SOLUCIONS DESEMBRE 2017

AUTOR: Rafael Martínez Calafat. Professor jubilat de Matemàtiques

<u>Desembre 1:</u> De quantes maneres es pot obtenir una suma de 361 utilitzant nombres d'un o dos dígits diferents sense repetir cap dígit? I una suma de 360?

<u>Nivell:</u> Preparació OME.

<u>Solució:</u> Siga $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{x_i\}_{i=0}^{9}$. Com $\sum_{i=0}^{9} x_i = \frac{0+9}{2} \cdot 10 = 45$ (*) no podem obtenir suma de 361 amb nombres d'una xifra amb dígits distints i sen repetir cap dígit.

Siga $\{x_i\}_{i\in U}$ les xifres que col·loquem en el lloc de les unitats en las sumes de nombres d'una o dues xifres i $\{x_j\}_{j\in D}$ les xifres que col·loquem en el lloc de les desenes. Tindrem en primer lloc que $|D| \leq |U| \leq 10$ i en segon lloc que

$$\sum_{i\in U} x_i + 10\sum_{j\in D} x_j = 361$$

De (*) tindrem que $\sum_{i\in U} x_i$ pot ser 1, 11, 21, 31 o 41 (51 i cap posterior a el, ja que 51 excedeix a la suma màxima de 45).

Si $\sum_{i\in U} x_i = 1$ aleshores en les xifres de les unitats sols poden estar les xifres 0 i 1. Es a dir la suma seria de dos nombres o d'un nombre que es impossible que aporten suma 361 (la suma més gran de dos nombres de dos xifres és $90 + 81 = 80 + 91 = 171 \neq 361$)

Si $\sum_{i\in U} x_i = 11 \Rightarrow 11+10\cdot \sum_{j\in D} x_j = 361 \Rightarrow \sum_{j\in D} x_j = 35$ que és un absurd ja que:

$$45 = \sum_{i=0}^{9} x_i \geq \sum_{i\in U} x_i + \sum_{j\in D} x_j = 11 + 35 = 46 \quad (45 \geq 46\,)$$

Si $\sum_{i\in U} x_i = 21 \Rightarrow 21+10\cdot \sum_{j\in D} x_j = 361 \Rightarrow \sum_{j\in D} x_j = 34$ que és un absurd ja que:

$$45 = \sum_{i=0}^{9} x_i \geq \sum_{i\in U} x_i + \sum_{j\in D} x_j = 21 + 34 = 54 \quad (45 \geq 54\,)$$

Si $\sum_{i\in U} x_i = 31 \Rightarrow 31+10\cdot \sum_{j\in D} x_j = 361 \Rightarrow \sum_{j\in D} x_j = 33$ que és un absurd ja que:

$$45 = \sum_{i=0}^{9} x_i \geq \sum_{i\in U} x_i + \sum_{j\in D} x_j = 31 + 33 = 64 \quad (45 \geq 64\,)$$

Si $\sum_{i\in U} x_i = 41 \Rightarrow 41+10\cdot \sum_{j\in D} x_j = 361 \Rightarrow \sum_{j\in D} x_j = 32$ que és un absurd ja que:

$$45 = \sum_{i=0}^{9} x_i \geq \sum_{i\in U} x_i + \sum_{j\in D} x_j = 41 + 32 = 73 \quad (45 \geq 73\,)$$

Per tant, no podem aconseguir una suma de 361 amb nombres d'una o dues xifres amb dígits diferents i sense repetir cap dígit.

Per suma 360 tenim, una altra vegada, que no podem utilitzar només números d'una xifra doncs

$$\sum_{i=0}^{9} x_i = \frac{0+9}{2} \cdot 10 = 45$$

Una altra vegada, exigim aconseguir 360 amb nombres d'una xifra amb dígits diferents i sense repetir cap dígit.

$$\sum_{i \in U} x_i + 10 \sum_{j \in D} x_j = 360$$

De la mateixa forma que abans tindrem que $\sum_{i \in U} x_i$ pot ser 10, 20, 30 o 40 (50 i cap posterior a el, ja que 50 excedeix a la suma màxima de 45).

Si $\sum_{i \in U} x_i$ = 10 $\Rightarrow$ 10+10· $\sum_{j \in D} x_j$ = 360 $\Rightarrow$ $\sum_{j \in D} x_j$ = 35 i aleshores:

$$45 = \sum_{i=0}^{9} x_i = \sum_{i \in U} x_i + \sum_{j \in D} x_j = 10 + 35 = 45$$

Es a dir, en aquest cas, participen en els nombres tots els dígits. En altres paraules, U i D són una partició de {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. A més, els dos conjunts han de tenir cardinalitat 5 ja que si |U|=6 i |D|=4 la major suma $\sum_{j \in D} x_j$ amb |D|=4 és 6+7+8+9 = 30 $\neq$ 35. Idèntic raonament es pot utilitzar amb |U| $\in$ {7, 8, 9} i |D| $\in$ {3, 2, 1}. Per tant hem de particionar {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} en dos conjunts amb $\sum_{i \in U} x_i = 10$ y $\sum_{j \in D} x_j = 35$ i això és sols possible si $\{x_i\}_{i \in U}$ = {0, 1, 2, 3, 4} i $\{x_j\}_{j \in D}$= {5, 6, 7, 8, 9}. Com la primera desena (5) es pot combinar amb 5 unitats, la segona desena (6) es pot combinar amb 4 unitats i així successivament hi ha 5·4·3·2·1 = 5! = 120 maneres de aconseguir suma 360.

Si $\sum_{i \in U} x_i$ = 20 (30, 40) $\Rightarrow$ 20 (30, 40) +10· $\sum_{j \in D} x_j$ = 360 $\Rightarrow$ $\sum_{j \in D} x_j$ = 34 (33, 32) que és un absurd ja que:

$$45 = \sum_{i=0}^{9} x_i \geq \sum_{i \in U} x_i + \sum_{j \in D} x_j = 20 + 34\ (30 + 33, 40 + 32) = 54 \quad (63, 72\ )$$

Desembre 2: Se sap que:

αβδ78η·792=2540abc88

amb a, b, c, α, β, δ, η dígits. Trobeu eixos dígits desconeguts

Nivell: Preparació OME.

Solució:

A. Com 792 = 2^3·9·11 tindrem que N = 2540abc88 és múltiple de 8, de 9 i d'11.

B. Com al multiplicar les dues últimes xifres dels factors obtenim $2 \cdot \eta = \underbrace{\ldots}8$, necessàriament η = 4 o η = 9.

C. Si η = 4 aleshores $\underbrace{..}784 \cdot 792 = \underbrace{\ldots}928 \neq \underbrace{\ldots}c88$. Si η = 9 aleshores $\underbrace{\ldots}789 \cdot 792 = \underbrace{\ldots}888 \Rightarrow$

$\boxed{\eta = 9 \text{ i } c = 8}$

D. Com N és múltiple d'11 la suma de les xifres que ocupen llocs imparells menys la suma de xifres que ocupen llocs parells deu ser múltiple d'11. Es a dir: (8 + 8 + a + 4 + 2) – (8 + b + 0 + 5) = 9 + a – b $\in$ {0, 11} ja que $0 \le 9 + a - b \le 18$. Per tant a – b = – 9 o a – b = 2

E. Com N és múltiple de 9 la suma de totes les seues xifres és múltiple de 9. Es a dir: 2 + 5 + 4 + 0 + a + b + 8 + 8 +8 = 35 + a + b deu ser múltiple de 9. Com $35 \le 35 + a + b \le 53$ deu ser a + b + 35 = 36 o a + b + 35 = 45, es a dir a + b = 1 o a + b = 10.

