SOLUCIONS FEBRER 2018

AUTOR: Rafael Martínez Calafat. Professor jubilat de Matemàtiques

Nivell: PROBLEMES PER A LA PREPARACIÓ DE LA OME.

Febrer 1: Quins són els més petits subconjunts d'A = {1, 2, .., 100} que permeten assegurar que la suma de al menys dos dels que queden en el subconjunt siga un número imparell?

Nivell: Preparació OME.

Solució: Perquè la suma de dos nombres done nombre imparell, un d'ells ha de ser parell i l'altre ha de ser imparell. Per tant, tots els subconjunts que tinguen un parell i un imparell compleixen el requisit que almenys la suma de dos dels elements siga imparell. Com busquem els subconjunts més petits tenim que aquests són els subconjunts amb sols dos elements: un parell altre imparell, per exemple: {1, 2}.

Febrer 2: Trobeu el menor valor de k de manera que A= {1, 2, 3, ..., 53, 54} es puga particionar en k subconjunts complint cadascun d'ells que la suma de dos qualssevol dels seus elements no és múltiple de 5

Nivell: Preparació OME.

Solució: Els múltiples de 5 inclosos en A són: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 i 50. Si dos qualssevol d'ells estan en un mateix subconjunt de la partició aleshores que en eixe subconjunt hi ha dos nombres amb suma, un múltiple de 5. Per tant, cadascun dels nombres anteriors deu estar en un únic subconjunt de la partició. En altres paraules, el nombre k no pot ser menor que 10.

Per altra banda, amb 10 subconjunts podem complir l'exigit en l'enunciat:

$$A_1 = \{5, 1, 13, 26, 38, 51\}$$

$$A_2 = \{10, 2, 14, 27, 39, 52\}$$

$$A_3 = \{15, 3, 16, 28, 41, 53\}$$

$$A_4 = \{20, 4, 17, 29, 42, 54\}$$

$$A_5 = \{25, 6, 18, 31, 43\}$$

$$A_6 = \{30, 7, 19, 32, 44\}$$

$$A_7 = \{35, 8, 21, 33, 46\}$$

$$A_8 = \{40, 9, 22, 34, 47\}$$

$$A_9 = \{45, 11, 23, 36, 48\}$$

$$A_{10} = \{50, 12, 24, 37, 49\}$$

En definitiva, per a complir l'exigit és necessari i suficient que k = 10

Febrer 3-4: Siga N el nombre format per n uns. Si multipliquem N per un nombre de m dígits, obtenim un nombre amb n+m-1 o amb n+m dígits. Trobeu el nombre S de m dígits de manera que N·(S-1) té n+m-1 dígits i N·S té n+m dígits (n > m-1)

Nivell: Preparació OME.

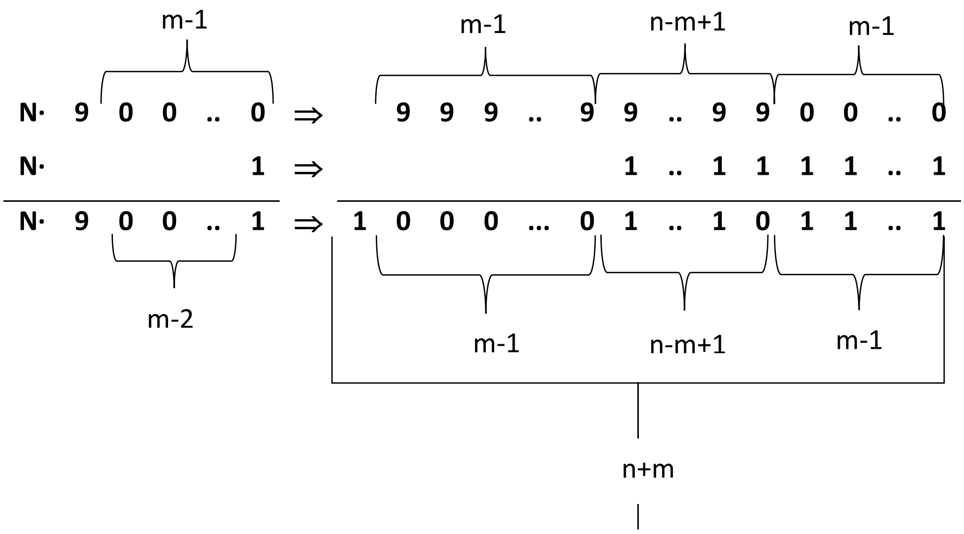
Solució: Siga

$$\mathrm{N} = \underbrace{111\ldots\ldots1}_{\mathrm{n}}$$

Tenim que al multiplicar N per 9 aconseguim el major nombre amb n dígits: $\underbrace{999\ldots..9}_{\mathrm{n}}$ Si al 9 li afegim m – 1 zeros obtenim:

$$\mathrm{N}\cdot 9\underbrace{00\ldots.0}_{\mathrm{m-1}} = \underbrace{\overbrace{999.\ldots9}^{\mathrm{n}}\underbrace{00\ldots.0}_{\mathrm{m-1}}}_{\mathrm{n+m-1}}$$

I com n > m – 1, al sumar al nombre anterior el nombre N alguns dels últims uns se solaparan amb alguns nous, afegint, al sumar, un dígit als ja existents, aconseguint un nombre amb n + m dígits:



El nombre buscat és $9\underbrace{000..0}_{\mathrm{m-2}}1$

Febrer 5: Trobeu els naturals que compleixen:

$$\sqrt[3]{\mathrm{x}} + \sqrt{\mathrm{y}} = 10$$

Nivell: Preparació OME.

Solució: Fem $\mathrm{u} = \sqrt[3]{\mathrm{x}}, \mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{y}}$. Aleshores l'equació proposta es transforma en: u + v = 10 les solucions de la qual, són (1, 9); (2, 8); (3, 7); (4, 6); (5, 5); (6, 4); (7, 3); (8, 2) y (9, 1). Per tant, les solucions per a x i y són:

u	v	x = u^3	y = v^2
1	9	1	81
2	8	8	64
3	7	27	49
4	6	64	36
5	5	125	25
6	4	216	16
7	3	343	9
8	2	512	2
9	1	729	1

Febrer 6: Quants naturals són solució de la inequació:

$$(x-2017)^{2017}\cdot(x-2018)^{2018}<0$$

Nivell: Preparació OME.

Solució: Òbviament x = 2017 o x = 2018, no són solucions de la inequació, ja que qualsevol d'ells fa que el producte siga 0. Tenim, considerant valors de x diferents de 2017 i 2018:

$$(x-2017)^{2017}\cdot(x-2018)^{2018}=(x-2017)\cdot(x-2017)^{2016}\cdot(x-2018)^{2018}$$
$$=(x-2017)\cdot((x-2017)^{1008}\cdot(x-2018)^{1009})^2$$

Y, ja que, $((x-2017)^{1008}\cdot(x-2018)^{1009})^2>0$ (al ser un quadrat amb base no nul·la), la inequació proposada és equivalent a x – 2017 < 0, que té per solucions naturals: {1, 2, 3, …. , 2016}. La inequació té, puig, 2016 solucions naturals.

Febrer 7: Demostreu que, donat un natural n, existeix una successió de n naturals consecutius de manera que cap d'ells es primer.

Nivell: Preparació OME.

Solució: Siga donat n. Considerem (n + 1)! = N. Tenim que N és múltiple de 2, 3, 4, ……, n i n + 1. Aleshores:

N + 2 és múltiple de 2

N + 3 és múltiple de 3

N + 4 és múltiple de 4

……………………………..

N + n és múltiple de n

N + n + 1 és múltiple de n + 1

És una col·lecció de n naturals consecutius tots i cada un d'ells compostos.

Febrer 8: Donat el conjunt A = {1, 2, ..., 84, 85}, quins números hem de llevar perquè en extraure tres diferents dels que queden, almenys, la suma dels quadrats de dos d'ells siga múltiple de 8?

Nivell: Preparació OME.

