

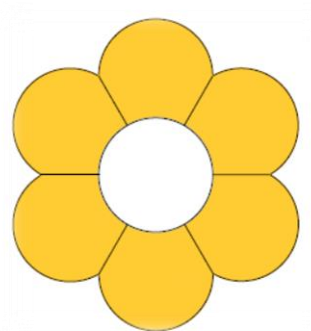
SOLUCIONS NOVEMBRE 2017

AUTOR: Ricard Peiró i Estruch. IES "Abastos". València

Novembre 1-2: El cor de la flor és un cercle de radi 1.

El contorn exterior dels pètals són semicercles tal que els centres són els punts migs dels costats d'un hexàgon regular inscrit en un cercle de radi 2.

Calculeu l'àrea total que formen els pètals (la regió ombrejada).



Nivell: A partir de 3ESO

Solució:

Siga O el punt central de la flor.

Siga $\overline{OP} = 1$ radi del centre de la flor.

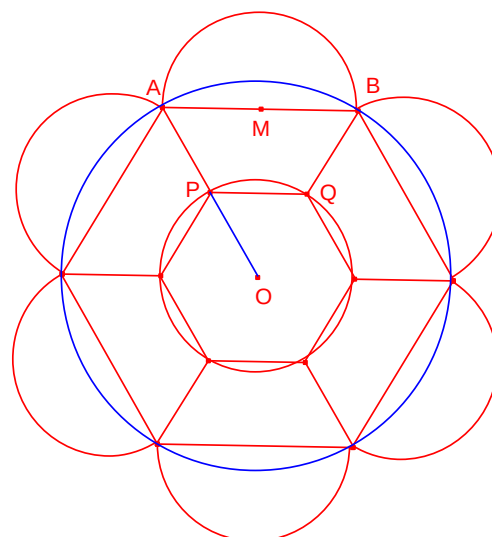
Siga $\overline{AB} = 2$ costat de l'hexàgon inscrit en el cercle de radi 2.

$\overline{OA} = 2$.

Els semicercles exteriors dels pètals tenen radi 1.

L'àrea de la zona ombrejada és igual a l'àrea d'un hexàgon de costat 2, més 2 cercles de radi 1.

$$S_{\text{pètals}} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 - 2 \cdot \pi \cdot 1^2 = 6\sqrt{3} - 2\pi$$

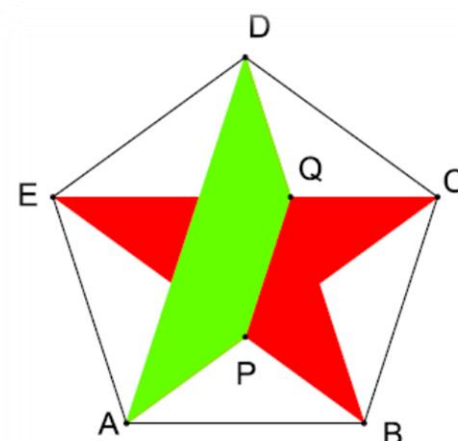


Novembre 3-4: Siga ABCDE un pentàgon regular.

Siga P la intersecció de $\overline{AC}$ i $\overline{BE}$.

Siga Q la intersecció de $\overline{BD}$ i $\overline{CE}$.

Determineu la proporció entre les àrees del quadrilàter APQD i el polígon estelat ACEBD.



Nivell: A partir de 3ESO

Solució:

Siga X l'àrea del triangle $\triangle APS$.

Els triangles $\triangle APS$, $\triangle QPS$ són iguals.

Siga $Y = \frac{1}{\phi} X$ l'àrea del triangle $\triangle QRS$.

L'àrea del pentàgon estrellat ACEBD és:

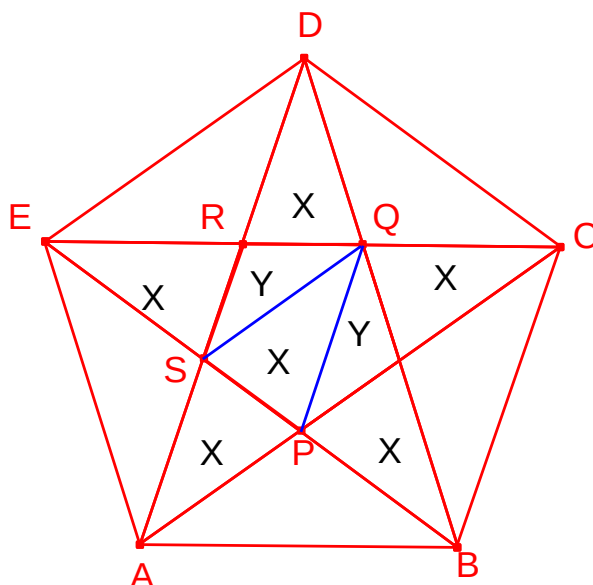
$$S_{ACEBD} = 6X + 2Y.$$

L'àrea del quadrilàter APQD és:

$$S_{APQD} = 3X + Y.$$

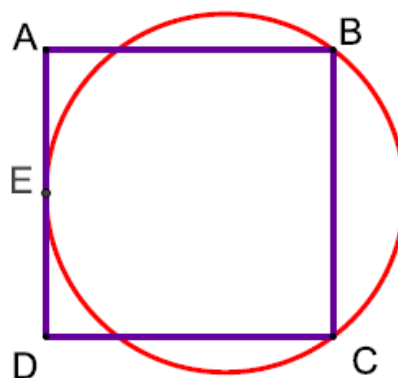
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{APQD}}{S_{ACEBD}} = \frac{1}{2}.$$



Novembre 5: En la figura ABCD és un quadrat i E és el punt mig del costat $\overline{AD}$.