F. $\left.\begin{matrix} a+b=1 \\ a-b=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ 2a = 3 \ \text{ No aporta solucions}$

G. $\left.\begin{matrix} a+b=1 \\ a-b=-9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ 2a = -8 \ \text{ No aporta solucions}$

H. $\left.\begin{matrix} a+b=10 \\ a-b=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ 2a = 12 \ \Rightarrow \ \boxed{a = 6, b = 4}$

I. $\left.\begin{matrix} a+b=10 \\ a-b=-9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ 2a = 1 \ \text{ No aporta solucions}$

J. És a dir, tenim: $\alpha\beta\delta789 \cdot 792 = 254064888 \ \Rightarrow \ \alpha\beta\delta789 = \frac{254064888}{792} = 320789$

Desembre 3-10: A l'IES "La Plana" hi ha 280 alumnes de sexe masculí d'un total de 614. Dels que cursen batxillerat, set de cada quinze són de sexe masculí. I dels que cursen ESO, la proporció de dones és 127/232. Trobar el percentatge d'alumnat que cursa batxillerat i la proporció de dones que cursen batxillerat

Nivell: Segon de batxillerat.

Solució: Siga M (F) l'esdeveniment ser de sexe masculí (femení) i B (E) l'esdeveniment ser alumne que cursa batxillerat (ESO). De les dades:

$$P(M) = \frac{280}{614}, \quad P\left({}^{M}/_{B}\right) = \frac{7}{15}, \quad P\left({}^{F}/_{E}\right) = \frac{127}{232}$$

Siga x = P(B $\cap$ M) e y = P(E $\cap$ F), aleshores podem obtenir la següent taula de contingència:

	M	F	
B	x	$\frac{334}{614} - y$	$x + \frac{334}{614} - y$
E	$\frac{280}{614} - x$	y	$\frac{280}{614} - x + y$
	$\frac{280}{614}$	$\frac{334}{614}$	1

De les probabilitats condicionades tenim:

$$P\left({}^{M}/_{B}\right) = \frac{7}{15} = \frac{P(M \cap B)}{P(B)} = \frac{x}{x - y + \frac{334}{614}}, \ldots, 8x + 7y = \frac{1169}{307}$$

$$P\left({}^{F}/_{E}\right) = \frac{127}{232} = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} = \frac{y}{y - x + \frac{280}{614}}, \ldots, 127x + 105y = \frac{17780}{307}$$

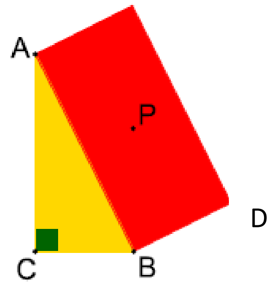
$$\left.\begin{aligned} 8x + 7y &= \frac{1169}{307} \\ 127x + 105y &= \frac{17780}{307} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1169}{307} & 7 \\ \frac{17780}{307} & 105 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 127 & 105 \end{vmatrix}} = \frac{35}{307} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 8 & \frac{1169}{307} \\ 127 & \frac{17780}{307} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 127 & 105 \end{vmatrix}} = \frac{127}{307} \end{aligned}$$

La taula de contingència queda:

	M	F	
B	$\frac{35}{307}$	$\frac{40}{307}$	$\frac{75}{307}$
E	$\frac{105}{307}$	$\frac{127}{307}$	$\frac{232}{307}$
	$\frac{140}{307}$	$\frac{167}{307}$	1

I podem contestar a qualsevol pregunta:

$$P(B) = \frac{75}{307} \approx 24{,}43\%; \quad P\left(E/_B\right) = \frac{P(F \cap B)}{P(B)} = \frac{40/_{307}}{75/_{307}} = \frac{40}{75} \approx 53{,}33\%$$



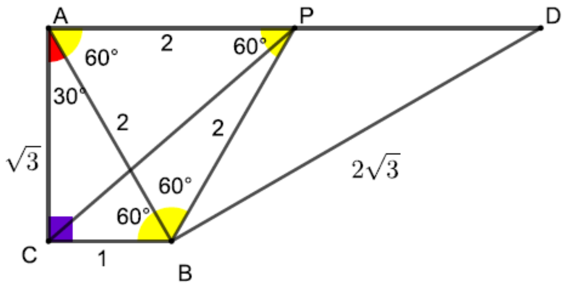
<u>Desembre 4-5:</u> Siga ΔABC un triangle rectangle en C amb CB = 1 i ∠A = 30°. Sobre AB es dibuixa un rectangle d'àrea $4\sqrt{3}$. Siga P el centre del rectangle. Trobeu perímetre i àrea dels triangles ΔCAP i ΔCPB.

<u>Nivell:</u> A partir de 4ESO.

<u>Solució:</u> El triangle ΔABC compleix ∠C = 90°, ∠A = 30° i ∠B = 60°.

Es a dir ΔABC és un triangle 30°-60°-90° i per tant la hipotenusa mesura el doble del catet petit i el catet gran mesura $\sqrt{3}$ vegades el catet petit, es a dir CB = 1, CA = $\sqrt{3}$ i AB = 2.

Respecte del rectangle tenim que la seua alçada és 2 i la seua àrea és $4\sqrt{3}$, per tant, la seua base, BD = $2\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $AD = \sqrt{4+12} = 4 \Rightarrow PB = AP = \frac{1}{2}AD = 2 \Rightarrow$ ΔABP és equilàter $\Rightarrow$ els seus angles mesuren 60° $\Rightarrow$ ΔACP és rectangle en A (pues 30° + 60° = 90°) $\Rightarrow$ $A_{\Delta ACP} = \frac{\sqrt{3}\cdot 2}{2} = \sqrt{3}$



I al aplicar Pitàgores al triangle ΔACP:

$$CP = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{7} \Rightarrow \text{Perímetre} = \sqrt{3} + 2 + \sqrt{7}$$

Respecte al triangle ΔCBP tenim:

Perímetre: CP + BP + CB = $\sqrt{7} + 2 + 1 = 3 + \sqrt{7}$

$$\text{Àrea} = \frac{CB \cdot BP \cdot \sin(60° + 60°)}{2} = 2 \cdot \sin(60°) \cdot \cos(60°) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'àrea pot obtenir-se de manera alternativa com:

$$A_{\Delta CBP} = A_{\text{quadrilàter}} - A_{\Delta CAP} = (A_{\Delta ABC} + A_{\Delta ABP}) - A_{\Delta CAP} = \left(\frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\right) - \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

<u>Desembre 6:</u> Quins són els naturals que tenen p divisors sent p un nombre primer?

<u>Nivell:</u> Preparació OME.

<u>Solució:</u> Recordem que:

a) Si $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ amb $\{p_i\}_{i=1}^{n}$ primers i exponents naturals, és la descomposició factorial de N en producte de primers, el nombre de divisores de N és

$$\prod_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1)$$

b) Els nombres primers són: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157,……

Per tant, si busquem els naturals N amb p (sent p primer) divisors naturals, ja que que p no es pot factoritzar, N és la potència d'un primer. Amb més precisió, N = q^{p-1} con q qualsevol primer

<u>Desembre 7-8:</u> Simplificar l'expressió:

$$\mathbf{A = \cos^2 \frac{2\pi}{3} - 4sen\, \frac{2\pi}{3} sen \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3}}$$

<u>Nivell:</u> Batxillerat.

<u>Solució:</u> Recordem que sin (2α) = 2·sin α·cos α. Amb el que:

$$\begin{aligned} A = \cos^2 \frac{2\pi}{3} - 4\text{sen}\, \frac{2\pi}{3} \text{sen} \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} &= \cos^2 \frac{2\pi}{3} - \text{sen}\, \frac{2\pi}{3} 2 \left(2\text{sen} \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6}\right) \cos \frac{\pi}{3} \\ = \cos^2 \frac{2\pi}{3} - \text{sen}\, \frac{2\pi}{3} \left(2\text{sen} \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3}\right) &= \cos^2 \frac{2\pi}{3} - \text{sen}\, \frac{2\pi}{3} \left(\text{sen} \frac{2\pi}{3}\right) \\ = \cos^2 \frac{2\pi}{3} - \text{sen}^2\, \frac{2\pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

Tenint en compte que cos(2α) = $\cos^2\alpha$ - $\sin^2\alpha$. Per últim:

$$A = \cos \frac{4\pi}{3} = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

<u>Desembre 9:</u> Quants naturals existeixen de manera que el producte dels seus dígits sigui 78?

<u>Nivell:</u> Preparació OME.

Solució: Ja que 78= 2·3·13 i 13 es primer, i per tant no es pot expressar com producte de nombres d'una xifra, no podem ficar 78 com producte de xifres de nombres i per tant no existeixen naturals de manera que el producte de les seues xifres siga 78.

