SOLUCIONS GENER 2018

Solucions extretes del llibre:

XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA 2014

Obtenible en http://www.concursoprimavera.es#libros

NIVELL: Segon cicle de l'ESO

AUTORS: Col·lectiu "Concurso de Primavera". Comunitat de Madrid

Gener 1: Siga n un natural. Quin és el natural més proper al quadrat de $n+\frac{1}{2}$?

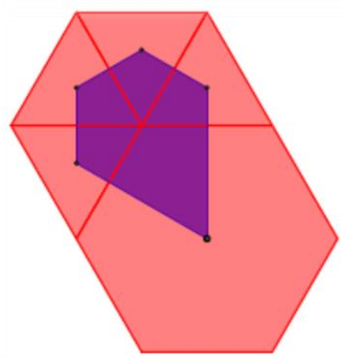
Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Degut a que:

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 = n^2+n+\frac{1}{4}$$

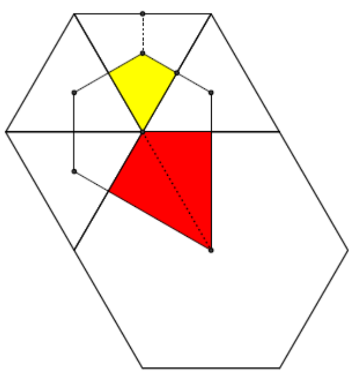
el natural més proper al quadrat de $n+\frac{1}{2}$ és $n^2 + n$.

Gener 2-3: En dos costats consecutius d'un hexàgon regular s'han dibuixat quatre triangles equilàters. Amb els centres dels polígons regulars s'ha construït un pentàgon. Calcular l'àrea del pentàgon



Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: El pentàgon es compon d'una peça vermella i 4 peces grogues. La peça vermella és la sisena part del hexàgon. La peça groga és la tercera part d'un triangle equilàter, que és la sisena part de l'hexàgon. Per tant, quatre d'aquestes peces equivalen a 4/18 del hexàgon. El pentàgon correspon a (1/6 + 4/18 =) 7/18 del hexàgon



Gener 4: Calcular el valor del producte:

$$\prod_{i=2}^{2017}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)$$

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Tenim:

$$\prod_{i=2}^{2017}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2016^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2017^2}\right)$$

$$=\left(\frac{2^2-1}{2^2}\right)\cdot\left(\frac{3^2-1}{3^2}\right)\cdot\left(\frac{4^2-1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{2016^2-1}{2016^2}\right)\cdot\left(\frac{2017^2-1}{2017^2}\right)$$

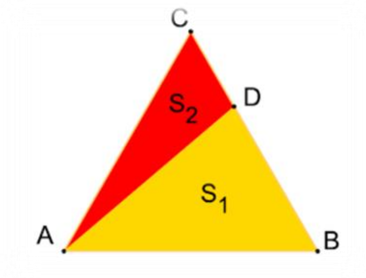
$$=\frac{(2-1)\cdot(2+1)}{2\cdot 2}\cdot\frac{(3-1)\cdot(3+1)}{3\cdot 3}\cdot\frac{(4-1)\cdot(4+1)}{4\cdot 4}\cdot\ldots\cdot\frac{(2016-1)\cdot(2016+1)}{2016\cdot 2016}$$

$$\cdot\frac{(2017-1)\cdot(2017+1)}{2017\cdot 2017}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\ldots\cdot\frac{2015\cdot 2017}{2016\cdot 2016}\cdot\frac{2016\cdot 2018}{2017\cdot 2017}$$

Notem que (excepció feta de la primera i última fracció) el primer factor del denominador és el segon factor del numerador de la fracció anterior i que el segon factor del denominador és el primer factor del numerador de la fracció següent. Al simplificar queda doncs:

$$\prod_{i=2}^{2017}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{1}{2\cdot 2}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{2018}{2017}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2018}{2017}=\frac{1009}{2017}$$

Gener 5-6: En un triangle equilàter ΔABC de costat 4, s'agafa D a CB. Si S_1 és l'àrea del triangle ΔADB i S_2 és l'àrea del triangle ΔADC, quin és el major valor del producte $S_1 \cdot S_2$?