Determineu quin perímetre és major el del quadrat o el de la circumferència que passa pels punts B, C, E.



Nivell: A partir de 3ESO

Solució 1:

Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = 1$.

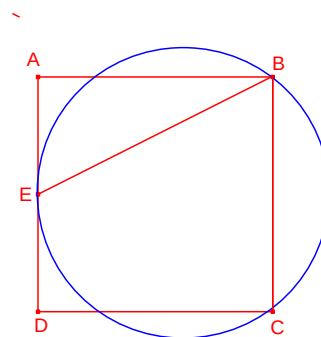
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ABE$:

$$\overline{BE} = \overline{CE} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Siga R el radi de la circumferència circumscripita al triangle $\triangle BCE$.

L'àrea del triangle $\triangle BCE$ és la meitat de l'àrea del quadrat:

$$S_{BCE} = \frac{1}{2} = \frac{\overline{BE} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CE}}{4R}, \quad \frac{1}{2} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}}{4R}.$$



Resolent l'equació: $R = \frac{5}{8}$. El perímetre del quadrat és: $P_{ABCD} = 4$. El perímetre de la circumferència és:

$P_{\text{circumf}} = 2\pi \frac{5}{8} = \frac{5\pi}{4} \approx 3.92$. Aleshores, el perímetre del quadrat és major que el perímetre de la circumferència

Solució 2:

Siga O el centre de la circumferència. O és la intersecció de les mediatrises als segments $\overline{BE}$ i $\overline{BC}$. Siga $\overline{OE} = R$ radi de la circumferència. Siga M el punt mig del segments $\overline{BE}$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ABE$:

$$\overline{BE} = \overline{CE} = \frac{\sqrt{5}}{2}. \quad \overline{EM} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Els triangles rectangles $\triangle BAE$, $\triangle EMO$ són semblants. Aplicant el

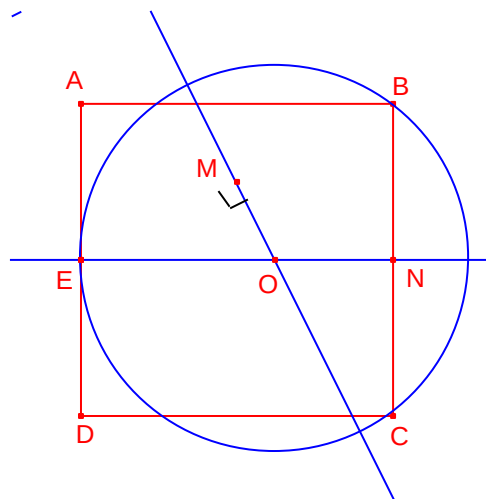
teorema de Tales: $\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{4}} = \frac{3}{R}$.

Resolent l'equació: $R = \frac{5}{8}$. El perímetre del quadrat és: $P_{ABCD} = 4$. El perímetre de la circumferència és:

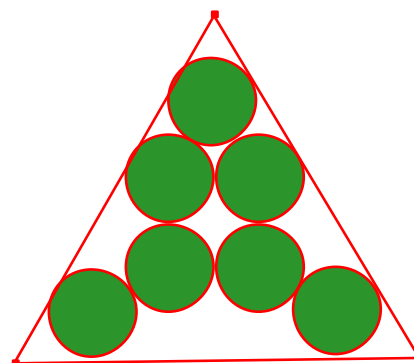
$$P_{\text{circumf}} = 2\pi \frac{5}{8} = \frac{5\pi}{4} \approx 3.92.$$

Aleshores, el perímetre del quadrat és major que el perímetre de la circumferència. Sense calculadora:

$$\frac{P_{\text{circumf}}}{P_{ABCD}} = \frac{5\pi}{16} < \frac{5}{16} \frac{22}{7} < 1.$$

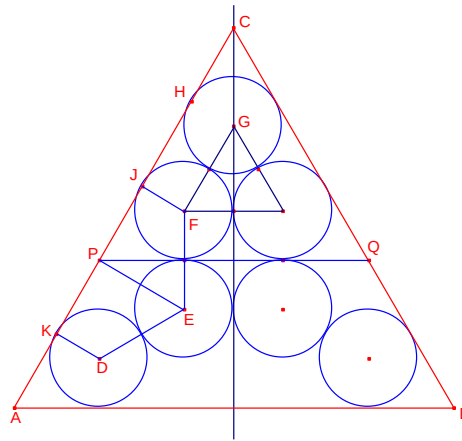


Novembre 6: En el triangle equilàter de costat 1 s'han inscrit 7 cercles iguals i tangents dos a dos. Trobeu el seu radi



Nivell: A partir de 3ESO

Solució:



Siga $\triangle ABC$ el triangle equilàter de costat 1. Siga r el radi de les set circumferències. Siguen D, E, F, G centres de tres circumferències. Siguen H, J i K punts de tangència.