Desembre 11: Quants naturals de tres xifres compleixen que el producte de les seves xifres és 72? I quants de quatre xifres?

Nivell: Preparació OME.

Solució: Busquem nombres generats amb les xifres α, β i δ per als que $\alpha \cdot \beta \cdot \delta = 72 = 2^3 \cdot 3^2$. Les diferents possibilitats són:

A. $\alpha = 1$, $\beta = 8$, $\delta = 9$. Aquestes xifres generen 3! = 6 números diferents (Tres possibilitats per a les centenes, dues possibilitats per a les desenes i una possibilitat per a les unitats)
B. $\alpha = 2$, $\beta = 4$, $\delta = 9$ Aquestes xifres generen 3! = 6 números diferents.
C. $\alpha = 2$, $\beta = 6$, $\delta = 6$. Aquestes xifres generen 3 números diferents (les maneres diferents de col·locar el dos i completar els nombres amb els dos sisos)
D. $\alpha = 3$, $\beta = 3$, $\delta = 8$. Aquestes xifres generen 3 números diferents.
E. $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $\delta = 6$. Aquestes xifres generen 3! = 6 números diferents

En total hi ha (6 + 6 + 3 + 3 + 6 =) 24 nombres de tres xifres de manera que el producte de les seues xifres és 72.

Busquem ara els nombres generats amb les xifres α, β, δ i η per a els que $\alpha \cdot \beta \cdot \delta \cdot \eta = 72 = 2^3 \cdot 3^2$. Algunes possibilitats són les trobades anteriorment afegint un 1 en qualsevol de les possibles posicions, es a dir:

A. $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\delta = 8$, $\eta = 9$. Aquestes xifres generen $\binom{4}{2} \cdot 2 = 12$ nombres (Hi ha $\binom{4}{2}$ maneres de triar dues posicions d'entre quatre en què col·locar els uns i cadascuna d'aquestes posicions genera dos nombres col·locant primer el vuit i després el nou o primer el 9 i després el vuit).
B. $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\delta = 4$, $\eta = 9$. Aquestes xifres generen 4! = 24 nombres.
C. $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\delta = 6$, $\eta = 6$. Aquestes xifres generen$\binom{4}{2} \cdot 2 = 12$ nombres
D. $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\delta = 3$, $\eta = 8$. Aquestes xifres generen $\binom{4}{2} \cdot 2 = 12$ nombres
E. $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\delta = 4$, $\eta = 6$. Aquestes xifres generen 4! = 24 nombres

A aquestes opcions hem d'afegir:

A. $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\delta = 2$, $\eta = 9$. Aquestes xifres generen 4 nombres (Hi ha 4 formes de col·locar el 9 i després els dosos.).
B. $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\delta = 3$, $\eta = 4$. Aquestes xifres generen $\binom{4}{2} \cdot 2 = 12$ nombres.
C. $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\delta = 3$, $\eta = 6$. Aquestes xifres generen $\binom{4}{2} \cdot 2 = 12$ nombres.

En total hi ha (12 + 24 + 12+ 12 + 24 + 4 + 12 + 12 =) 112 nombres

Diciembre 12-13: ¿Cuántos subconjuntos con al menos seis elementos se pueden formar a partir de

A= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

de manera que la suma de sus elementos sea múltiplo de 9?

Nivel: Preparación OME.

Solución: Tenemos en primer lugar que 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 +7 + 8 + 9 = 45 que es un múltiplo de 9. Por lo tanto, hay un subconjunto con 9 elementos, el propio A que cumple el requisito del enunciado.

Consideremos los subconjuntos de ocho elementos. Si extraemos de A un elemento las sumas extremas que podemos obtener son: (45 – 9 =) 36 y (45 – 1 =) 44. El único múltiplo de 9 entre 36 y 44 es 36. Luego {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} es el único subconjunto de 8 elementos extraído de A con suma de todos sus elementos múltiplo de 9.

Si extraemos de A dos elementos las sumas extremas que podemos obtener son: (45 – 9 – 8 =) 28 y (45 – 1 – 2 =) 42. El único múltiplo de 9 entre 28 y 42 es 36. Hemos de quitar de A dos elementos que sumen (45 – 36 =) 9, es decir hemos de quitar a {1, 8}, {2, 7}, {3, 6}, {4, 5}. Luego {2, 3, 4, 5, 6, 7, 9}, {1, 3, 4, 5, 6, 8, 9}, {1, 2, 4, 5, 7, 8, 9} y {1, 2, 3, 6, 7, 8, 9} son los únicos subconjuntos de 7 elementos extraído de A con suma de todos sus elementos múltiplo de 9.

Si extraemos de A tres elementos las sumas extremas que podemos obtener son: (45 – 9 – 8 – 7 =) 21 y (45 – 1 – 2 – 3 =) 39. los únicos múltiplos de 9 entre 21 y 39 es 27 y 36. Hemos de quitar de A tres elementos:

A. que sumen (45 – 27 =) 18, es decir hemos de quitar a {9, 8, 1}, {9, 7, 2}, {9, 6, 3}, {9, 5, 4} {8, 7, 3}, {8, 6, 4}, {7, 6, 5}. Luego {2, 3, 4, 5, 6, 7}, {1, 3, 4, 5, 6, 8}, {1, 2, 4, 5, 7, 8}, {1, 2, 3, 6, 7, 8}, {1, 2, 4, 5, 6, 9}, {1, 2, 3, 5, 7, 9} y {1, 2, 3, 4, 8, 9} son los únicos subconjuntos de 6 elementos extraído de A con suma de todos sus elementos 27 que es múltiplo de 9.
B. que sumen (45 – 36 =) 9, es decir hemos de quitar a {1, 2, 6}, {1, 3, 5}, {2, 3, 4}. Luego {2, 3, 4, 5, 6, 7}, {1, 2, 4, 5, 6, 9}, {1, 2, 3, 4, 8, 9} son los únicos subconjuntos de 6 elementos extraído de A con suma de todos sus elementos 36 que es múltiplo de 9.

En total los subconjuntos que solicita el enunciado son:

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9}, {1, 3, 4, 5, 6, 8, 9}, {1, 2, 4, 5, 7, 8, 9}, {1, 2, 3, 6, 7, 8, 9}

{2, 3, 4, 5, 6, 7}, {1, 3, 4, 5, 6, 8}, {1, 2, 4, 5, 7, 8}, {1, 2, 3, 6, 7, 8}, {1, 2, 4, 5, 6, 9}, {1, 2, 3, 5, 7, 9}, {1, 2, 3, 4, 8, 9}, {2, 3, 4, 5, 6, 7}, {1, 2, 4, 5, 6, 9}, {1, 2, 3, 4, 8, 9}

Desembre 14: Quina és la major potència de 2 que divideix a $2^{2017}+10^{2017}+100^{2017}$?

Nivell: Preparació OME.

Solució: Tenim:

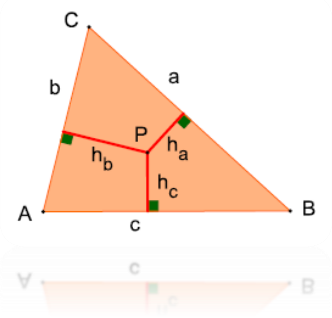
$$2^{2017}+10^{2017}+100^{2017}=2^{2017}+2^{2017}\cdot 5^{2017}+2^{4034}\cdot 5^{4034}$$
$$=2^{2017}\cdot(1+5^{2017}+2^{2017}\cdot 5^{4034})$$

Por la qual cosa, pareix ser la contestació 2^{2017}. Però 5^{2017} acaba en 25 (tota potència de 5 excepte 5^0 i 5^1 acaba en 25). El que implica que $1 + 5^{2017}$ acaba en 26, i per tant $1 + 5^{2017}$ acaba en 26, i per tant $1 + 5^{2017}$ és múltiple de 2 però no de 4. Per tant $1 + 5^{2017} = 2 \cdot k$ on k es imparell. Por altra part, $2^{2016} \cdot 5^{4034}$ es parell. En definitiva:

$$2^{2017} + 10^{2017} + 100^{2017} = 2^{2017} \cdot \left(2 \underbrace{k}_{\text{imparell}} + 2^{2017} 5^{4034}\right) = 2^{2018}\left(\underbrace{k}_{\text{imparell}} + \underbrace{2^{2016} \cdot 5^{4034}}_{\text{parell}}\right)$$

Per tant, la major potència de base 2 que divideix a $2^{2017}+10^{2017}+100^{2017}$ és 2^{2018}.