Solució: Recordem les congruències mòdul 8:

$$x = 0(8) \Rightarrow x^2 = 0(8)$$
$$x = 1(8) \Rightarrow x^2 = 1(8)$$
$$x = 2(8) \Rightarrow x^2 = 4(8)$$
$$x = 3(8) \Rightarrow x^2 = 1(8)$$
$$x = 4(8) \Rightarrow x^2 = 0(8)$$
$$x = 5(8) \Rightarrow x^2 = 1(8)$$
$$x = 6(8) \Rightarrow x^2 = 4(8)$$
$$x = 7(8) \Rightarrow x^2 = 1(8)$$

Amb el que:

$x^2 + y^2$	0(8)	1(8)	4(8)
0(8)	0(8)	1(8)	4(8)
1(8)	1(8)	2(8)	5(8)
4(8)	4(8)	5(8)	0(8)

Es a dir, la suma de quadrats de dos nombres és múltiple de 8 sii els nombres són ambdos de la classe 0(8) o de la classe 4(8).

Per tant, si extraiem els números de les classes 1(8), 3(8), 5(8) i 7(8), (és a dir A queda format pels números que en dividir-los per 8 donen residu 0 o 2 o 4 o 6, és a dir pels nombres parells menors que 85) podem assegurar que extrets tres dels que queden, almenys la suma dels quadrats de dos d'ells és múltiple de 8: Si dels tres, dos pertanyen a la mateixa classe la suma de els quadrats d'aqueixos dos números és múltiple de 8. Si els tres pertanyen a classes diferents, tenim:

$$x = 0(8) \Rightarrow x^2 = 0(8)$$
$$y = 2(8) \Rightarrow y^2 = 4(8)$$
$$z = 4(8) \Rightarrow z^2 = 0(8)$$

aleshores $x^2 + z^2$ és múltiple de 8

$$x = 0(8) \Rightarrow x^2 = 0(8)$$
$$y = 6(8) \Rightarrow y^2 = 4(8)$$
$$z = 4(8) \Rightarrow z^2 = 0(8)$$

aleshores $x^2 + z^2$ és múltiple de 8

$$x = 6(8) \Rightarrow x^2 = 4(8)$$
$$y = 2(8) \Rightarrow y^2 = 4(8)$$
$$z = 4(8) \Rightarrow z^2 = 0(8)$$

aleshores $x^2 + y^2$ és múltiple de 8

$$x = 0(8) \Rightarrow x^2 = 0(8)$$
$$y = 2(8) \Rightarrow y^2 = 4(8)$$
$$z = 6(8) \Rightarrow z^2 = 4(8)$$

aleshores $y^2 + z^2$ és múltiple de 8

NOTA: Podria també utilitzar-se el fet que, si x = 2n, y = 2m i z = 2k amb dos dels tres nombres n, m o k de la mateixa paritat proporcionen nombres que a l'elevar-los al quadrat i sumar dos quadrats, almenys una suma és múltiple de 8.

Febrer 9: Trobeu els naturals que compleixen:

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = \sqrt{99}$$

Nivell: Preparació OME.

Solució: Tindrem $\sqrt{99} = 3\sqrt{11}$. Si fem u = $\sqrt{x}$, v = $\sqrt{y}$, l'equació es transforma en:

$$\sqrt{u} + \sqrt{v} = 3\sqrt{11} \quad (*)$$

De (*) tenim:

$$\sqrt{u} = 3\sqrt{11} - \sqrt{v} \Rightarrow u = \left(3\sqrt{11} - \sqrt{v}\right)^2 = 99 + v - 6\sqrt{11v}$$

Com u∈N $\Rightarrow$ $\sqrt{11v}$ ∈N $\Rightarrow$ v = $11z^2$ per a algun z∈N.

Anàlogament a com hem fet

$$\sqrt{v} = 3\sqrt{11} - \sqrt{u} \Rightarrow v = \left(3\sqrt{11} - \sqrt{u}\right)^2 = 99 + u - 6\sqrt{11u} \Rightarrow u = 11t^2 \text{ per a algún } t \in N$$

Substituint en (*):

$$t\sqrt{11} + z\sqrt{11} = 3\sqrt{11} \Rightarrow t + z = 3$$

que és una equació fàcilment resoluble en N: Les solucions són: t = 1, z = 2 y t = 2, z =1. Desfent els canvis:

t	z	$u = 11t^2$	$v = 11z^2$	$x = u^2$	$y = v^2$
1	2	11	44	121	1936
2	1	44	11	1936	121

Febrer 10: Trobeu els reals que compleixen:

$$\left(\frac{9 - x^2}{8}\right)^{x^3 - 3x^2 + 2x} = 1$$

Nivell: Per a primer de batxillerat.