$$\angle GFE = \angle HDE = 120^\circ.$$

$$\angle HGF = \angle GHD = 90^\circ.$$

$$\overline{FG} = \overline{FE} = \overline{DE} = 2r.$$

$$\overline{AK} = \overline{CH} = \overline{PJ} = \overline{PK} = r\sqrt{3}.$$

$$\overline{HJ} = \overline{FE} = 2r.$$

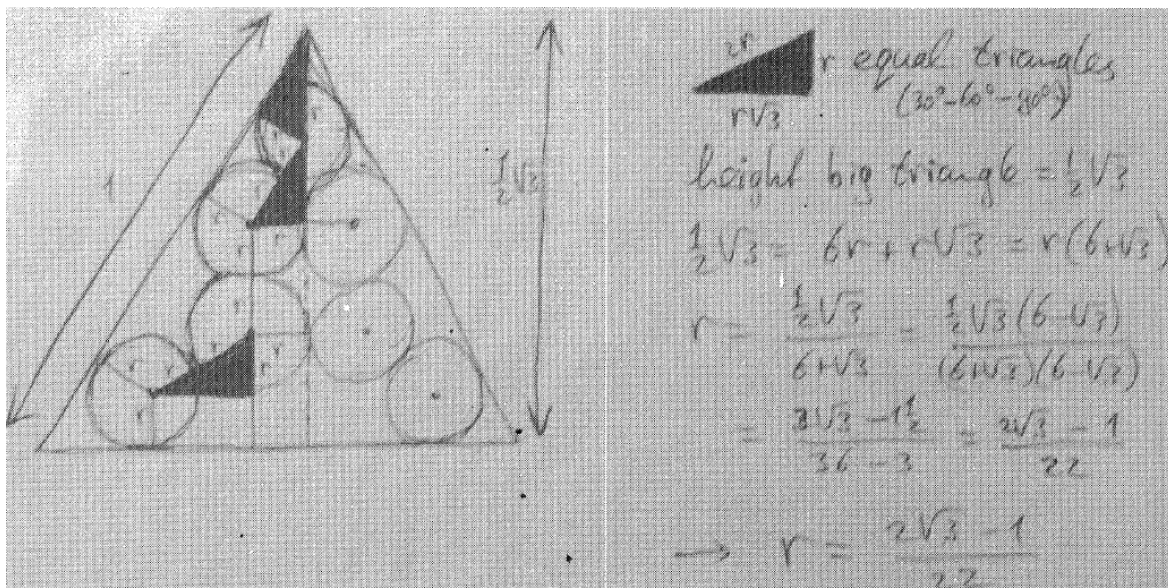
$$\overline{AC} = 4\overline{AK} + \overline{HJ}.$$

$$1 = 4r\sqrt{3} + 2r.$$

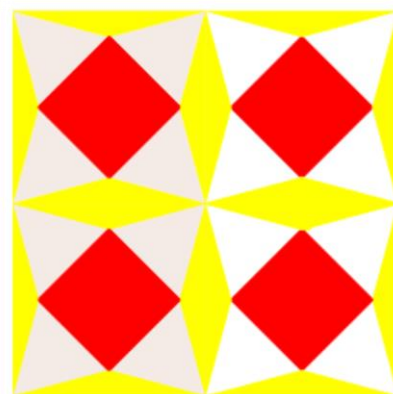
Resolent l'equació:

$$r = \frac{1}{4\sqrt{3} + 2} = \frac{2\sqrt{3} - 1}{22} \approx 0.112005.$$

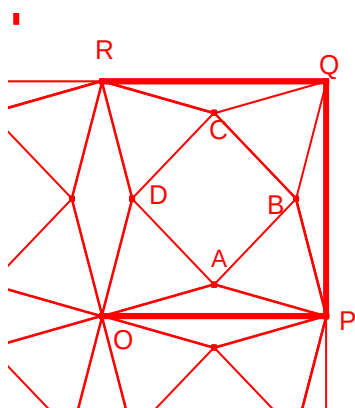
Solució 2 (Henk Reuling @Henk Reuling):



Novembre 7-8: A la rajola adjunta els quadrilàters vermells són quadrats i els grocs rombes; els triangles blancs són equilàters i els grocs isòsceles. Trobar la raó d'àrees de la zona vermella i groga



Nivell: A partir de 4ESO



Solució: Considerem els quadrats OPQR, ABCD i el triangle equilàter $\triangle ABP$.

La proporció que mantenen els quatre quadrats vermells i la zona groga és igual a la proporció entre un quadrat vermell i quatre triangles $\triangle OAP$.

Siga $\overline{AB} = c$.

$$\angle OAP = 150^\circ = 360^\circ - (60^\circ + 60^\circ + 90^\circ)$$

L'àrea del triangle $\triangle OAP$ és:

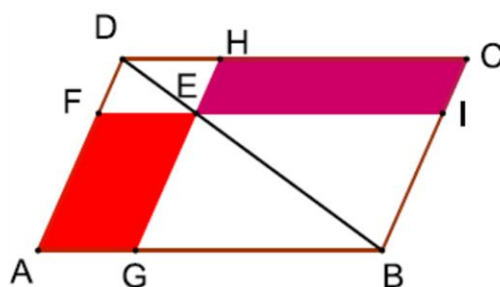
$$S_{\triangle OAP} = \frac{c \cdot c \cdot \sin(150^\circ)}{2} = \frac{c^2}{4}$$

La proporció entre les àrees pintades de roig i les pintades de groc és:

$$\frac{S_{ABCD}}{4 \cdot S_{\triangle OAP}} = \frac{c^2}{4 \cdot \frac{c^2}{4}} = 1$$

Les dos zones tenen la mateixa àrea.

Novembre 9-10: Proposició 1.43: En qualsevol paral·lelogram el complement dels paral·lelograms construïts sobre un punt de la diagonal tenen la mateixa àrea

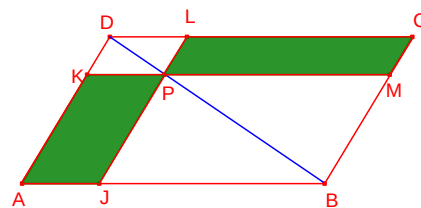


Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Siga ABCD un paral·lelogram. Siga P un punt de la diagonal DB. Pel punt P tracem paral·leles als costats del paral·lelogram formant-se els paral·lelograms AJPK i PMCL.