Desembre 15-16: Siga $\triangle ABC$ un triangle acutangle d'àrea A i perímetre Π. Siga P un punt interior i h_a (h_b, h_c) la distancia de P (en perpendicular) a CB (CA, AB) i r el radi de la circumferència inscrita al triangle. Demostreu que $2A = b \cdot h_b + c \cdot h_c + a \cdot h_a$, que $2A = \Pi r$, i que si el triangle es equilàter de costat a $2A = 3a$



Nivell: A partir de 2ESO.

Solució: Tindrem unint P amb els vèrtexs del triangle: A, B i C que es generen tres triangles de manera que l'àrea del triangle inicial és suma d'àrees de aquestos tres triangles:

$$A = \frac{c \cdot h_c}{2} + \frac{b \cdot h_b}{2} + \frac{a \cdot h_a}{2} \quad \Rightarrow \quad 2A = a \cdot h_a + b \cdot h_b + c \cdot h_c$$

Si prenem P com el punt on es tallen les bisectrius dels tres angles del triangle inicial, aleshores: $r = h_a = h_b = h_c$ on r és el radi de la circumferència inscrita, i:

$$2A = a \cdot h_a + b \cdot h_b + c \cdot h_c = a \cdot r + b \cdot r + c \cdot r = r \cdot (a + b + c) = \Pi \cdot r$$

Per últim, si el triangle és equilàter $a = b = c$, i $2A = 3 \cdot a \cdot r$

Desembre 17: ¿Per a quants naturals n d'una xifra és $n^2 + n + 1$ un divisor de $n^{2017} + 150$?

Nivell: A partir batxillerat.

Solució: Tenim:

$$n^{2017} + 150 = (n^2 + n + 1) \cdot (n^{2015} - n^{2014} + n^{2012} - n^{2011} + \cdots + n^5 - n^4 + n^2 - n) + n + 150$$

Per a que $n^2 + n + 1$ siga un divisor de $n^{2017} + 150$, $n^2 + n + 1$ ha de ser un divisor de $n + 150$. Vegem que valors de n d'una xifra fan que $n + 150$ siga divisible per $n^2 + n + 1$

n	n + 150	$n^2 + n + 1$	¿$n^2 + n + 1$ divideix a n + 150?
1	151	3	¿3 divideix a 151? NO
2	152	7	¿7 divideix a 152? NO
3	153	13	¿13 divideix a 153? NO
4	154	21	¿21 divideix a 154? NO
5	155	31	¿31 divideix a 155? SI

6	156	43	¿43 divideix a 156? NO
7	157	57	¿57 divideix a 157? NO
8	158	73	¿73 divideix a 158? NO
9	159	91	¿91 divideix a 159? NO

Per tant, sols per a n = 5, $n^{2017} + 150$ és divisible per $n^2 + n + 1$.

Desembre 18: Demostreu que 2018 no és suma d'un quadrat i un cub amb bases de distinta paritat (és dir una parell i l'altra imparell)

Nivell: Preparació OME.

Solució 1: Per reducció al absurd.

Si $2018 = \underbrace{\underbrace{(2n)^2}_{\text{par}} + \underbrace{(2m+1)^3}_{\text{impar}}}_{\text{impar}}$ tindriem que 2018 es imparell

Si $2018 = \underbrace{\underbrace{(2n+1)^2}_{\text{impar}} + \underbrace{(2m)^3}_{\text{par}}}_{\text{impar}}$ tindriem que 2018 és imparell

Solució 2: Considerem congruències mòdul 4. Tenim:

$$\text{n parell} \Rightarrow \begin{cases} n = 0(4) \Rightarrow n^2 = 0(4) \Rightarrow n^3 = 0(4) \\ n = 2(4) \Rightarrow n^2 = 0(4) \Rightarrow n^3 = 0(4) \end{cases}$$

$$\text{n imparell} \Rightarrow \begin{cases} n = 1(4) \Rightarrow n^2 = 1(4) \Rightarrow n^3 = 1(4) \\ n = 3(4) \Rightarrow n^2 = 1(4) \Rightarrow n^3 = 3(4) \end{cases}$$

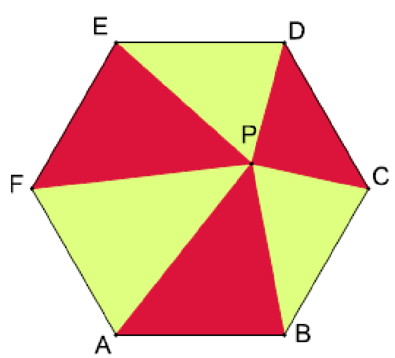
A més a més:

$$\left.\begin{array}{r} \text{n és parell} \Rightarrow n^2 = 0(4) \\ \text{m és imparell} \Rightarrow m^2 = 1(4) \Rightarrow m^3 = \begin{cases} 1(4) \\ 3(4) \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow n^2 + m^3 = \begin{cases} 1(4) \\ 3(4) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{n és imparell} \Rightarrow n^2 = 1(4) \\ \text{m és parell} \Rightarrow m^2 = 0(4) \Rightarrow m^3 = 0(4) \end{array}\right\} \Rightarrow n^2 + m^3 = 1(4)$$

Per el que, $n^2 + m^3$ amb n i m de distinta paritat mai poden donar 0(4) o 2(4). Com 2018 = 2(4), tenim que 2018 no pot expressar-se com suma d'un quadrat i un cub amb bases de diferent paritat.

Desembre 19-26: Siga ABCDEF un hexàgon regular amb AB = 1. Siga P un punto de l'interior del hexàgon. Siga S la suma de les àrees dels triangles ΔABP, ΔCDP i ΔEFP. Calculeu el valor de S

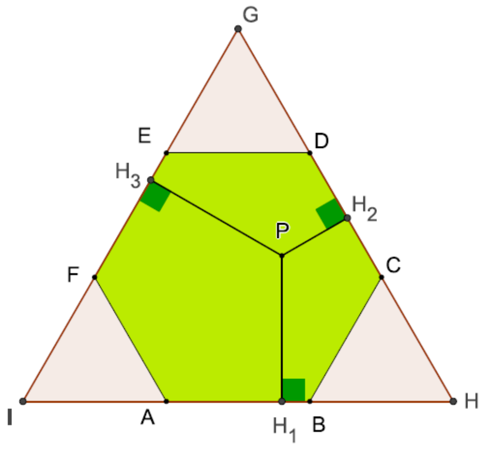


Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Siga H_1 (H_2, H_3) el punt d'AB (CD, EF) de manera que PH_1 (PH_2, PH_3) és perpendicular a AB (CD, EF)

Aleshores:

$$S = \frac{AB \cdot PH_1}{2} + \frac{CD \cdot PH_2}{2} + \frac{EF \cdot PH_3}{2} =$$
$$= \left\{ \begin{matrix} AB = CD = \\ EF = 1 \end{matrix} \right\} =$$
$$= \frac{1}{2}(PH_1 + PH_2 + PH_3)$$



Per altra banda, siga I (H, G) la intersecció d'AB i EF (AB y DC, EF y CD). Aleshores ΔIGH és equilàter de costat 3, i per tant la seua àrea és $\frac{9}{4}\sqrt{3}$. Però P descomposa el triangle equilàter en tres triangles amb alçades en H_1 (H_2 y H_3) i base 3. D'on:

$$\frac{9}{4}\sqrt{3} = \frac{3 \cdot PH_1}{2} + \frac{3 \cdot PH_2}{2} + \frac{3 \cdot PH_3}{2} = \frac{3}{2}(PH_1 + PH_2 + PH_3) \;\Rightarrow\; PH_1 + PH_2 + PH_3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(Aquest últim raonament pot evitar-se amb el teorema de Viviani que garanteix que la suma dels segments $PH_1 + PH_2 + PH_3$ es l'alçada del triangle equilàter). Per tant:

$$S = \frac{1}{2}(PH_1 + PH_2 + PH_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Desembre 20: Demostreu que 2017 no és suma d'un quadrat i un cub amb bases de la mateixa paritat (és a dir les dues parells o les dues imparells)

Nivell: Preparació OME.