Solució: Recordem que:

$$a^b = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ i } b \text{ qualsevol} \\ a = -1 \text{ i } b \text{ parell} \\ b = 0 \text{ i } a \neq 0 \end{cases}$$

En el nostre cas:

1. (base igual a 1 i exponent qualsevol) $\frac{9-x^2}{8}=1 \Rightarrow 9-x^2=8 \Rightarrow x=\pm 1$
2. (base igual a –1 i exponent parell) $\frac{9-x^2}{8}=-1 \Rightarrow 9-x^2=-8 \Rightarrow x=\pm\sqrt{17}$. Com en aquest cas el valor de l'exponent és $(\pm\sqrt{17})^3-3(\pm\sqrt{17})^2+2(\pm\sqrt{17})=\pm 19\sqrt{17}-51$, que no és un natural parell, tenim que $x=\pm\sqrt{17}$ no són solucions de l'equació proposta.
3. (exponent igual a 0 i base diferent de 0) $x^3-3x^2+2x=0=x\cdot(x^2-3x+2)$, que porta a x = 0, x = 1, x = 2. I com per a aquests valors la base és no nul·la, totes elles són solucions de l'equació proposada.

En definitiva, les solucions de l'equació proposada són: x = - 1, x = 0, x = 1, x = 2.

Febrer 11: ¿Per a quants naturals, n, el residu de dividir 2017 per n és 1?

Nivell: Preparació OME.

Solució: Si el residu de dividir 2017 per n és 1 és que 2016 (= 2017 – 1) és múltiple de n (amb n ≠ 1). Com 2016 = $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, 2016 té ((5 + 1)·(2 + 1)·(1 + 1)=) 36 divisors (dels que devem eliminar al divisor 1). Per tant, hi ha 35 nombres que al dividir 2017 per ells donen residu 1. Per a explicitar-los podem procedir de la següent manera: Els divisors de 2016 són nombres de la forma $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 7^\gamma$ amb $\alpha \in \{0, 1, 2, 3, 4, \text{y } 5\}$, $\beta \in \{0, 1, 2\}$ i $\gamma \in \{0, 1\}$

α	β	γ	Divisors de 2016: $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 7^\gamma$
0	0	0	1
1	0	0	2
2	0	0	4
3	0	0	8
4	0	0	16
5	0	0	32
0	1	0	3
1	1	0	6
2	1	0	12
3	1	0	24
4	1	0	48
5	1	0	96
0	2	0	9
1	2	0	18
2	2	0	36
3	2	0	72

α	β	γ	Divisors de 2016: $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 7^\gamma$
0	0	1	7
1	0	1	14
2	0	1	28
3	0	1	56
4	0	1	112
5	0	1	224
0	1	1	21
1	1	1	42
2	1	1	84
3	1	1	168
4	1	1	336
5	1	1	672
0	2	1	63
1	2	1	126
2	2	1	252
3	2	1	504

4	2	0	144
5	2	0	288

4	2	1	1008
5	2	1	2016

Febrer 12: Quants nombres amb totes les seues xifres iguals i menors que 10^{16} són múltiples de 6?

Nivell: Preparació OME.

Solució: Busquem nombres de la forma $\underbrace{\mathrm{kkk}\ldots.\mathrm{k}}_{\mathrm{n}}$ amb n∈{1, 2, 3, 4, … , 16}; k∈{1, 2, …., 9} que siguen múltiples de 6, es a dir, múltiples de 2 (acabats en 2, 4, 6 o 8) i de 3 (la suma de les seues xifres ha de ser múltiple de 3) (Òbviament hem d'afegir el número 0). En símbols:

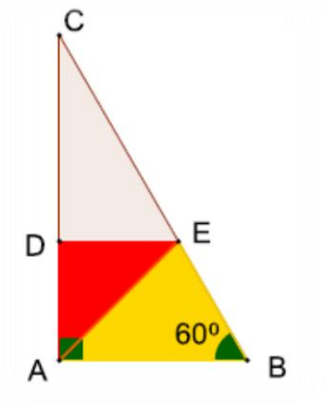
$$\underbrace{\mathrm{kkk}\ldots.\mathrm{k}}_{\mathrm{n}} \text{ con n} \in \{1, 2, \ldots., 16\} \mid \ \mathrm{n} \cdot \mathrm{k} = \dot{3}, \mathrm{k} \in \{2, 4, 6, 8\}$$

