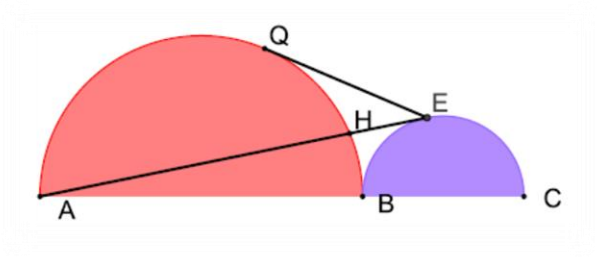
$$r^2 = \frac{18\pi \pm \sqrt{252\pi^2}}{4\pi^2} = \frac{9 \pm 3\sqrt{7}}{2\pi}$$

$$h = \sqrt{g^2 - (R-r)^2} = \sqrt{(2R)^2 - (R-r)^2} = \sqrt{3R^2 + 2Rr - r^2}$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{9+3\sqrt{7}}{2\pi}} = 1,64184 \implies h_1 = \sqrt{\frac{69-3\sqrt{7}}{\pi}} = 4,408727 \implies V_1 = 52,12383379 \text{ cm}^3$$

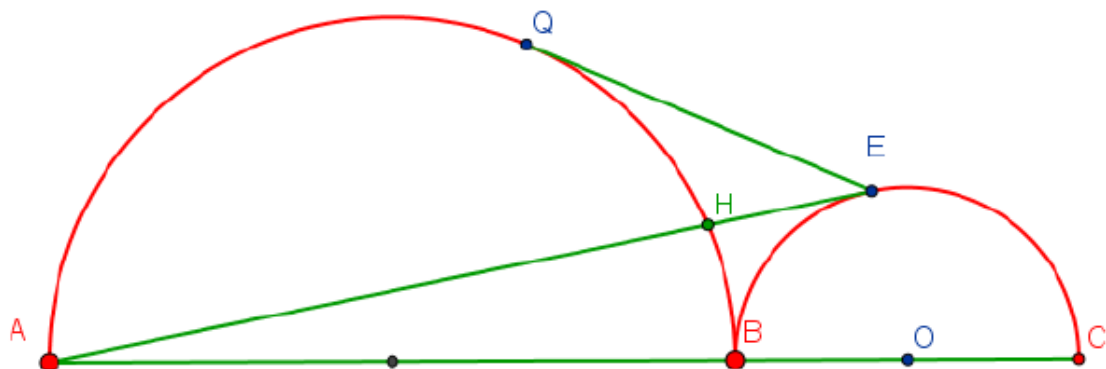
$$r_2 = \sqrt{\frac{9-3\sqrt{7}}{2\pi}} = 0,41126 \implies h_2 = 4,94873 \implies V_2 = 45,4150734 \text{ cm}^3$$

Octubre 16-17: En la figura, els segments AB i BC són diàmetres tals que AB és doble que BC. El segment AE és tangent en E i EQ és tangent en Q. Si $HE = \sqrt{5}$, calculeu EQ



Nivell: A partir de 4ESO.

Solució 1: Tenim:



Els triangles $\triangle AHB$ i $\triangle AEO$ són semblants ja que tenen en comú l'angle $\angle A$ i són rectangles en H (al ser AB un diàmetre) i en E (al ser la tangent perpendicular al radi en una circumferència). Per tant:

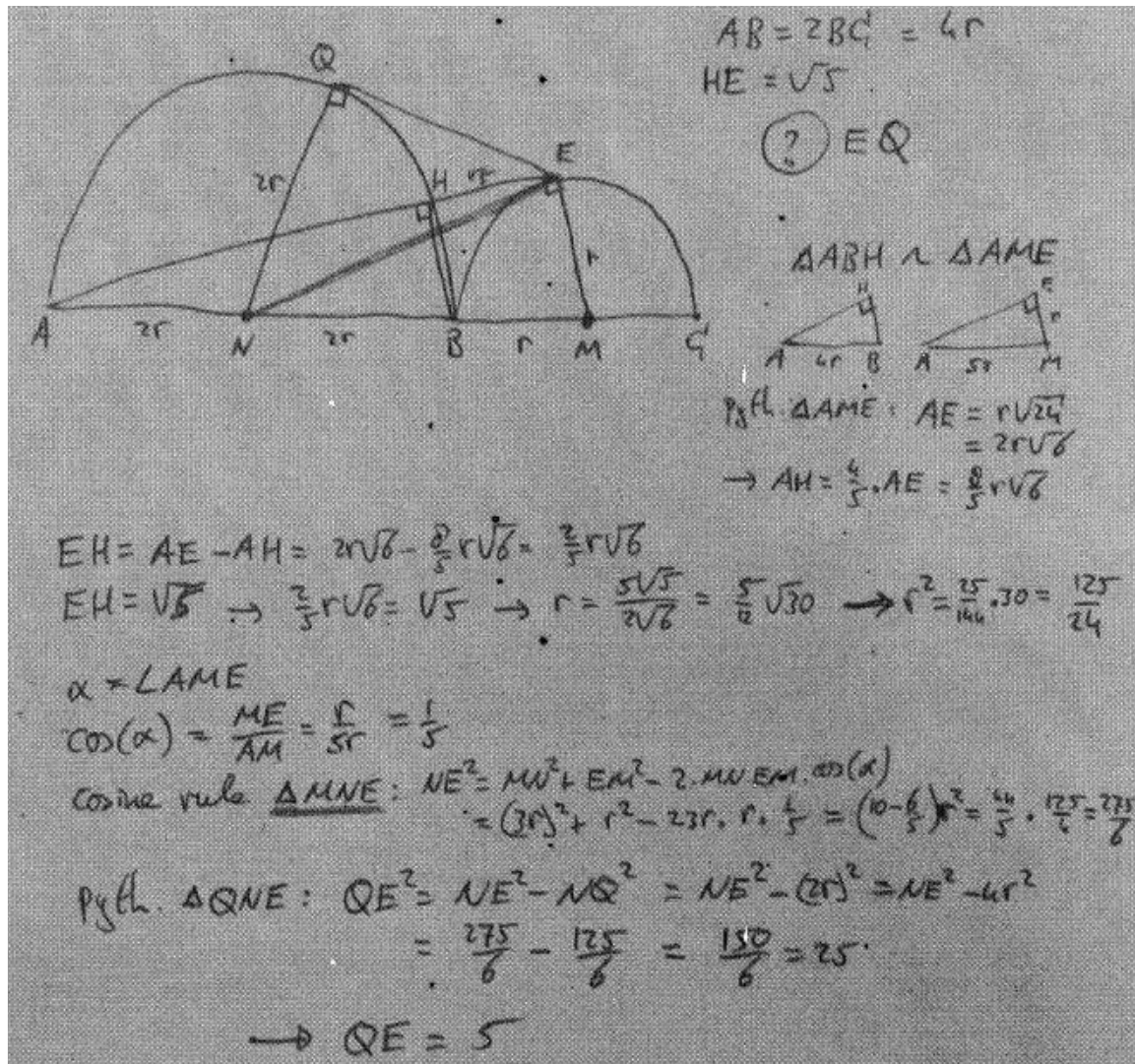
$$\frac{AH}{AB} = \frac{HE}{BO}$$

$$BO = r$$

$$AB = 2R = 4r$$

$$AH = \frac{AB}{BO} HE = \frac{4r}{r} \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

I ara per el teorema de la tangent: $QE^2 = AE \cdot HE \implies QE^2 = (4\sqrt{5} + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{5} = 25 \implies QE = 5$

Solució 2: Henk Reuling @HenkReuling


Octubre 18: Tres jugadors llancen un dau. A llança 1 vegada, B llança 2 vegades i C llança 3 vegades y després el cicle es repeteix. Guanya el que aconsegueix 6 per primera vegada. Quina probabilitat té cada jugador de guanyar?