Solució 1: Considerem congruències mòdul 4. Tenim:

$$\text{n parell} \;\Rightarrow\; \begin{cases} n = 0(4) \;\Rightarrow\; n^2 = 0(4) \;\Rightarrow n^3 = 0(4) \\ n = 2(4) \Rightarrow\; n^2 = 0(4) \;\Rightarrow n^3 = 0(4) \end{cases}$$

$$\text{n imparell} \;\Rightarrow\; \begin{cases} n = 1(4) \;\Rightarrow\; n^2 = 1(4) \;\Rightarrow n^3 = 1(4) \\ n = 3(4) \Rightarrow\; n^2 = 1(4) \;\Rightarrow n^3 = 3(4) \end{cases}$$

A més:

$$\left.\begin{matrix} \text{n és parell} \;\Rightarrow\; n^2 = 0(4) \\ \text{m és parell} \;\Rightarrow\; m^3 = 0(4) \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; n^2 + m^3 = 0(4)$$

$$\left.\begin{matrix} \text{n és imparell} \;\Rightarrow\; n^2 = 1(4) \\ \text{m és imparell} \;\Rightarrow\; m^2 = 1(4) \;\Rightarrow m^3 = \begin{cases} 1(4) \\ 3(4) \end{cases} \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; n^2 + m^3 = \begin{cases} 2(4) \\ 0(4) \end{cases}$$

Per la qual cosa, cap nombre que done residu 1 o 3, al dividir-lo per 4 pot expressar-se com suma d'un quadrat i un cub amb bases amb la mateixa paritat. Com 2017 = 1(4) tenim el desitjat.

Solució 2: Al absurd:

Si 2017 = $(2n)^2 + (2m)^3$. Aleshores: 2017 = $4(n^2 + 2m^3)$ $\Rightarrow$ 2017 és parell

Si 2017 = $(2n+1)^2 + (2m + 1)^3$. Aleshores 2017 = $2(2n^2 + 2n + 4m^3 + 6m^2 + 3m + 1)$ $\Rightarrow$ 2017 és parell

Desembre 21: Demostreu que, si a és primer diferent de 2 i 3, $a^{2n} - 1$ és múltiple de 6

Nivell: Preparació OME.

Solució: Demostrarem que, sota les condicions de l'enunciat $a^{2n} - 1$ és múltiple de 24. Tenim:

$$a^{2n} - 1 = (a^n - 1) \cdot (a^n + 1)$$

Com a és primer diferent de 2, resulta que a és imparell. Per tant, a^n és imparell. D'on $a^n \pm 1$ són parells i consecutius. Per tant un és múltiple de 2 i l'altre múltiple de 4. I per tant $a^{2n} - 1$ és múltiple de 8.

Per altra banda, a és diferent de 3, per tant, en a^n no apareix el factor 3 en la seua descomposició factorial com producte de primers. Com $a^n - 1$, a^n y $a^n + 1$, són tres nombres consecutius, un d'ells és múltiple de 3, com no ho és el nombre central tenim que o bé $a^n - 1$ o $a^n + 1$ és múltiple de 3. Per últim, $a^{2n} - 1$ és múltiple de 8 i múltiple de 3, per tant és múltiple de 24.

Desembre 22: Trobeu els enters z que compleixen que $z^4 - 21z^2$ és un quadrat perfecte

Nivell: Preparació OME.

Solució: Òbviament $z = 0$ és solució. Si $z \neq 0$ tenim:

$$z^4 - 21z^2 = z^2 \cdot (z^2 - 21)$$

Per tant $z^4 - 21z^2$ serà un quadrat perfecte sii ho és $z^2 - 21$. Busquem doncs les solucions de l'equació $z^2 - 21 = n^2$ amb z enter i n natural (*).

Si $z^2 - 21 = n^2$ aleshores $z^2 = n^2 + 21$. Com $z^2 > n^2$ deu existir s tal que $n^2 + 21 = (n + s)^2 = n^2 + 2ns + s^2$. És dir, $z^2 - 21 = n^2$ és equivalent a $21 = 2ns + s^2$

Per a $s = 1 \Rightarrow 21 = 2n + 1 \Rightarrow n = 10$

Per a $s = 2 \Rightarrow 21 = 4n + 4 \Rightarrow n \notin N$

Per a $s = 3 \Rightarrow 21 = 6n + 9 \Rightarrow n = 2$

Per a $s = 4 \Rightarrow 21 = 8n + 16 \Rightarrow n \notin N$

Valors posteriors de s provocarien que n fora negatiu i per tant no tenen sentit valors de $s > 4$.

Surten dos valors per a n en (*)

$$z^2 - 21 = 10^2 \Rightarrow z^2 = 121 \Rightarrow z = \pm 11$$

$$z^2 - 21 = 2^2 \Rightarrow z^2 = 25 \Rightarrow z = \pm 5$$

Por tant, sols per a $z \in \{-11, -5, 0, 5, 11\}$ es té que $z^4 - 21z^2$ és un quadrat perfecte.

Desembre 23: Demostreu que $11^{3n} - 1$ és múltiple de 70

Nivell: Preparació OME.

Solució: Tenim (per a n = 1)

$$11^3 - 1 = 1331 - 1 = 1330$$

que és múltiple de 7 (1330 = 13·100 +30 =13·(7·14 + 2) + 30 = 13·14·7 + 2·13 + 30. Per tant $1330 = \dot{\hat{7}} \Leftrightarrow$ $2 \cdot 13 + 30 = 56 = \dot{\hat{7}}$, i com 56 = 7·8 tenim que 1330 és múltiple de 7. (Altre criteri de divisibilitat de 7: xyzt és múltiple de 7 sii 2·xy + zt és múltiple de 7)). Ara de la factorització:

$$x^k - 1 = (x-1) \cdot \left(x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + x + 1\right) = \dot{\widehat{(x-1)}}$$

tenim, fent x = 11^3:

$$11^{3k} - 1 = \dot{\widehat{11^3 - 1}} = \dot{\widehat{1330}}$$

i com 1330 és múltiple de 10 i de 7 tenim que $11^{3k} - 1$ és múltiple de 70.

NOTA: Hem demostrat més del proposat: Hem demostrat que $11^{3n} - 1$ és múltiple de 1330, es a dir múltiple de 10, de 7 i de 19

Solució més simple (Professor Smudge. @ProfSmudge)

$$11^3=1331$$

$(1330+1)^n$ = (teorema del binomi (Newton), aplicant que els n primers sumands tenen el factor 1330) = $1330 \cdot k+1^n$

D'on es dedueix, òbviament, el proposat

Desembre 24: Considerem A = {1, 2, ...,30}. Demostreu que qualsevol subconjunt d'A amb 21 elements, té, al menys tres amb la mateixa xifra en les unitats

Nivell: Preparació OME.

Solució: Considerem

A_i = {nombres d'A que donen residu i al dividir-los per 10}

Es dir:

A_0 = {10, 20, 30}; A_1 = {1, 11, 21}; A_2 = {2, 12, 22}; …. ; A_8 = {8, 18, 28}; A_9 = {9, 19, 29}. Aquestos conjunts són una partició d'A. Per el principi de Dirichlet, extrets 21 elements d'A al menys hi ha un A_i (niu) al que pertanyen 3 nombres (coloms)dels 21 considerats. Els tres elements d'eixe A_i tenen la mateixa xifra en les unitats.

Desembre 25: Per a quins valors de n $\mathbf{2^n + 3^n + 5^n + 7^n}$ és múltiple de 5?

Nivell: Preparació OME.