Els triangles $\triangle ABD$ i $\triangle CDB$ són iguals, i, per tant, tenen la mateixa àrea. Els triangles $\triangle KPD$ i $\triangle LDP$ són iguals, i, per tant, tenen la mateixa àrea. Els triangles $\triangle JBP$ i $\triangle MPB$ són iguals, i, per tant, tenen la mateixa àrea.

$$S_{AJPK} = S_{ABD} - (S_{KPD} + S_{JBP}) = S_{CDB} - (S_{LDP} + S_{MPB}) = S_{PMCL}$$



Novembre 11: El costat del quadrat gran mesura 10 cm. Sobre la seua diagonal es dibuixen 4 quadrats. Trobeu el radi dels cercles tangents

Nivell: A partir de 4ESO.

Solució: Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c = 10$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle DAB$:

$$\overline{BD} = c\sqrt{2}$$

Siga L el centre del quadrat JPMN. Siga K el punt mitja del costat $\overline{PJ}$.

Notem que $\overline{DK} = \overline{KL} = \overline{PK}$, i aleshores:

$\overline{BD} = 10 \cdot \overline{DK}$, Per tant:

$$\overline{DK} = \frac{c}{10} \sqrt{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle DKP$:

$$\overline{DP} = \overline{DK} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{5} c.$$

$$\overline{AP} = c - \frac{1}{5} c = \frac{4}{5} c.$$

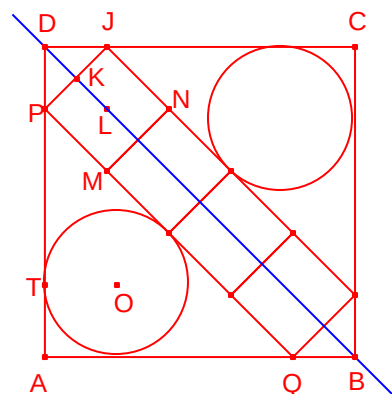
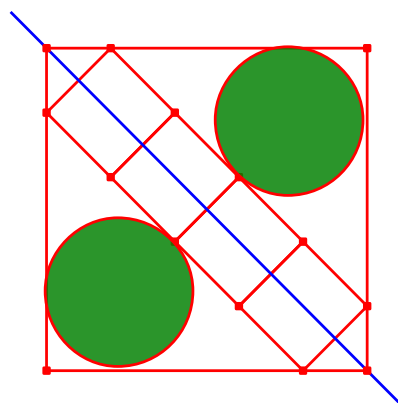
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle PAQ$:

$$\overline{PQ} = \overline{AP} \cdot \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{5} c.$$

Siga $\overline{OT} = r$ el radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\triangle PAQ$.

$$r = \frac{2\overline{AP} - \overline{PQ}}{2} = \frac{\frac{8}{5}c - \frac{4\sqrt{2}}{5}c}{2} = \frac{2}{5}(2 - \sqrt{2})c.$$

Si $c = 10$, $r = 4(2 - \sqrt{2}) \approx 2.34\text{cm}$



Novembre 12: Calcular la proporció entre les àrees del quadrilàter interior i el quadrat exterior

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: L'àrea del quadrat exterior és:

$$S_{\text{quadrat}} = (a + b)^2$$

L'àrea de la superfície del quadrat exterior al quadrilàter està formada per 4 triangles rectangles. La seua àrea és:

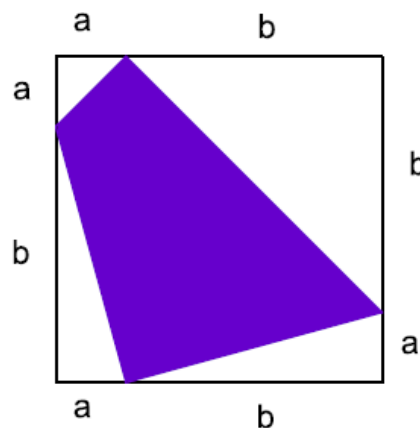
$$S_{\text{ext}} = \frac{1}{2}a^2 + 2\left(\frac{1}{2}ab\right) + \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2)$$

L'àrea del quadrilàter ombrejat és:

$$S_{\text{quadrilàter}} = S_{\text{quadrat}} - S_{\text{ext}} = (a + b)^2 - \frac{1}{2}(a + b)^2 = \frac{1}{2}(a + b)^2$$

La proporció entre les àrees del quadrilàter ombrejat i el quadrat és:

$$\frac{S_{\text{quadrilàter}}}{S_{\text{quadrat}}} = \frac{1}{2}$$



Novembre 13-14: En la figura es mostra un pentàgon regular

ABCDE inscrit en un triangle equilàter MNP. Trobeu la mesura de

l'angle $\angle CMD$

Nivell: A partir de 2ESO.

Solució: Per simetria $\overline{BE} = \overline{CE} = \overline{ME}$.

D'on, el triangle $\triangle MCE$ es isòsceles. $\angle BEC = 36^\circ$.

I, per tant:

$$\angle MEC = 36^\circ + 60^\circ = 96^\circ.$$

$$\angle CME = \frac{180^\circ - 96^\circ}{2} = 42^\circ.$$

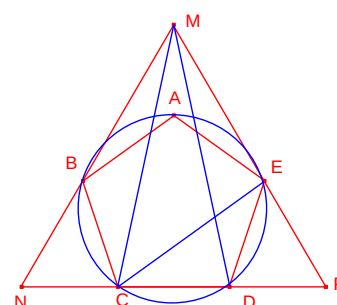
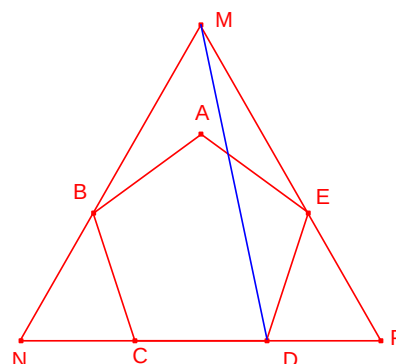
$$\angle CME = \angle BMD.$$