Analitzem tots els casos:

1. k = 0, n = 0. El número 0. 1 nombre
2. k = 2, $2\mathrm{n} = \dot{3} \ \Rightarrow \left.\begin{cases} \mathrm{n} = 3 \ \Rightarrow \ 222 \\ \mathrm{n} = 6 \ \Rightarrow 222222 \\ \mathrm{n} = 9 \ \Rightarrow \ 222222222 \\ \mathrm{n} = 12 \ \Rightarrow \ 222222222222 \\ \mathrm{n} = 15 \ \Rightarrow \ 222222222222222 \end{cases}\right\} \text{5 nombres}$
3. k = 4, $4\mathrm{n} = \dot{3} \ \Rightarrow \left.\begin{cases} \mathrm{n} = 3 \ \Rightarrow \ 444 \\ \mathrm{n} = 6 \ \Rightarrow \ 444444 \\ \mathrm{n} = 9 \ \Rightarrow \ 444444444 \\ \mathrm{n} = 12 \ \Rightarrow \ 444444444444 \\ \mathrm{n} = 15 \ \Rightarrow \ 444444444444444 \end{cases}\right\} \text{5 nombres}$
4. k = 6, $6\mathrm{n} = \dot{3} \ \Rightarrow \text{n qualsevol} \left.\begin{cases} n = 1 \ \Rightarrow \ 6 \\ n = 2 \ \Rightarrow \ 66 \\ n = 3 \ \Rightarrow \ 666 \\ n = 4 \ \Rightarrow \ 6666 \\ n = 5 \ \Rightarrow \ 66666 \\ n = 6 \ \Rightarrow \ 666666 \\ n = 7 \ \Rightarrow \ 6666666 \\ n = 8 \ \Rightarrow \ 66666666 \\ n = 9 \ \Rightarrow \ 666666666 \\ n = 10 \ \Rightarrow \ 6666666666 \\ n = 11 \ \Rightarrow \ 66666666666 \\ n = 12 \ \Rightarrow \ 666666666666 \\ n = 13 \ \Rightarrow \ 6666666666666 \\ n = 14 \ \Rightarrow \ 66666666666666 \\ n = 15 \ \Rightarrow \ 666666666666666 \\ n = 16 \ \Rightarrow \ 6666666666666666 \end{cases}\right\} \text{16 nombres}$
5. k = 8, $8\mathrm{n} = \dot{3} \ \Rightarrow \left.\begin{cases} \mathrm{n} = 3 \ \Rightarrow \ 888 \\ \mathrm{n} = 6 \ \Rightarrow \ 888888 \\ \mathrm{n} = 9 \ \Rightarrow \ 888888888 \\ \mathrm{n} = 12 \ \Rightarrow \ 888888888888 \\ \mathrm{n} = 15 \ \Rightarrow \ 888888888888888 \end{cases}\right\} \text{5 nombres}$

En total: 1 + 5 + 5 + 16 + 5 = 32 nombres

Febrer 13-14: Siga donat el triangle ΔABC rectangle en A, amb l'angle B de 60° i AB = 1. Siguen E i D punts de CB i AC, respectivament, tals que AE és la bisectriu de l'angle A i DE//AB. Trobeu angles, perímetres y àrees dels triangles ΔABE, ΔAED, ΔCDE i ΔABC.



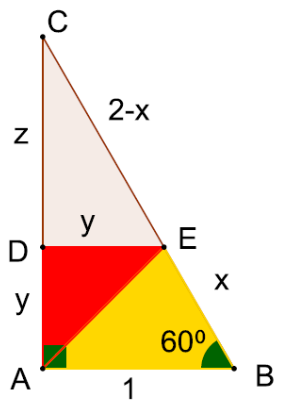
Nivell: Preparació OME.