Nivell: A partir de 3ESO.

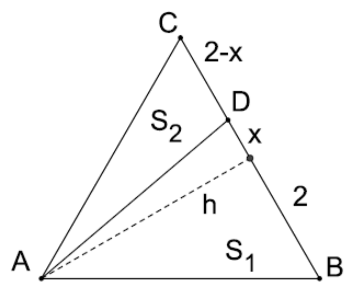
Solució: Siga h l'alçada per el vèrtex A. Per Pitàgores:

$$h=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$$

Tindrem, al calcular àrees:

$$S_1=\frac{(2+x)\cdot 2\sqrt{3}}{2};\quad S_2=\frac{(2-x)\cdot 2\sqrt{3}}{2}$$

$$S_1\cdot S_2=3\cdot(4-x^2)$$



Òbviament el producte $S_1 \cdot S_2$ és màxim quan x=0, i en aquest cas el producte val 12

Gener 7: Si el nombre de nou xifres: N = 19700019d és primer, que dígit és el representat per d?

Nivell: A partir de 1ESO.

Solució: Per descomptat d$\notin$\{0, 2, 4, 6, 8\}, doncs en cas contrari seria parell i per tant divisible per 2 i d'aquí, no primer. Deu complir-se, doncs, que d$\in$\{1, 3, 5, 7, 9\}. Però si d = 5 el nombre és múltiple de 5. A més la suma de les xifres del nombre és 27 + d. D'ací, si d = 3 el nombre és múltiple de 3 i si d = 9, el nombre és múltiple de 9. Si d = 7 tenim:

$$197000197 = 197 \cdot 1000000 + 197 = 197 \cdot (1000000 + 1) = 197 \cdot 1000001$$

i el nombre deuria ser múltiple de 197. Sols queda la possibilitat de que d = 1.

<u>Gener 8-9:</u> Fa dos anys el nombre d'estudiants del meu centre era un quadrat perfecte. El any passat es matricularen 100 estudiants més que l'anterior i el nou nombre resultà ser un quadrat perfecte més un. Aquest any es matricularen 100 estudiants més que l'any anterior i de nou el nombre de estudiants és un quadrat perfecte. Quants estudiants es matricularen aquest any?

<u>Nivell:</u> Preparació OMS de segon cicle.

<u>Solució:</u> Siga N el nombre d'estudiants matriculats el primer any. Tindrem passant la informació de l'enunciat a equacions:

$$\left.\begin{array}{c} N = x^2 \\ N + 100 = y^2 + 1 \\ N + 200 = z^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x^2 + 100 = y^2 + 1 \\ x^2 + 200 = z^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 100 = z^2 - y^2 - 1 \Rightarrow 101 = (z + y) \cdot (z - y)$$

I com 101 és primer i z + y > z – y, l'equació última és equivalent al sistema de dues equacions amb dues incògnites:

$$\left.\begin{array}{c} z + y = 101 \\ z - y = 1 \end{array}\right\}$$

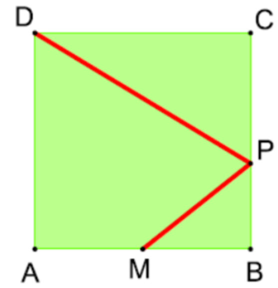
fàcilment resoluble i que aporta la solució $N = x^2 = 2401$.

<u>Gener 10:</u> Quin és el major residu possible quan divideixes un nombre de dues xifres entre la suma d'aquestes?

<u>Nivell:</u> Preparació OMS de segon cicle.