$$\angle CME + \angle BMD = 60^\circ + \angle CMD.$$

$$42^\circ + 42^\circ = 60^\circ + \angle CMD.$$

Resolent l'equació:

$$\angle CMD = 24^\circ.$$



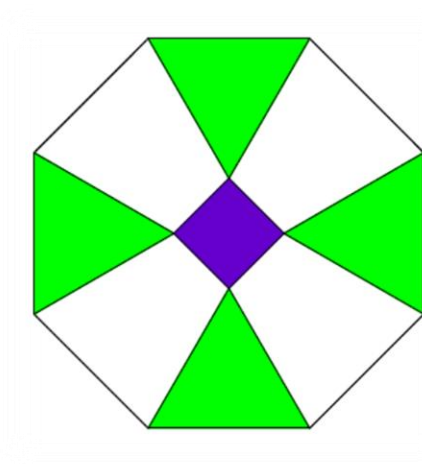
Novembre 15-16: En la figura hi ha un octògon regular de costat c junt amb quatre triangles equilàters (de color verd). Trobeu l'àrea del quadrat determinat per els vèrtexs dels triangles equilàters

Nivell: A partir de 4ESO.

Solució: Siga $ABCDEFGH$ l'octògon regular de costat $\overline{AB} = c$.

Siga $KLMN$ el quadrat format per els vèrtexs dels quatre triangles equilàters.

Siga $x = \overline{KL}$ el costat del quadrat $KLMN$.



$\angle BCD = 135^\circ$ (angle interior de l'octògon regular).

$$\angle LCB = \angle BCD - \angle LCD = 135^\circ - 60^\circ = 75^\circ$$

Siga L' la projecció de L sobre el costat $\overline{BC}$.

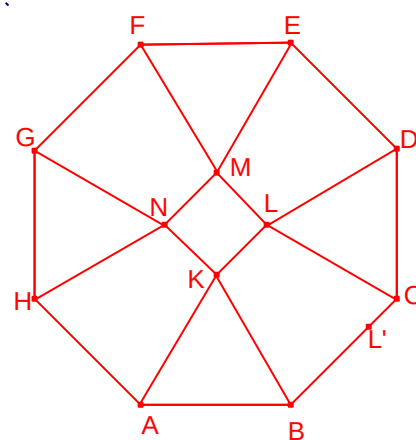
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle LL'C$:

$$\overline{CL'} = c \cdot \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} c.$$

$$x = \overline{KL} = \overline{BC} - 2 \cdot \overline{CL'} = c - 2 \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} c = \frac{2 - \sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} c.$$

L'àrea del quadrat $KLMN$ és:

$$S_{KLMN} = x^2 = \left(\frac{2 - \sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} c \right)^2 = (3 - \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3}) c^2.$$



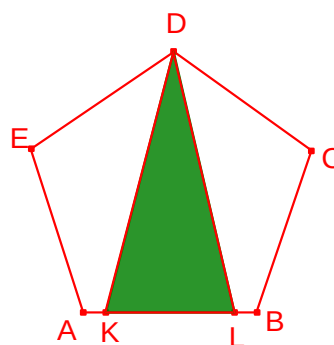
Novembre 17-18: El pentàgon regular $ABCDE$ està dividit en tres parts iguals per els segments DK i DL . Trobeu la mesura del segment KL

Nivell: A partir de 4ESO.

Solució: Tenim:

$$\overline{AK} = \overline{LB}.$$

$$\overline{AB} = 1, \overline{BE} = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$



Transformem el pentàgon regular ABCDE en un triangle isòsceles

$\triangle PQD$ de igual àrea. Procediment:

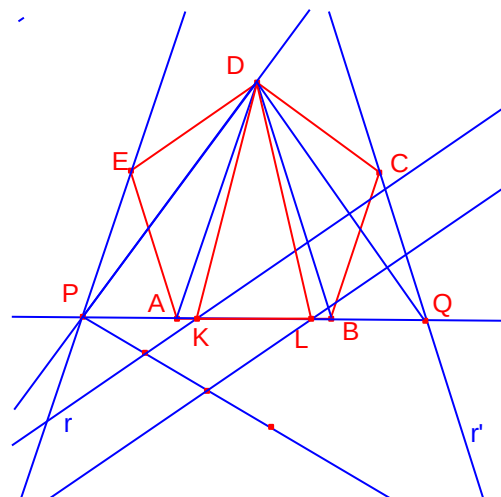
a) Per el punt E tracem una paral·lela r al segment $\overline{AD}$ que talla a la recta AB en el punt P.

Notem que les àrees dels triangles $\triangle ADE$ i $\triangle ADP$ són iguals.

b) Per el punt C tracem una paral·lela r' al segment $\overline{BD}$ que talla a la recta AB en el punt Q.

Notem que les àrees dels triangles $\triangle BCD$ i $\triangle BQD$ són iguals.

Aleshores, les àrees del pentàgon ABCDE i el triangle isòsceles $\triangle PQD$ són iguals.



c) Dividim el segment $\overline{PQ}$ en tres parts iguals.

d) El segment central $\overline{KL}$ és el que busquem.

Notem que $\angle EPA = \angle DAB = 72^\circ$. $\angle PAE = 72^\circ$. D'ací, $\angle PEA = 36^\circ$. $\angle AEB = 36^\circ$. I, per tant,

$\angle PEB = 72^\circ$. D'ací, $\overline{PB} = \overline{BE} = \Phi$. $\overline{PQ} = 2 \cdot \overline{PB} - \overline{AB} = 2\Phi - 1 = \sqrt{5}$. D'on, $\overline{KL} = \frac{1}{3}\overline{PQ} = \frac{1}{3}\sqrt{5}$.