Solució: Vegem en que xifra acaba cadascuna de les potències 2^n, 3^n, 5^n i 7^n per a distints valors de n:

n	2^n acaba en
1, 5, 9, ………, n = 1(4)	2
2, 6, 10, ……, n = 2(4)	4
3, 7, 11, ……, n = 3(4)	8
4, 8, 12, ……, n = 0(4)	6

n	3^n acaba en
1, 5, 9, ………, n = 1(4)	3
2, 6, 10, ……, n = 2(4)	9
3, 7, 11, ……, n = 3(4)	7
4, 8, 12, ……, n = 0(4)	1

5^n sempre acaba en 5

n	7^n acaba en
1, 5, 9, ………, n = 1(4)	7
2, 6, 10, ……, n = 2(4)	9
3, 7, 11, ……, n = 3(4)	3
4, 8, 12, ……, n = 0(4)	1

Per tant:

n	$2^n + 3^n + 5^n + 7^n$ acaba en
1, 5, 9, ………, n = 1(4)	(2 + 3 + 5 + 7 =) 7
2, 6, 10, ……, n = 2(4)	(4 + 9 + 5 + 9 =) 7
3, 7, 11, ……, n = 3(4)	(8 +7 + 5 + 3 =) 3
4, 8, 12, ……, n = 0(4)	(6 + 1 + 5 + 1 =) 3

Per tant, per a qualsevol n natural $2^n + 3^n + 5^n + 7^n$, no és múltiple de 5.

Desembre 27: Demostreu que $\mathbf{2018^{2018}}$ no és suma de dos cubs perfectes

Nivell: Preparació OME.

Solució: Considerem congruències mòdul 7. Tenim:

$$\text{Si } n = 0(7) \Rightarrow n^2 = 0(7) \Rightarrow n^3 = 0(7)$$

$$\text{Si } n = 1(7) \Rightarrow n^2 = 1(7) \Rightarrow n^3 = 1(7)$$

$$\text{Si } n = 2(7) \Rightarrow n^2 = 4(7) \Rightarrow n^3 = 1(7)$$

$$\text{Si } n = 3(7) \Rightarrow n^2 = 2(7) \Rightarrow n^3 = 6(7)$$

$$\text{Si } n = 4(7) \Rightarrow n^2 = 2(7) \Rightarrow n^3 = 1(7)$$

$$\text{Si } n = 5(7) \Rightarrow n^2 = 4(7) \Rightarrow n^3 = 6(7)$$

$$\text{Si } n = 6(7) \Rightarrow n^2 = 6(7) \Rightarrow n^3 = 6(7)$$

Per la qual cosa:

$$(*)\ n^3 + m^3 = \begin{cases} 0(7) \\ 1(7) \\ 2(7) \\ 5(7) \\ 6(7) \end{cases}$$

Per altra banda, trobem el residu de la divisió de 2018^{2018} entre 7. Tenim:

$$2018 = 2(7) \Rightarrow 2018^{2018} = 2^{2018}(7)$$

Obtinguem els residus de la divisió de 2^n entre 7:

n	2^n
1, 4, 7, 10, …. , 1(3)	2(7)
2, 5, 8, 11, …. , 2(3)	4(7)
3, 6, 9, 12, … , 0(3)	1(7)

Com $2018 = 2(3) \Rightarrow 2^{2018} = 4(7)$. Així, doncs, $2018^{2018} = 4(7)$, el que contradiu (*). Per tant, 2018^{2018} no és suma de dos cubs perfectes.

Desembre 28-29: Per a quins valors de n, es compleix que $1^n+2^n+3^n+4^n+5^n+6^n+7^n+8^n+9^n$ és múltiple de 5?

Nivell: Preparació OME.

Solució: Veiem en quina xifra acaba cadascuna de las potències, per a distints valors de n:

Òbviament 1^n es 1, per a qualsevol valor de n

n	2^n acaba en
1, 5, 9, ………, n = 1(4)	2
2, 6, 10, ……, n = 2(4)	4
3, 7, 11, ……, n = 3(4)	8
4, 8, 12, ……, n = 0(4)	6

n	3^n acaba en
1, 5, 9, ………, n = 1(4)	3
2, 6, 10, ……, n = 2(4)	9
3, 7, 11, ……, n = 3(4)	7
4, 8, 12, ……, n = 0(4)	1

n	4^n acaba en
1, 3, 5, … , n = 1(2)	4
2, 4, 6, … , n = 0(2)	6

5^n sempre acaba en 5

6^n sempre acaba en 6

n	7^n acaba en
1, 5, 9, ………, n = 1(4)	7
2, 6, 10, ……, n = 2(4)	9
3, 7, 11, ……, n = 3(4)	3
4, 8, 12, ……, n = 0(4)	1

n	8^n acaba en
1, 5, 9, ………, n = 1(4)	8
2, 6, 10, ……, n = 2(4)	4
3, 7, 11, ……, n = 3(4)	2
4, 8, 12, ……, n = 0(4)	6

n	9^n acaba en
1, 3, 5, … , n = 1(2)	9
2, 4, 6, … , n = 0(2)	1

Per tant:

n	$1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n + 7^n + 8^n + 9^n$ acaba en
1, 5, 9, ………, n = 1(4)	(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 =) 5
2, 6, 10, ……, n = 2(4)	(1 + 4 + 9 + 6 + 5 + 6 + 9 + 4 + 1=) 5
3, 7, 11, ……, n = 3(4)	(1 + 8 +7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9 =) 5
4, 8, 12, ……, n = 0(4)	(1 + 6 + 1 +6 + 5 + 6 + 1 + 6 + 1 =) 3

Doncs, per a tot n natural no múltiple de 4, $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n + 7^n + 8^n + 9^n$ és múltiple de 5.

Desembre 30: Trobeu els enters z tals que $z^6 - 387z^3$ es un cub

Nivell: Preparació OME.

Solució: Òbviament z = 0 és una solució. Siga $z \neq 0$, tenim: $z^6 - 387z^3 = z^3\cdot(z^3 - 387)$. Per tant, $z^6 - 387z^3$ és un cub perfecte sii ho és $z^3 - 387$. Exigim, doncs, que $z^3 - 387 = n^3$ (*), amb $n \in Z$.

1.- (Solució Ignacio Larrosa @ilarrosac)

Si z = n + a, (*) porta a $3n^2a + 3na^2 + a^3 = 3^2\cdot 43$ (**) $\Rightarrow a(3n^2 + 3na + a^2) = 3^2\cdot 43$ (***)

De (**), com $3n^2a + 3na^2$ és múltiple de 3 $\Rightarrow a^3$ és múltiple de 3 $\Rightarrow$ a és múltiple de 3

Si a fora múltiple de 9, com $3n^2 + 3na + a^2$ és múltiple de 3 en (***) faltarien factors 3. Per tant

$a = \pm 3$

Si a = 3, (***) porta a n = 5 i n = - 8, i per tant a z = 8 i z = - 5. Si a = - 3 no hi ha solucions en (***)

2.- (Solució Danielo, @danielo_Gg)

$$z^3 - 387 = n^3 \Leftrightarrow z^3 - n^3 = 387 \Leftrightarrow (z - n)\cdot(z^2 + zn + n^2) = 387 = 3^2 \cdot 43$$

L'última equació porta a sis sistemes de dues equacions amb dues incògnites

$$\left.\begin{array}{c} z - n = 1 \\ z^2 + zn + n^2 = 387 \end{array}\right\}; \quad \left.\begin{array}{c} z - n = 3 \\ z^2 + zn + n^2 = 129 \end{array}\right\}; \quad \left.\begin{array}{c} z - n = 9 \\ z^2 + zn + n^2 = 43 \end{array}\right\}; \quad \left.\begin{array}{c} z - n = 43 \\ z^2 + zn + n^2 = 9 \end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{c} z - n = 129 \\ z^2 + zn + n^2 = 3 \end{array}\right\}; \quad \left.\begin{array}{c} z - n = 387 \\ z^2 + zn + n^2 = 1 \end{array}\right\}$$

Sols un d'ells té solucions admissibles

$$\left.\begin{array}{c} z - n = 3 \\ z^2 + zn + n^2 = 129 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (3 + n)^2 + (3 + n)\cdot n + n^2 = 129 \Leftrightarrow n^2 + 3n - 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 5 \Rightarrow z = 8 \\ n = -8 \Rightarrow z = -5 \end{cases}$$

3.- (Solució "força bruta")

Siga s∈Z definim com z = n + s. Tindrem:

$$z^3 - 387 = n^3 \;\Leftrightarrow\; (n + s)^3 - 387 = n^3 \;\Leftrightarrow (3s)n^2 + (3s^2)n + (s^3 - 387) = 0$$

Aquesta última és una equació diofàntica (de segon grau en n∈Z i de tercer grau en s∈Z). Trobem les solucions per a n. El discriminant per a n d'aquesta equació és:

$$\Delta = 9s^4 - 4 \cdot 3s \cdot (s^3 - 387) = 3s \cdot (1548 - s^3)$$

Si s < 0 (3s < 0 y s^3 < 0 d'on Δ < 0) la equació no té solucions. Si s > 0, la equació té solucions sii s < $\sqrt[3]{1548}$, es a dir sii s < 12.