Solució: En primer lloc ΔABC es un triangle 30°-60°-90° i per tant el catet petit es la meitat de la hipotenusa (CB = 2·AB = 2·1 = 2)

Per a el catet gran, tenim al aplicar Pitàgores:

$$\mathrm{CA} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

Al aplicar el teorema de la bisectriu al triangle ΔABC, tenim:



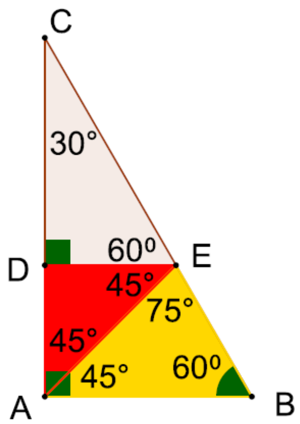
$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{2 - \mathrm{x}}{\mathrm{x}} \;\Rightarrow\; \mathrm{x}\sqrt{3} = 2 - \mathrm{x} \;\Rightarrow\; \mathrm{x} = \frac{2}{1 + \sqrt{3}},$$

$$2 - \mathrm{x} = \frac{2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

Per altra banda ΔDCE i ΔABC són semblants (al estar en posició de Tales), per tant:

$$\frac{\mathrm{y}}{1} = \frac{2\sqrt{3}\big/1 + \sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; \mathrm{y} = \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

De forma alternativa, ja que que ΔCDE es 30°-60°-90°:



$$\mathrm{DE} = \mathrm{y} = \frac{\mathrm{CE}}{2} = \frac{2\sqrt{3}\big/1 + \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

Per altra part ΔADE és rectangle isòsceles, al complir-se ∠ADE = 90° i ∠DAE = 45° = ∠DEA. Per tant: DE = DA, i, a més a més, al aplicar Pitàgores en ΔDEC:

$$z = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}\right)^2 - y^2} = \frac{3}{1 + \sqrt{3}}$$

De forma alternativa, aplicant que ΔCDE és 30°-60°-90°:

$$\mathrm{CD} = \sqrt{3} \cdot \mathrm{DE} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{3}{1 + \sqrt{3}}$$

També, de forma alternativa:

$$\mathrm{DA} = \sqrt{3} - \mathrm{z} = \sqrt{3} - \frac{3}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

Aplicant Pitàgores en ΔDAE, tenim:

$$\mathrm{AE}=\sqrt{2\left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}$$

<u>PERÍMETRES:</u>

$$\Delta\mathrm{ABC}\quad\Rightarrow\quad 1+2+\sqrt{3}=3+\sqrt{3}$$

$$\Delta\mathrm{AEB}\quad\Rightarrow\quad 1+\frac{2}{1+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}$$

$$\Delta\mathrm{ADE}\quad\Rightarrow\quad \frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}+2\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}$$

$$\Delta\mathrm{CDE}\quad\Rightarrow\quad \frac{3}{1+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=3$$

<u>ÀREES:</u>

$$\Delta\mathrm{ABC}\quad\Rightarrow\quad \frac{\text{base}\cdot\text{alçada}}{2}=\frac{1\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta\mathrm{CDE}\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\text{base}\cdot\text{alçada}}{2}=\dfrac{\mathrm{y}\cdot\mathrm{z}}{2}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{1+\sqrt{3}}}{2}=\dfrac{3\cdot\sqrt{3}}{2\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)^2}\\ \text{Si }\alpha\text{ es la raón de semblança entre els triangles }\Delta\mathrm{ABC}\text{ i}\\ \Delta\mathrm{CDE}\text{ aleshores }\alpha^2\text{ es la raó de semblança entre les seues àrees}\end{array}\right.$$

$$\Delta\mathrm{DEA}\quad\Rightarrow\quad \frac{\text{base}\cdot\text{alçada}}{2}=\frac{\mathrm{y}^2}{2}=\frac{\frac{3}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}}{2}=\frac{3}{2\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)^2}$$

$$\Delta\mathrm{AEB}\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\text{base}\cdot\text{alçada}}{2}=\dfrac{1\cdot\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)}\\ \mathrm{A}_{\Delta\mathrm{ABC}}-\mathrm{A}_{\Delta\mathrm{CEA}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)^2}+\dfrac{3}{2\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)^2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)}\end{array}\right.$$

<u>Febrer 15:</u> ¿Pot expressar-se 20! com producte de quadrats perfectes? Quants quadrats perfectes divideixen a 20!?

<u>Nivell:</u> Preparació OME.