Novembre 19: En la figura $AB = 3$, $BD = 7$, $AD = 8$ i $\angle BCD = 90^\circ$. Trobeu

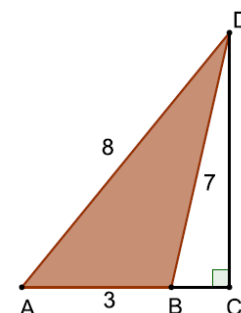
l'àrea del triangle $\triangle BCD$

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Siga $\overline{BC} = x$ i $\overline{CD} = y$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle BCD$:

$$x^2 + y^2 = 7^2.$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ACD$: $(x + 3)^2 + y^2 = 8^2$.

Considerem el sistema format per les dues expressions anteriors:

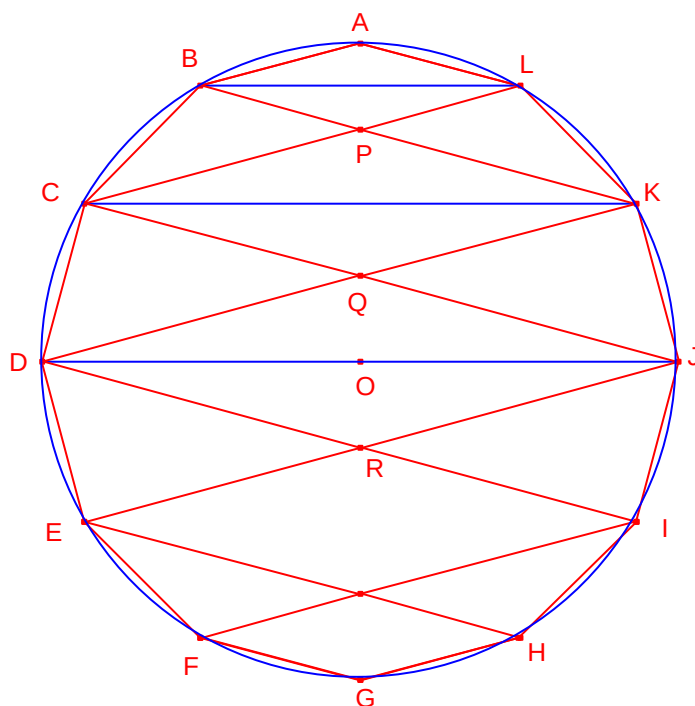
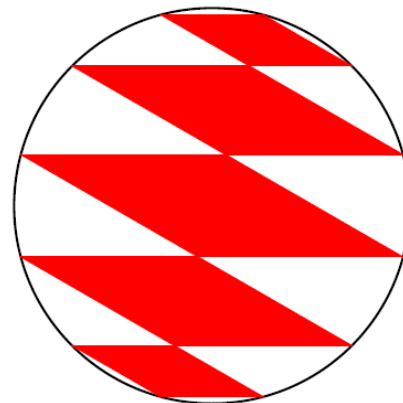
$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 49 \\ (x + 3)^2 + y^2 = 64 \end{array} \right\}$$

Resolent el sistema: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4\sqrt{3} \end{cases}$. L'àrea del triangle $\triangle BCD$ és: $S_{BCD} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

Novembre 20: (KöMaL, 498) Una circumferència està dividida en 12 arcs iguals. Els punts de las divisions se uneixen como indica la figura. Trobeu la raó entre les àrees dels rombes formats.

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució:



Les parts iguals en que està dividida la circumferència formen el dodecàgon regular ABCDEFGHIJKL. Siga $\overline{AB} = c$ el costat del dodecàgon regular, aleshores $\angle ABK = \angle ALC = 30^\circ$.

Per altra banda, ABPL és un rombe de costat a i angles 30° i 150° . $\angle LCJ = \angle BKD = 30^\circ$.

També PCQK es un rombe de costat a i angles 30° i 150° . Els rombes ABPL i PCQK son semblants.

El triangle $\triangle BCP$ es isòsceles amb $\overline{BC} = \overline{BP} = c$, $\angle BCL = 30^\circ$. Per tant, $\overline{CP} = c\sqrt{3}$.

Recordem que si dos figures són semblants les seues àrees són proporcionals amb proporcionalitat el quadrat de la raó de semblança entre les figures:

$$\frac{S_{PCQK}}{S_{ABPL}} = \left(\frac{\overline{CP}}{\overline{AB}} \right)^2 = 3.$$

Per altra banda

$$\angle KDI = \angle CJE = 30^\circ.$$

QDRJ és un rombe de costat a i angles 30° i 150° . Els rombes ABPL, QDRJ són semblants.

El triangle $\triangle CDQ$ es rectangle $\angle DCJ = 90^\circ$, $\angle CDK = 60^\circ$, $\overline{CD} = c$. Per tant, $\overline{DQ} = 2c$.

$$\frac{S_{QDRJ}}{S_{ABPL}} = \left(\frac{\overline{DQ}}{\overline{AB}} \right)^2 = 4.$$

Per tant, la proporció dels rombes és:

$$S_{ABPL} : S_{PCQK} : S_{QDRJ} = 1 : 3 : 4.$$

Novembre 21-22: En la figura hi ha un octògon i dos hexàgons tots regulars i de costat c . Trobeu el perímetre i l'àrea de la intersecció dels dos hexàgons.

Nivell: A partir de 4ESO.

Solució: Siga $ABCDEFGH$ l'octògon regular de costat $\overline{AB} = c$.