Nivell: A partir de 4ESO.

Solució: Representem per A_i (B_i , C_i) l'esdeveniment "el jugador A (B, C) trau un sis en el seu i-esim llançament". Aleshores l'esdeveniment "el jugador A guanya" podem escriure-ho com:

$$A_1 \cup (\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3} \cap A_2) \cup \dots$$

La probabilitat del qual és, al tractar-se de la unió d'esdeveniments disjunts i al estar format cada esdeveniment per la intersecció d'esdeveniments independents:

$$\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^{12} \cdot \frac{1}{6} + \dots$$

Que és la suma de tots els termes d'una PG de primer terme $\frac{1}{6}$ i raó $r = \left(\frac{5}{6}\right)^6$. Amb el que:

$$P(\text{guanya A}) = \left\{ \frac{a_1}{1-r} \right\} = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6} = \frac{6^5}{6^6 - 5^6} = \frac{7776}{31031}$$

Per a el jugador B tenim, l'esdeveniment B guanya el podem escriure com:

$$(\overline{A_1} \cap B_1) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap B_2) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3} \cap \overline{A_2} \cap B_3) \\ \cup (\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3} \cap \overline{A_2} \cap \overline{B_3} \cap B_4) \cup \dots$$

I ja que es tracta de la unió d'esdeveniments disjunts i cadascun d'ells està format per esdeveniments independents, la seua probabilitat és:

$$\frac{5}{6} \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \frac{1}{6} + \dots$$

Els sumands imparells són la suma dels membres d'una PG de primer terme $\frac{5}{6} \frac{1}{6}$ i raó $r = \left(\frac{5}{6}\right)^6$, mentre que els sumands parells són els membres d'una PG de primer terme $\left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6}$ i la mateixa raó. Per tant:

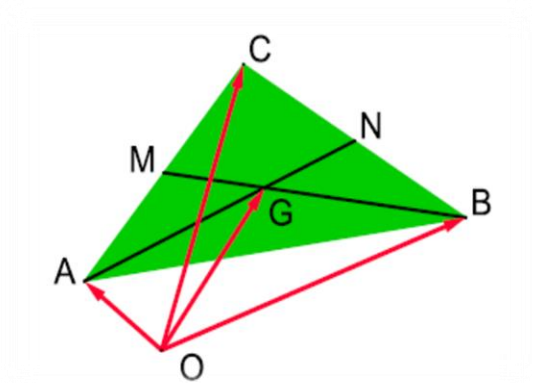
$$P(\text{guanyar B}) = \frac{\frac{5}{6} \frac{1}{6}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6} + \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6} = \frac{6480}{31031} + \frac{5400}{31031} = \frac{11880}{31031}$$

Per al jugador C, podem procedir de la mateixa forma (ara sortiran tres PG convergents) o més senzillament:

$$P(\text{guanyar C}) = 1 - P(\text{guanyar A}) - P(\text{guanyar B}) = 1 - \frac{7776}{31031} - \frac{11880}{31031} = \frac{11375}{31031}$$

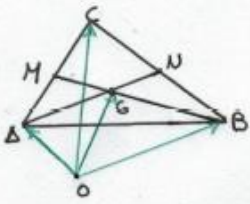
Octubre 19-26: Siga donat un triangle de vèrtexs A, B i C. Siga G el seu baricentre i O un punt extern al triangle. Demostreu que

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$



Nivell: Segon de batxillerat.