Per a s = 1, l'equació és, $3n^2 + 3n - 386 = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\Delta} = \sqrt{9 + 4632} \notin N$

Per a s = 2, l'equació és, $6n^2 + 12n - 379 = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\Delta} = \sqrt{144 + 9096} \notin N$

Per a s = 3, l'equació és, $9n^2 + 27n - 360 = 0 \;\Rightarrow\; n = \frac{-27 \mp \sqrt{729 + 12960}}{18} = \begin{cases} -8 \\ 5 \end{cases}$

Per a s = 4, l'equació és, $312 + 48n - 323 = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\Delta} = \sqrt{2304 + 15504} \notin N$

Per a s = 5, l'equació és, $15n^2 + 75n - 262 = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\Delta} = \sqrt{5625 + 15720} \notin N$

Para s = 6, l'equació és, $18n^2 + 108n - 171 = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\Delta} = \sqrt{11664 + 12312} \notin N$

Per a s = 7, l'equació és, $21n^2 + 147n - 44 = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\Delta} = \sqrt{21609 + 3696} \notin N$

Per a s = 8, l'equació és, $24n^2 + 192n + 125 = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\Delta} = \sqrt{192^2 - 4 \cdot 24 \cdot 125} \notin N$

Per a s = 9, l'equació és, $27n^2 + 243n + 342 = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\Delta} = \sqrt{243^2 - 4 \cdot 27 \cdot 342} \notin N$

Per a s = 10, l'equació és, $30n^2 + 300n + 613 = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\Delta} = \sqrt{300^2 - 4 \cdot 30 \cdot 613} \notin N$

Per a s = 11, l'equació és, $33n^2 + 363n + 944 = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\Delta} = \sqrt{363^2 - 4 \cdot 33 \cdot 944} \notin N$

Les úniques solucions surten quan s = 3 i en aquest cas n = - 8 i n = 5, i per tant z = 3 – 8 = - 5 i z = 5 + 3 = 8.

Desembre 31: Quants naturals hi ha menors que 500 amb 12 divisors naturals?

Nivell: Preparació OME.

Solució: Recordem que:

1. Si $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ amb $\{p_i\}_{i=1}^{n}$ primers i exponents naturals, és la descomposició factorial de N en producte de primers, el nombre de divisors de N és:

$$\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1)$$

2. Els nombres primers són: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, ……

Per tant, si busquem els naturals N amb 12 divisors, si $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$són els exponents de la descomposició factorial de N en producte de primers, deu complir-se:

$$\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1) = 12 = 3 \cdot 2^2$$

I, per tant:

a) n = 1, $\alpha_1 + 1 = 12$, $\alpha_1 = 11$

b) n = 2, $(\alpha_1 + 1)\cdot(\alpha_2 + 1) = 3\cdot 4$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$

c) n = 2, $(\alpha_1 + 1)\cdot(\alpha_2 + 1) = 6\cdot 2$ $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 1$

d) n = 3, $(\alpha_1 + 1)\cdot(\alpha_2 + 1)\cdot(\alpha_3 + 1) = 2\cdot 2\cdot 3$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$

$\boxed{N = p_1^{11}}$

Com $2^{11} = 2048 > 500$ no hi ha cap natural menor que 500 amb 12 divisors amb aquesta configuració

$\boxed{N = p_1^2 \cdot p_2^3}$

$$N = 2^2 \cdot p_2^3 \quad \Rightarrow \quad p_2 < \sqrt[3]{\frac{500}{4}} = 5 \quad \Rightarrow \quad p_2 \in \{3\} \quad \Rightarrow \quad N = 108$$

$$N = 3^2 \cdot p_2^3 \quad \Rightarrow \quad p_2 < \sqrt[3]{\frac{500}{9}} \cong 3{,}81 \quad \Rightarrow \quad p_2 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 72$$

$$N = 5^2 \cdot p_2^3 \quad \Rightarrow \quad p_2 < \sqrt[3]{\frac{500}{25}} \cong 2{,}71 \quad \Rightarrow \quad p_2 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 200$$

$$N = 7^2 \cdot p_2^3 \quad \Rightarrow \quad p_2 < \sqrt[3]{\frac{500}{49}} \cong 2{,}16 \quad \Rightarrow \quad p_2 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 392$$

$N = 11^2 \cdot p_2^3 \quad \Rightarrow \quad p_2 < \sqrt[3]{\frac{500}{121}} \cong 1{,}6$ No hi ha nombres que complisquen el requisit

$\boxed{N = p_1^5 \cdot p_2}$

$$N = 2^5 \cdot p_2 \quad \Rightarrow \quad p_2 < \frac{500}{32} = 15{,}625 \quad \Rightarrow \quad p_2 \in \{3, 5, 7, 11, 13\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} N = 32 \cdot 3 = 96 \\ N = 32 \cdot 5 = 160 \\ N = 32 \cdot 7 = 224 \\ N = 32 \cdot 11 = 352 \\ N = 32 \cdot 13 = 416 \end{array}$$

$$N = 3^5 \cdot p_2 \quad \Rightarrow \quad p_2 < \frac{500}{3^5} \cong 2{,}05 \quad \Rightarrow \quad p_2 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 486$$

$N = 5^5 \cdot p_2 \quad \Rightarrow \quad p_2 < \frac{500}{5^5} 0{,}16$ No hi ha nombres que complisquen el requisit

$\boxed{N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ p_3^2}$

$$N = 2 \cdot 3 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{6}} \cong 9{,}12 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{5, 7\} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} N = 150 \\ N = 294 \end{matrix}$$

$$N = 2 \cdot 5 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{10}} \cong 7{,}07 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{3, 7\} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} N = 90 \\ N = 490 \end{matrix}$$

$$N = 2 \cdot 7 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{14}} \cong 5{,}97 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{3, 5\} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} N = 126 \\ N = 350 \end{matrix}$$

$$N = 2 \cdot 11 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{22}} \cong 4{,}76 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{3\} \quad \Rightarrow \quad N = 198$$

$$N = 2 \cdot 13 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{26}} \cong 4{,}38 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{3\} \quad \Rightarrow \quad N = 338$$

$$N = 2 \cdot 17 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{34}} \cong 3{,}83 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{3\} \quad \Rightarrow \quad N = 306$$

$$N = 2 \cdot 19 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{38}} \cong 3{,}62 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{3\} \quad \Rightarrow \quad N = 342$$

$$N = 2 \cdot 23 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{46}} \cong 3{,}29 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{3\} \quad \Rightarrow \quad N = 414$$