<u>Solució:</u> En una divisió entera el residu sempre ha de ser menor que el divisor. Com es demana el major residu, anem a començar provant amb el major divisor possible: 9 + 9 = 18. El residu de la divisió de 99 entre 18 és 9. El següent divisor possible és: 9 + 8 = 17. El residu de la divisió de 98 (89) entre 17 és 13 (4). El següent divisor possible és 9 + 7 = 8 + 8 = 16. El residu de la divisió de 97 (88, 79) entre 16 és 1 (8, 15). El següent divisor possible és 15. Però ja no es necessari seguir: La resta de les divisions per nombres menors o iguals a 15 són menors que 15. En definitiva, el major residu possible en dividir un nombre de dues xifres per la suma de les xifres és 15 que surt en dividir 79 entre 16.

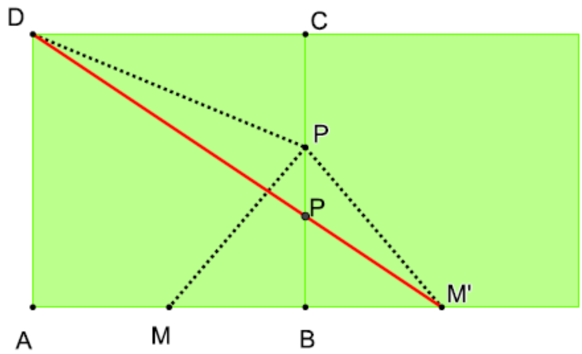
<u>Gener 11-12:</u> En un quadrat ABCD de 2 m de costat, M es el punt mitjà del costat AB i P és un punt qualsevol del costat CB. Trobeu el menor valor possible de DP + PM.



<u>Nivell:</u> Preparació OMS de segon cicle.

<u>Solució:</u> Dibuixem el simètric del quadrat ABCD, respecte de l'aresta CB. Siga M' el simètric de M respecte de CB. El menor valor de DP + DM surt quan P està en el segment que uneix D i M'. Aplicant Pitàgores, tenim que el menor valor possible de DP + PM és:

$$\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$$



<u>Gener 13:</u> La suma dels m primers imparells és 212 més la suma dels n primers parells. Quina és la suma de tots els valors que pot prendre n?

<u>Nivell:</u> Preparació OMS de segon cicle.

<u>Solució:</u> La suma dels primers m senars és: 1 + 3+ 5+ … + (2m − 1) = $\frac{1+2m-1}{2}\cdot m = m^2$. La suma dels primers n parells és: 2 + 4+ …. + 2n =$\frac{2+2n}{2}\cdot n = n^2+n$. Per tant, deu complir-se $m^2 = 212 + n + n^2$.

Si definim d ($\in$N) com m = n + d, tenim: $(n + d)^2 = 212 + n + n^2 \Rightarrow 2dn + d^2 = 212 + n \Rightarrow n = \frac{212-d^2}{2d-1}$

Donant valors a d, tenim:

$$d=1 \;\Rightarrow\; n=\frac{212-1^2}{2\cdot 1-1}=\frac{211}{1}=211; \qquad d=2 \;\Rightarrow\; n=\frac{212-2^2}{2\cdot 2-1}=\frac{208}{3}\notin \mathbb{N}$$

$$d=3 \;\Rightarrow\; n=\frac{212-3^2}{2\cdot 3-1}=\frac{203}{5}\notin \mathbb{N}; \qquad d=4 \;\Rightarrow\; n=\frac{212-4^2}{2\cdot 4-1}=\frac{196}{7}=28$$

$$d=5 \;\Rightarrow\; n=\frac{212-5^2}{2\cdot 5-1}=\frac{187}{9}\notin \mathbb{N}; \qquad d=6 \;\Rightarrow\; n=\frac{212-6^2}{2\cdot 6-1}=\frac{176}{11}=16$$

$$d=7 \;\Rightarrow\; n=\frac{212-7^2}{2\cdot 7-1}=\frac{163}{13}\notin \mathbb{N}; \qquad d=8 \;\Rightarrow\; n=\frac{212-8^2}{2\cdot 8-1}=\frac{148}{15}\notin \mathbb{N}$$