Solució de Maria Alonso (INS "Pont de Suert"):



$$\begin{aligned} \Delta &= (x_1, y_1) & G &= (g_1, g_2) & M &= \frac{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)}{2} \\ B &= (x_2, y_2) & \vec{AG} &= \frac{2}{3} \vec{AN} \\ C &= (x_3, y_3) & N &= \frac{(x_2, y_2) + (x_3, y_3)}{2} \end{aligned}$$

$$\vec{AG} = \frac{2}{3} \vec{AN} = \frac{2}{3} (N - \Delta) = \frac{2}{3} \left[\frac{(x_2 + x_3, y_2 + y_3)}{2} - \frac{2(x_1, y_1)}{2} \right]$$

$$N - \Delta = \frac{(-2x_1 + x_2 + x_3, -2y_1 + y_2 + y_3)}{3}$$

$$\vec{AG} = (g_1, g_2) - (x_1, y_1) = \frac{(-2x_1 + x_2 + x_3, -2y_1 + y_2 + y_3)}{3}$$

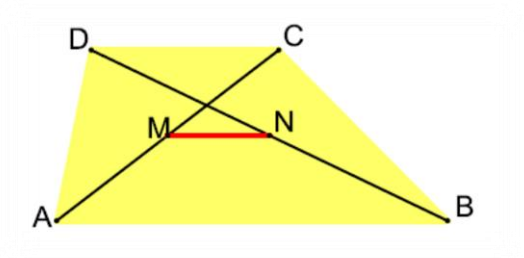
$$(g_1, g_2) = \frac{(x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)}{3} - \text{O}$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

$$G - \text{O} = \frac{(x_1, y_1) + (x_2, y_2) + (x_3, y_3)}{3} - \text{O}$$

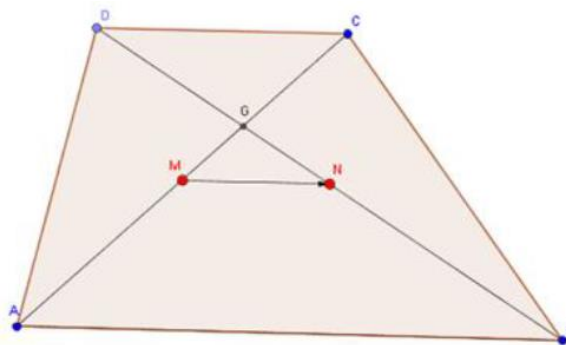
$$\frac{(x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)}{3} - \text{O} = \frac{(x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)}{3} - \text{O}$$

Octubre 20-21: Demostreu vectorialment que el segment que uneix els punts mitjans de les diagonals de un trapezi es paral·lel a les bases. Trobeu la longitud de eixe segment



Nivell: Segon de batxillerat.

Solució:



Tenim:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} & \overrightarrow{NB} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \\ \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GN} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DG} - \overrightarrow{NB}) \\ &= \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} - (\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GC}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}\end{aligned}$$

Però:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$$

Amb el que:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})\end{aligned}$$

Però, al tractar-se d'un trapezi les bases són paral·leles, per tant $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ són proporcionals

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \alpha\overrightarrow{AB}) = \frac{1-\alpha}{2}\overrightarrow{AB} = \beta\overrightarrow{AB}$$

Per tant, $\overrightarrow{MN}$ i $\overrightarrow{AB}$ són proporcionals i d'ací el segment MN es paral·lel a las bases i la seua longitud es la semidiferència d'elles.

Octubre 22: Demostreu que tot imparell que no es múltiple de 3 es de la forma $6m \pm 1$ (m enter)

Nivell: Preparació OME

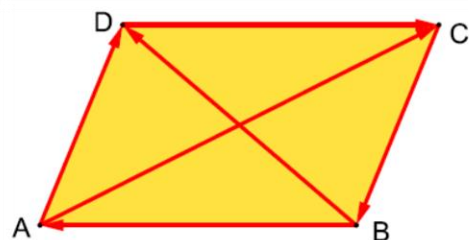
Solució: Siga $n = 2k + 1$ (con k enter). Si n no és múltiple de 3 dona residu 1 o residu 2 al dividir-lo per 3.