Siga $JKLMNP$ l'hexàgon intersecció dels dos hexàgons regulars.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\triangle BQC$:

$$\overline{QC} = \frac{\sqrt{2}}{2} c.$$

$$\overline{AF} = \overline{CD} + 2 \cdot \overline{QC} = (1 + \sqrt{2})c.$$

$$\overline{UF} = \frac{1}{2} \overline{AF} = \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right) c.$$

$$\overline{AN} = \sqrt{3}c.$$

$$\overline{UN} = \overline{AN} - \overline{UF} = \sqrt{3}c - \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right) c = \frac{2\sqrt{3} - 1 - \sqrt{2}}{2} c.$$

Per altra banda $\angle NPU = 60^\circ$. Siga $x = \overline{PN}$, $y = \overline{PU}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle PUN$:

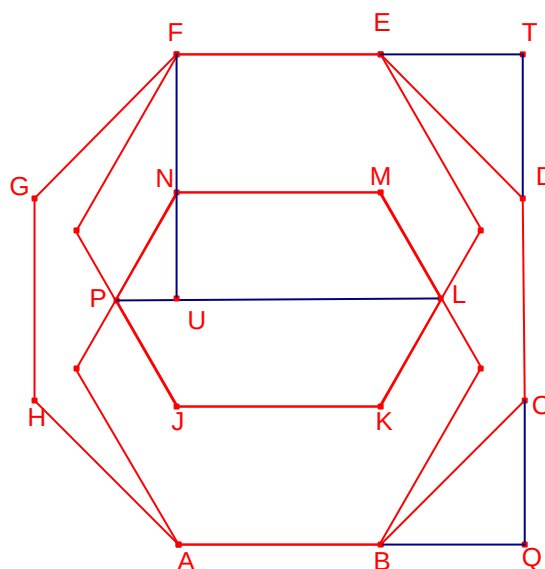
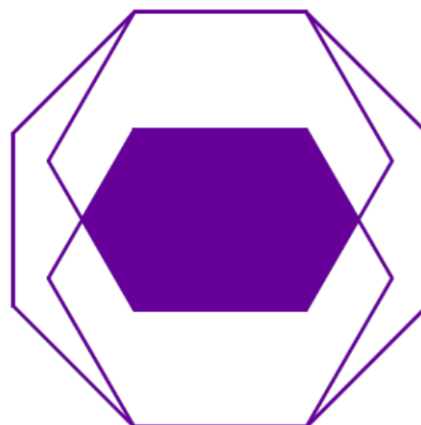
$$\frac{(2\sqrt{3} - 1 - \sqrt{2})c}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

d'on

$$x = \frac{6 - \sqrt{3} - \sqrt{6}}{3} c, \quad y = \frac{1}{2} x = \frac{6 - \sqrt{3} - \sqrt{6}}{6} c$$

El perímetre del hexàgon $JKLMNP$ és:

$$P_{JKLMNP} = 2 \cdot \overline{AB} + 4x = \frac{30 - 4\sqrt{3} - 4\sqrt{6}}{3} c$$



L'àrea de l'hexàgon JKLMNP és igual al doble de l'àrea del trapezi PLMN:

$$S_{JKLMNP} = 2 \cdot S_{PLMN} = 2 \frac{\overline{AB} + 2y + \overline{AB}}{2} \overline{UN} = \frac{(12 - \sqrt{3} - \sqrt{6})(2\sqrt{3} - 1 - \sqrt{2})}{6} c^2.$$

$$S_{JKLMNP} = \frac{-18 - 18\sqrt{2} + 27\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{6} c^2.$$

Novembre 23-24: La figura està formada per dos enneàgons, un hexàgon tot dos regulars, i dos triangles. Proveu que els dos triangles son isòsceles

Nivell: A partir de 3ESO

Solució: Els costats dels enneàgons i l'hexàgon són iguals.

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}.$$

Per tant, el triangle $\triangle ABC$ es isòsceles.

L'angle interior del enneàgon regular mesura:

$$\angle ABK = \angle CBK = 180^\circ - \frac{360^\circ}{9} = 140^\circ.$$

L'angle interior de l'hexàgon regular mesura:

$$\angle DCL = 180^\circ - \frac{360^\circ}{6} = 120^\circ.$$

$$\angle ABC = 360^\circ - 2\angle ABK = 80^\circ.$$

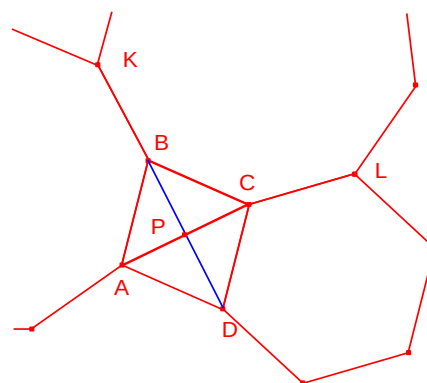
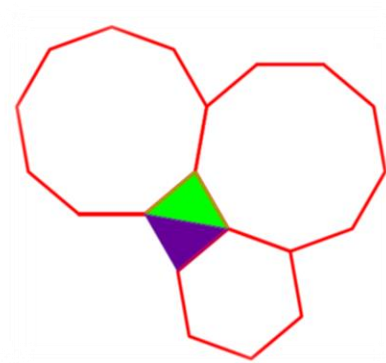
$$\angle BAC = \angle ACB = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} = 50^\circ.$$

El triangle $\triangle BCD$ es isòsceles.

$$\angle BCD = 360^\circ - (\angle ABK + \angle DCL) = 100^\circ.$$

$$\angle CBD = \angle BDC = \frac{180^\circ - \angle BCD}{2} = 40^\circ.$$

Per tant, $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ són perpendiculars. Siga P la intersecció d' $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. Els triangles rectangles $\triangle APB$, $\triangle CPB$ són iguals, per tant, els triangles rectangles $\triangle APD$ i $\triangle CPD$ són iguals. Aleshores, el triangle $\triangle ACD$ es isòsceles. Notem que els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle ADC$ són iguals.