$$d=9 \;\Rightarrow\; n=\frac{212-9^2}{2\cdot 9-1}=\frac{131}{17}\notin \mathbb{N}; \qquad d=10 \;\Rightarrow\; n=\frac{212-10^2}{2\cdot 10-1}=\frac{112}{19}\notin \mathbb{N}$$

$$d=11 \;\Rightarrow\; n=\frac{212-11^2}{2\cdot 11-1}=\frac{91}{21}\notin \mathbb{N}; \qquad d=12 \;\Rightarrow\; n=\frac{212-12^2}{2\cdot 12-1}=\frac{68}{23}\notin \mathbb{N}$$

$$d=13 \;\Rightarrow\; n=\frac{212-13^2}{2\cdot 13-1}=\frac{43}{25}\notin \mathbb{N}; \qquad d=14 \;\Rightarrow\; n=\frac{212-14^2}{2\cdot 14-1}=\frac{16}{27}\notin \mathbb{N}$$

No fa falta seguir, valors més grans de d aporten menor numerador i major denominador i per tant valors de $n < 1$, que no són admissibles. Hi ha únicament, tres valors de n: 211, 28 i 16 amb suma 255.

Gener 14: En un triangle rectangle de hipotenusa 4 cm, la suma dels seus catets és $\sqrt{18}$ cm. Calcular l'àrea del triangle

Nivell: Preparació OMS de primer cicle.

Solució: Siguen x i y els catets del triangle rectangle. Al aplicar Pitàgores tindrem $x^2 + y^2 = 16$. Per altra part, de l'enunciat, $x + y = \sqrt{18}$. Tenim format el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=16 \\ x+y=\sqrt{18} \end{array}\right\}$$

que no cal resoldre, puig, elevant al quadrat la segona equació tenim:

$$18=(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=16+2xy \;\Rightarrow\; \text{àrea}=\frac{x\cdot y}{2}=\frac{\frac{18-16}{2}}{2}=\frac{1}{2}$$

Gener 15: Al sumar 329 al número de tres xifres 2A4 obtenim 5B3. Si 5B3 és múltiple de 3, quin és el major valor possible de A?

Nivell: A partir de 1ESO.

Solució 1: Ja que 5B3 és múltiple de 3, la suma de les seues xifres deu ser múltiple de 3. La suma de xifres és 8 + B, por el que B deu ser 1, 4 o 7.

Si B = 1 $\Rightarrow$ 2A4 = 513 – 329 = 184 $\Rightarrow$ 2 = 1 (al comparar les centenes). Por el que, B $\neq$ 1

Si B = 4 $\Rightarrow$ 2A4 = 543 – 329 = 214 $\Rightarrow$ A = 1.

Si B = 7 $\Rightarrow$ 2A4 = 573 – 329 = 244 $\Rightarrow$ A = 4.

El major possible valor d'A és 4.

Solució 2: Al tenir-se:

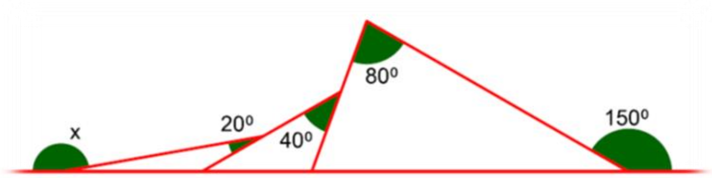
$$\begin{array}{cccc} & 3 & 2 & 9 \\ + & 2 & A & 4 \\ \hline & 5 & B & 3 \end{array}$$

deu de complir-se que 3 + A = B. Com el valor més gran de B és 7, el valor més gran d'A és 4.