Si $n = 3h + 1$, tindrem: $3h + 1 = 2k + 1 \Rightarrow 3h = 2k \Rightarrow k$ conté al factor 3 (per la unicitat de la descomposició factorial en producte de primers) $\Rightarrow k$ es múltiple de 3 $\Rightarrow k = 3m \Rightarrow n = 2k + 1 = 2(3m) + 1 = 6m + 1$

Si $n = 3h + 2$, tindrem: $3h + 2 = 2k + 1 \Rightarrow 3h + 3 = 2k + 2 \Rightarrow 3(h + 1) = 2(k + 1) \Rightarrow k + 1$ conté al factor 3 $\Rightarrow k + 1$ és múltiple de 3 $\Rightarrow k + 1 = 3m \Rightarrow k = 3m - 1 \Rightarrow n = 2k + 1 = 2(3m - 1) + 1 = 6m - 2 + 1 = 6m - 1$.

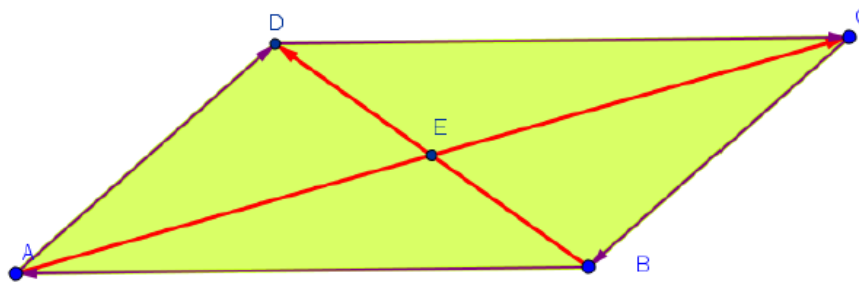
Octubre 23-30: Siga donat un quadrilàter ABCD.

Demostreu vectorialment que el quadrilàter és un paral·lelogram si i sols si les diagonals bissequen



Nivell: Segon de batxillerat.

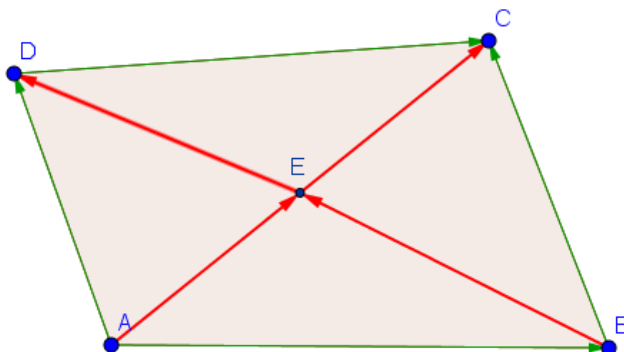
Solució:



Estem davant d'un paral·lelogram. Aleshores: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (*) i $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Com $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}$ y $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC}$, en (*) tenim: $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC}$. Per el que: $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{BE} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{EC} = \alpha \overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{BE} = \beta \overrightarrow{ED} \end{cases} \Rightarrow (1 - \alpha)\overrightarrow{AE} + (1 - \beta)\overrightarrow{ED} = \vec{0}$, i com $\overrightarrow{AE}$ i $\overrightarrow{ED}$ són

linealment independents $\alpha = \beta = 1 \Rightarrow \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{ED}$



Ara, per hipòtesi: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Tindrem:

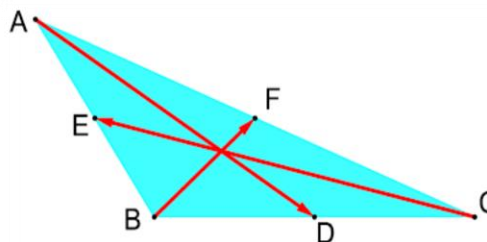
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AD}$$

Per tant, $AB \parallel DC$ i $BC \parallel AD$. Es a dir, ABCD es un paral·lelogram.