$N = 2 \cdot 29 \cdot p_3^2 \ \Rightarrow \ p_3 < \sqrt{\frac{500}{58}} \cong 2{,}93$ No hi ha nombres que complisquen el requisit

$$N = 3 \cdot 5 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{15}} \cong 5{,}77 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 60$$

$$N = 3 \cdot 7 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{21}} \cong 4{,}87 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 84$$

$$N = 3 \cdot 11 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{33}} \cong 3{,}89 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 132$$

$$N = 3 \cdot 13 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{39}} \cong 3{,}58 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 156$$

$$N = 3 \cdot 17 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{51}} \cong 3{,}13 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 204$$

$$N = 3 \cdot 19 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{57}} \cong 2{,}96 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 228$$

$$N = 3 \cdot 23 \cdot p_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_3 < \sqrt{\frac{500}{69}} 2{,}69 \quad \Rightarrow \quad p_3 \in \{2\} \quad \Rightarrow \quad N = 276$$

$$N = 3 \cdot 29 \cdot p_3^2 \;\Rightarrow\; p_3 < \sqrt{\frac{500}{87}} \cong 2{,}39 \;\Rightarrow\; p_3 \in \{2\} \;\Rightarrow\; N = 348$$

$$N = 3 \cdot 31 \cdot p_3^2 \;\Rightarrow\; p_3 < \sqrt{\frac{500}{93}} \cong 2{,}31 \;\Rightarrow\; p_3 \in \{2\} \;\Rightarrow\; N = 372$$

$$N = 3 \cdot 37 \cdot p_3^2 \;\Rightarrow\; p_3 < \sqrt{\frac{500}{111}} \cong 2{,}12 \;\Rightarrow\; p_3 \in \{2\} \;\Rightarrow\; N = 444$$

$$N = 3 \cdot 41 \cdot p_3^2 \;\Rightarrow\; p_3 < \sqrt{\frac{500}{123}} \cong 2{,}01 \;\Rightarrow\; p_3 \in \{2\} \;\Rightarrow\; N = 492$$

$N = 3 \cdot 43 \cdot p_3^2 \;\Rightarrow\; p_3 < \sqrt{\frac{500}{129}} \cong 1{,}96$ No hi ha nombres que complisquen el requisit

$$N = 5 \cdot 7 \cdot p_3^2 \;\Rightarrow\; p_3 < \sqrt{\frac{500}{35}} \cong 3{,}77 \;\Rightarrow\; p_3 \in \{2\} \;\Rightarrow\; N = 140$$

$$N = 5 \cdot 11 \cdot p_3^2 \;\Rightarrow\; p_3 < \sqrt{\frac{500}{55}} \cong 3{,}01 \;\Rightarrow\; p_3 \in \{2\} \;\Rightarrow\; N = 220$$

$$N = 5 \cdot 13 \cdot p_3^2 \;\Rightarrow\; p_3 < \sqrt{\frac{500}{65}} \cong 2{,}77 \;\Rightarrow\; p_3 \in \{2\} \;\Rightarrow\; N = 248$$

$$N = 5 \cdot 17 \cdot p_3^2 \;\Rightarrow\; p_3 < \sqrt{\frac{500}{85}} \cong 2{,}42 \;\Rightarrow\; p_3 \in \{2\} \;\Rightarrow\; N = 340$$

$$N = 5 \cdot 19 \cdot p_3^2 \;\Rightarrow\; p_3 < \sqrt{\frac{500}{95}} \cong 2{,}39 \;\Rightarrow\; p_3 \in \{2\} \;\Rightarrow\; N = 380$$

$$N = 5 \cdot 23 \cdot p_3^2 \;\Rightarrow\; p_3 < \sqrt{\frac{500}{115}} \cong 2{,}08 \;\Rightarrow\; p_3 \in \{2\} \;\Rightarrow\; N = 460$$

$N = 5 \cdot 29 \cdot p_3^2 \;\Rightarrow\; p_3 < \sqrt{\frac{500}{145}} \cong 1{,}85$ No hi ha nombres que complisquen el requisit

$$N = 7 \cdot 11 \cdot p_3^2 \;\Rightarrow\; p_3 < \sqrt{\frac{500}{77}} \cong 2{,}54 \;\Rightarrow\; p_3 \in \{2\} \;\Rightarrow\; N = 308$$

$$N = 7 \cdot 13 \cdot p_3^2 \;\Rightarrow\; p_3 < \sqrt{\frac{500}{91}} \cong 2{,}34 \;\Rightarrow\; p_3 \in \{2\} \;\Rightarrow\; N = 364$$

$$N = 7 \cdot 17 \cdot p_3^2 \;\Rightarrow\; p_3 < \sqrt{\frac{500}{119}} \cong 2{,}04 \;\Rightarrow\; p_3 \in \{2\} \;\Rightarrow\; N = 476$$

$N = 7 \cdot 19 \cdot p_3^2 \;\Rightarrow\; p_3 < \sqrt{\frac{500}{133}} \cong 1{,}93$ No hi ha nombres que complisquen el requisit

$N = 11 \cdot 13 \cdot p_3^2 \;\Rightarrow\; p_3 < \sqrt{\frac{500}{143}} \cong 1{,}86$ No hi ha nombres que complisquen el requisit

En total: (4 + 6 + 11 + 11 + 6 + 3 =) 41 nombres menors que 500 tenen 12 divisors

NOTA. - El càlcul tediós per a el cas $\mathrm{N} = \mathrm{p}_1 \cdot \mathrm{p}_2 \cdot\ \mathrm{p}_3^2$ pot evitar-se de la següent manera:

Busquem naturals N de la forma $\mathrm{N} = 3 \cdot \mathrm{p}_2 \cdot\ \mathrm{p}_3^2 < 500$. Com el menor valor possible de p_3 és 2, tenim: $3 \cdot p_2 \cdot 2^2 \leq \mathrm{N} = \mathrm{p}_1 \cdot \mathrm{p}_2 \cdot\ \mathrm{p}_3^2 < 500 \Rightarrow 3 \cdot \mathrm{p}_2 \cdot 4 < 500 \Rightarrow \mathrm{p}_2 < \frac{500}{12} = 41,\hat{6} \Rightarrow$ p_2 és un primer major que 3 i menor o igual a 41 $\Rightarrow p_2 \in \{5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41\}$. Ara, quants naturals aporta cadascun d'ells?

Si considerem el menor valor possible de p_2, que es 5, tenim: $\mathrm{N} = 3 \cdot 5 \cdot\ \mathrm{p}_3^2 < 500 \Rightarrow \mathrm{p}_3 < 5{,}7$ i com p_3 no pot ser 3 ni 5 sols pot ser 2. Es a dir $\mathrm{N} = 3 \cdot 5 \cdot\ \mathrm{p}_3^2$ sols aporta un nombre. Com la funció $y = \sqrt{\frac{500}{3x}}$ es decreixent, valors de p_2 posteriors a 5 sols aporten un nombre. Es a dir, la configuració $\mathrm{N} = 3 \cdot \mathrm{p}_2 \cdot\ \mathrm{p}_3^2$ aporta 11 nombres

Busquem naturals N de la forma $\mathrm{N} = 2 \cdot \mathrm{p}_2 \cdot\ \mathrm{p}_3^2 < 500$. Com el menor valor possible de p_3 és 3, tenim: $2 \cdot p_2 \cdot 3^2 \leq \mathrm{N} = \mathrm{p}_1 \cdot \mathrm{p}_2 \cdot\ \mathrm{p}_3^2 < 500 \Rightarrow 2 \cdot \mathrm{p}_2 \cdot 9 < 500 \Rightarrow \mathrm{p}_2 < \frac{500}{18} = 27,\hat{7} \Rightarrow$ p_2 es un primer major que 2 i menor o igual a 27 $\Rightarrow p_2 \in \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$. Ara, quants naturals aporta cadascun d'ells?

Veiem quants aporta un primer q. Notem que $\mathrm{N} = 2 \cdot \mathrm{q} \cdot\ \mathrm{p}_3^2 < 500 \Rightarrow \mathrm{p}_3 < \sqrt{\frac{500}{2\mathrm{q}}}$

q	$\sqrt{\frac{500}{2q}}$	condició sobre p_3	primers que compleixen la condició	nombres generats
3	9,12..	$2 \neq p_3 \neq 3$, $p_3 \leq 9$	5, 7	2
5	7,37..	$2 \neq p_3 \neq 5$, $p_3 \leq 7$	3, 7	2
7	5,97..	$2 \neq p_3 \neq 7$, $p_3 \leq 5$	3,5	2
11	4,76..	$2 \neq p_3 \neq 11$, $p_3 \leq 4$	3	1

I a partir de 11 cada primer possible sols aporta un nombre. En definitiva, el format $\mathrm{N} = 2 \cdot \mathrm{p}_2 \cdot\ \mathrm{p}_3^2$ aporta

p_2	3	5	7	11	13	17	19	23	total
N	2	2	2	1	1	1	1	1	11