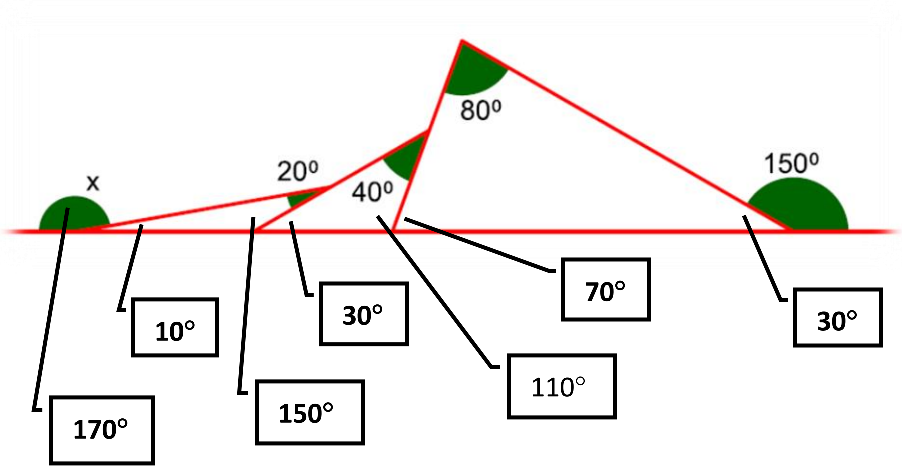
Gener 16-17: En la figura adjunta, quin és el valor de l'angle x?

Nivell: A partir de 2ESO.

Solució: Apliquem que la suma dels



tres angles d'un triangle es 180°. Tindrem de dreta a esquerra



Gener 18: Trobeu el menor i major valor possible de n, tal que n·(n+1) done residu 1 al dividir-lo per 3

Nivell: Preparació OMS de primer cicle.

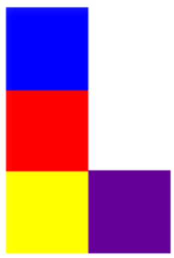
Solució: Si n és múltiple de 3 $\Rightarrow$ n·(n + 1) és múltiple de 3 i no pot donar residu 1.

Si n dona residu 1 al dividir-lo per 3 $\Rightarrow$ (n + 1) dona resto 2 al dividir-lo per 3 $\Rightarrow$ n·(n + 1) dona residu (1·2 =) 2 al dividir-lo per 3, per tant, tampoc pot donar residu 1.

Si n dona residu 2 al dividir-lo per 3 $\Rightarrow$ (n + 1) és múltiple de 3 $\Rightarrow$ n·(n + 1) és múltiple de 3 i no pot donar residu 1.

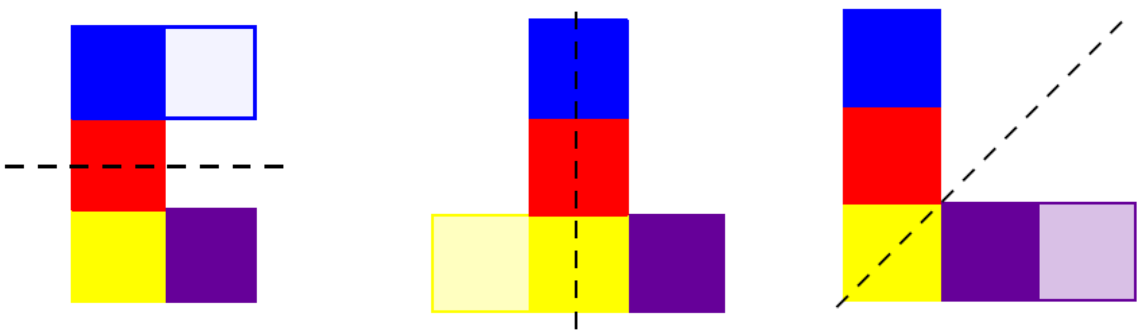
Per tant, n·(n + 1) mai dona residu 1 al ser dividit per 3

Gener 19-20: ¿De quantes maneres podem afegir un quadrat igual als quatre de la figura per a que la figura resultant tinga al menys un eix de simetria?



Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Hi ha tres maneres d'afegir un quadrat idèntic als de la figura per a que es tinga al menys un eix de simetria



Gener 21: Trobeu el major natural que divideix a tots els termes de la successió $a_n = n^5 - n$

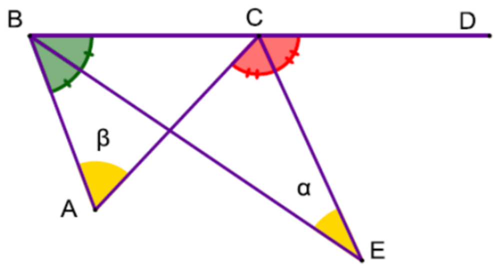
Nivell: Preparació OMS de segon cicle.

Solució: Tenim $n^5 - n = (n - 1)\cdot n\cdot(n + 1)\cdot(n^2 + 1)$. Per tant, cada terme de la successió és múltiple del producte de tres naturals consecutius. Per tant, cada terme de la successió és múltiple de 3 (ja que en tres naturals consecutius hi ha un que és múltiple de 3). A més, tenim:

n acaba en	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^5 acaba en	1	2	3	4	5	6	7	8	9

per el que $n^5 - n$ acaba en 0. O en altres paraules cada terme és múltiple de 10. Tenim, doncs, que cada terme és múltiple de 30. Com, a més a més, el segon terme és 30, no pot haver-hi un divisor major.

Gener 22-23: En la figura, $\angle ABE = \angle EBC$ y $\angle ACE = \angle ECD$. Si $\alpha = \angle CEB$, trobeu l'angle $\angle BAC = \beta$.



Nivell: Preparació OMS de segon cicle.

Solució: Anomenem x a la meitat de l'angle verd i y a la meitat de l'angle roig. Tindrem, en el triangle ΔABC:

$2x + \beta + 180 - 2y = 180 \Rightarrow 2x - 2y + \beta = 0$ (*)

i en el triangle ΔBCE:

$x + \alpha + 180 - 2y + y = 180 \Rightarrow x - y + \alpha = 0 \Rightarrow 2x - 2y + 2\alpha = 0$ (**)

De les equacions (*) y (**) tenim: $\beta = 2\alpha$

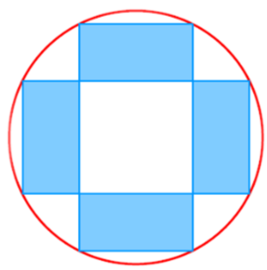
Gener 24: Trobeu el màxim de l'expressió $x - x^2$ quant x es un real qualsevol

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: $y = x - x^2$ es una paràbola invertida ($a = -1 < 0$), i per tant $x - x^2 \le y_V$ (= l'ordenada del vèrtex de la paràbola). Com

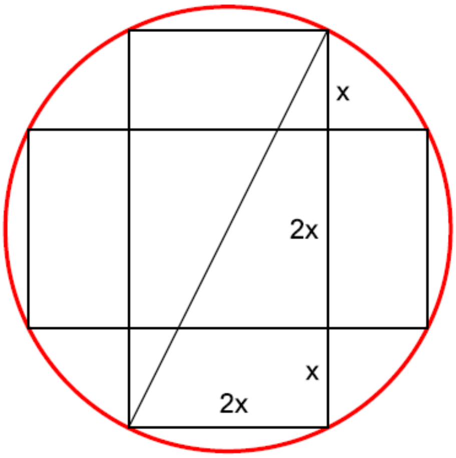
$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2\cdot(-1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow y_V = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Gener 25-26: En la figura es té una circumferència de radi 1 i els rectangles dibuixats són tots iguals amb un costat doble que l'altre. Quina és l'àrea de cada rectangle?



Nivell: A partir de 2ESO.

Solució: Dibuixem el diàmetre de la figura d'abaix. Al aplicar Pitàgores al triangle rectangle generat, tenim:



$$2^2 = (2x)^2 + (4x)^2,\ \ 4 = 4x^2 + 16x^2 = 20x^2$$

$$x^2 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$\text{Àrea} = 2x^2 = 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

Gener 27: Quants nombres de 5 xifres, totes diferents, compleixen que la xifra de les unitats és la suma de las restants?

Nivell: Preparació OMS de segon cicle.