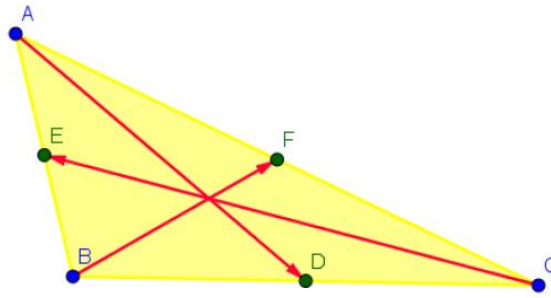
Octubre 24-25: Siguen $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ els vectors amb inici un vèrtex del triangle i final el punt mitjà del costat oposat. Demostreu que:

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$$



Nivell: Segon de batxillerat.

Solució:



Tenim per hipòtesi:

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \quad \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{FA} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CA}$$

Amb el que:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CE} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}) + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE}) = \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BD}) = \\ \overrightarrow{AA} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}) &= \overrightarrow{AA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AA} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \end{aligned}$$

Octubre 27-28: Resoleu:

$$|x - 2| + |x - 1| + |x| + |x + 1| + |x + 2| = x^2 - 4$$

Nivell: A partir de 4ESO.

Solució: Al ser no negatiu el primer membre, deu ser no negatiu el segon membre. Per tant, $x^2 - 4$ deu ser no negatiu. D'on $x \leq -2$ o $x \geq 2$.

Si $x \leq -2$ tenim: $-(x - 2) - (x - 1) - x - (x + 1) - (x + 2) = x^2 - 4 \Rightarrow$

$$x^2 + 5x - 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5 + \sqrt{41}}{2}$$

Si $x \geq 2$ tenim: $x - 2 + x - 1 + x + x + 1 + x + 2 = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 - 5x - 4 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{5 + \sqrt{41}}{2}$$

Octubre 29: Per què

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

no és un decimal exacte?

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Recordem que una fracció irreductible és un decimal exacte si els factors primers del denominador són 2 i/o 5. Per a les fraccions donades tenim:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2) + n \cdot (n+2) + n \cdot (n+1)}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = \frac{3n^2 + 6n + 2}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$$

En la última fracció el numerador no és divisible per n ni per $n + 1$ ni per $n + 2$. D'ací que l'última fracció siga irreductible. Per últim, el denominador conté al menys al factor 3 ja que de tres naturals consecutius un és múltiple de tres i per tant no serà un decimal exacte.

Octubre 31: Quants naturals menors que 10000 són múltiples de 4, 10 o 14?

Nivell: Preparació OME.

Solució: Recordem que si $|A|$ representa el nombre d'elements del conjunt A tenim

1. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
2. $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.
3. Si partim dels primers n naturals i A és el conjunt de múltiples de k menors o iguals a n : $|A| = \lfloor n/k \rfloor$ on $\lfloor x \rfloor$ representa la part entera de x

La demostració de 1 es prou simple. Per a 2 tenim:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - \\ &|(A \cap C) \cup (B \cap C)| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap C \cap B \cap C|) = |A| + \\ &|B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

Si A (B , C) son els múltiples de 4 (10, 14) menors de 10000 tenim:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = \lfloor 10000/4 \rfloor + \lfloor 10000/10 \rfloor \\ &+ \lfloor 10000/14 \rfloor - \lfloor 10000/\text{mcm}(4, 10) \rfloor - \lfloor 10000/\text{mcm}(4, 14) \rfloor - \lfloor 10000/\text{mcm}(10, 14) \rfloor + \\ &\lfloor 10000/\text{mcm}(4, 10, 14) \rfloor = 2500 + 1000 + 714 - 500 - 357 - 142 + 71 = 3286 \end{aligned}$$