Novembre 25-26: En la figura hi ha tres quadrats de centres A, B i C.

El punt O es el vèrtex de dos quadrats.

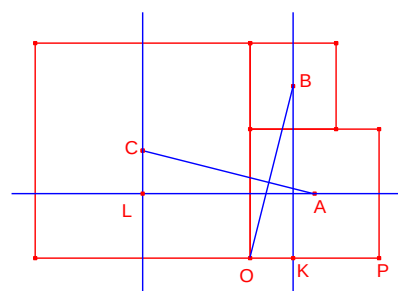
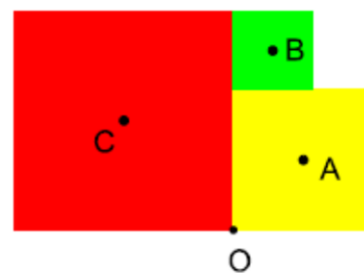
Proveu que els segments OB i AC són iguals i perpendiculars

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Sean a, b, c les mesures dels costats dels quadrats de centres A, B, C, respectivament. Notem que $a + b = c$. Siga K la projecció de B sobre la recta OP.

Siga la recta paral·lela a BK que passa per C. Siga la recta paral·lela a OK que passa per A. Les dos rectes anteriors s'intercepten en L.

$$\overline{OK} = \frac{1}{2}b, \overline{BK} = a + \frac{1}{2}b.$$



$$\overline{CL} = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}b, \overline{AL} = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}a = a + \frac{1}{2}b.$$

Aleshores, els triangles rectangles $\triangle OKB$ i $\triangle CLA$ són iguals, i tenen els catets corresponents perpendiculars, per tant:

$$\overline{OB} = \overline{AC}, \text{ i, a més, } \overline{OB} \perp \overline{AC}.$$

Novembre 27-28: En la figura, un octògon regular està inscrit en un triangle rectangle. Calculeu la raó de proporcionalitat entre els perímetres i les àrees de l'octògon i el triangle.

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Siga $\triangle ABC$ el triangle rectangle isòsceles, $A = 90^\circ$, $\overline{AB} = \overline{AC}$

Siga DEFGHIJK l'octògon regular de costat $\overline{DE} = c$.

Siga P la projecció de G sobre el catet $\overline{AB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\triangle ADK$

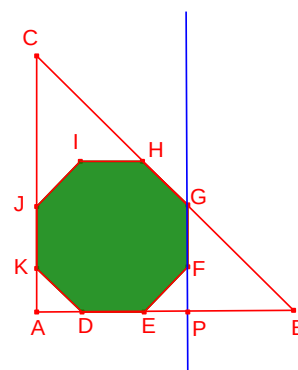
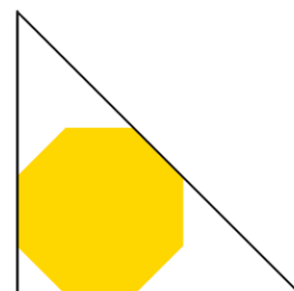
$$\overline{AD} = \overline{EP} = \overline{PF} = \frac{\sqrt{2}}{2}c.$$

El triangle rectangle $\triangle PBG$ Es isòsceles, aleshores:

$$\overline{PB} = \overline{PG} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)c. \overline{AB} = \left(2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)c.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\triangle ABC$:

$$\overline{BC} = \left(2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\sqrt{2}c.$$



El perímetre de l'octògon és: $P_{\text{DEFGHIJK}} = 8c$. El perímetre del triangle $\triangle ABC$ és:

$$P_{\text{ABC}} = 2\left(2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)c + \left(2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\sqrt{2}c = (7 + 5\sqrt{2})c.$$

La proporció entre els perímetres és:

$$\frac{P_{\text{DEFGHIJK}}}{P_{\text{ABC}}} = \frac{8c}{(7 + 5\sqrt{2})c} = 8(5\sqrt{2} - 7).$$

L'àrea de l'octògon regular és igual a l'àrea del quadrat de costat $\overline{AP}$ menys l'àrea del quadrat de costat c :

$$S_{\text{DEFGHIJK}} = (1 + \sqrt{2})^2 c^2 - c^2 = 2(1 + \sqrt{2})c^2$$

L'àrea del triangle rectangle isòsceles $\triangle ABC$ és:

$$S_{\text{ABC}} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2 c^2 = \frac{1}{4}(17 + 12\sqrt{2})c^2.$$

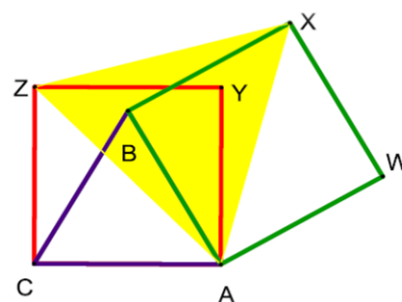
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{\text{DEFGHIJK}}}{S_{\text{ABC}}} = \frac{2(1 + \sqrt{2})c^2}{\frac{1}{4}(17 + 12\sqrt{2})c^2} = 8(5\sqrt{2} - 7).$$

Novembre 29-30: En la il·lustració ABC és un triangle equilàter i AYZC i ABXW són dos quadrats iguals. Demostreu que $\triangle AXZ$ és un triangle equilàter.

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: El gir de centre A i 60° transforma el quadrat AWXB en el quadrat AYZC.



També, aquest gir transforma la diagonal $\overline{AX}$ en la diagonal $\overline{AZ}$.

Per tant, $\overline{AX} = \overline{AZ}$ i $\angle XAZ = 60^\circ$. D'ací, $\triangle AXZ$ es un triangle equilàter.