Solució: Veiem les diferents possibilitats que hi ha en la xifra de les unitats i en las restants xifres.

xifra en les unitats	xifres en las demés posicions		
6	0, 1, 2, 3		
7	0, 1, 2, 4		
8	0, 1, 2, 5,	0, 1, 3, 4	
9	0, 1, 2, 6	0, 1, 3, 5	0, 2, 3, 4

Veiem els que acaben en 6: Per a la primera posició tenim 3 candidats (no participa la xifra 0, puig, el nombre no tindria cinc xifres). Per a la segon posició tenim altres tres candidats (ja que ara no participa la xifra elegida en la primera posició i si participa el 0). Per a la tercera posició tenim dos candidats. Per a la quarta posició tenim un candidat i per a las unitats sols tenim a la xifra 6. En total: (3·3·2·1·1 =) 18 nombres.

El mateix ocorre amb cada grup associat a cadascuna de les possibles unitats (7, 8, 9).

En total surten (18· 7 =) 126 nombres que compleixen el requisit exigit en l’enunciat.

Gener 28: En el triangle ∆ABC, amb BC=13, CA=14 i AB=15, trobeu l’alçada per B

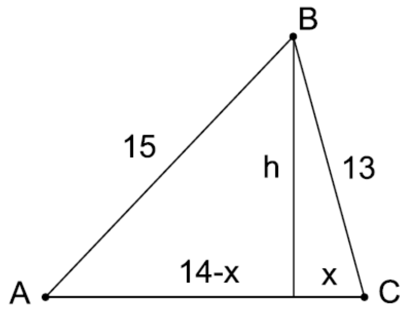
Nivell: Preparació OMS de segon cicle.

Solució: Siga h la altura per B. Queden definits dos triangles rectangles. Al aplicar sobre ells el teorema de Pitàgores, tenim:

$$\left.\begin{array}{r}15^2 = h^2 + (14 - x)^2 \\ 13^2 = x^2 + h^2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}h^2 = 15^2 - (14 - x)^2 \\ h^2 = 13^2 - x^2\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \;\; 225 - 196 + 28x = 169 \;\; \Rightarrow \;\; 28x = 140$$

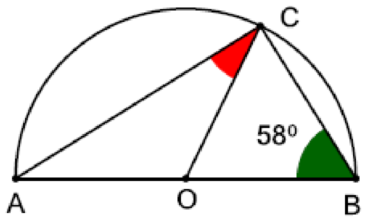
$$\Rightarrow \;\; x = 5; \;\; h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$



Gener 29: En una circumferència de centre O i diàmetre AB, es té una corda BC. Si ∠OBC=58º, quant mesura l'angle ∠OCA?

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Como OB = OC (= radi circumferència) tenim que ∠OCB = ∠CBO = 58°



Per altra banda (angle central = ∠AOB = 2·∠ACB ⇒) ∠ACB = 90°. D'ací:

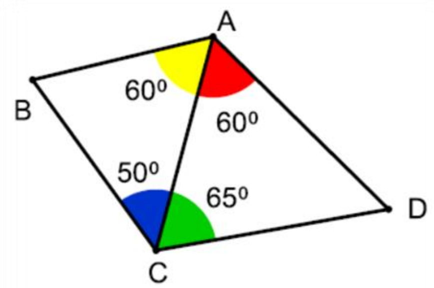
∠ACO = ∠ACB - ∠OCB = 90° - 58° = 32°

Gener 30-31: Ordeneu els cinc segments de la figura per la seua longitud.

Nivell: Preparació OMS de segon cicle.

Solució: Aplicarem que en un triangle a major angle se li oposa major costat.

En ΔACD, tenim que ∠D = (180° - (60° + 65°)=) 55°, i aplicant l'anterior: AC < CD < AD.



En ΔABC, tenim ∠B = (180° - (60° + 50°)=) 70°, i aplicant l'anterior: AB < BC < AC. I en definitiva:

AB < BC < AC < CD < AD