<u>Solució:</u> Tenim:

$$20! = 20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 =$$

$$(2^2\cdot5)\cdot19\cdot(2\cdot3^2)\cdot17\cdot2^4\cdot(3\cdot5)\cdot(2\cdot7)\cdot13\cdot(2^2\cdot3)\cdot11\cdot(2\cdot5)\cdot(3^2)\cdot(2^3)\cdot7\cdot(2\cdot3)\cdot5\cdot(2^2)\cdot3\cdot2\cdot1=$$

$$2^{18}\cdot3^8\cdot5^4\cdot7^2\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19$$

Si 20! es pogués escriure com a producte de dos quadrats perfectes hauríem de tindre que els exponents de la descomposició factorial de 20! com a producte de primers serien tots parells.

Com que no és així, tenim que 20! no es pot posar com a producte de dos quadrats perfectes. Hi haurà tants quadrats perfectes que divideixen a 20! com a potències d'exponents parells dels primers 2, 3, 5 i 7 (que són les bases que apareixen elevades a exponents parells en 20!). Hi ha 10 possibilitats per a l'exponent de base 2: {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18}. Hi ha 5 possibilitats per a l'exponent de base 3: {0, 2, 4, 6, 8}. Hi ha 3 possibilitats per a l'exponent de base 5: {0, 2, 4}. Hi ha dues possibilitats per a l'exponent de base 7: {0, 2}.El nombre de quadrats perfectes que són divisores de 20! és: 10·5·3·2 = 300.

Febrer 16: Trobeu c i les solucions de l'equació

$$4x^2 - 200x + 148c = 0$$

sabent que les arrels són nombres primers

Nivell: Preparació OME.

Solució: Recordem que si x_1 i x_2 són les arrels de $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Aplicat al nostre cas tenim:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{200}{4} = 50 \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{148c}{2} = 37c \end{cases}$$

Com 37 és primer per la unicitat de la descomposició factorial en factors primers tenim que una arrel, fiquem x_1, és 37. D'ací:

$$x_1 + x_2 = 50 = 37 + c \ \Rightarrow \ c = 50 - 37 = 13$$

Així que, c = 13 i les solucions de l'equació són 13 i 37.

Febrer 17: Trobeu el menor valor possible de k de manera que {1, 2, 3,...., 19, 20} es particione en k conjunts complint cadascú d'ells que la suma de dos dels seus elements no és múltiple de 5

Nivell: Preparació OME.

Solució: El nombre k no pot ser menor que 4, ja que si dos qualssevol dels nombres 5, 10, 15 i 20 no poden estar en el mateix subconjunt (si ho estigueren, la suma d'eixos dos nombres seria múltiple de cinc, contradient l'exigència de l'enunciat). Por altra banda, 4 subconjunts són suficients per a efectuar la partició requerida, puig, per exemple:

A_1 = {5, 1, 6, 11, 16}; A_2 = {10, 2, 7, 12, 17}; A_3 = {15, 3, 8, 13, 18}; A_4 = {20, 4, 9, 14, 19}

Es a dir, $A_i = \{5 \cdot i\} \cup i\ (5)\ \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$, compleix el requerit, ja que la suma de dos números amb el mateix residu o un d'ells amb residu 0 al ser dividits por cinc no dona un múltiple de cinc excepte si els nombres són múltiples de cinc.

	1(5)	2(5)	3(5)	4(5)	0(5)
1(5)	2(5)				1(5)
2(5)		4(5)			2(5)
3(5)			1(5)		3(5)
4(5)				3(5)	4(5)

Febrer 18: Quins nombres hem de llevar d'A = {1, 2, 3, 4, ………, 75, 76} per assegurar que, la suma dels quadrats de qualssevol dos dels que queden, done residu 3 al dividir-lo per 5?

Nivell: Preparació OME.

Solució: Tenim la següent taula de congruències mòdul 5: primera columna (fila), congruència de x (y); segona columna (fila), congruència de x^2 (y^2); les demes cel·les, congruència de $x^2 + y^2$

	y	0(5)	1(5)	2(5)	3(5)	4(5)
x	$x^2 \setminus y^2$	0(5)	1(5)	4(5)	4(5)	1(5)
0(5)	0(5)	0(5)	1(5)	4(5)	4(5)	1(5)
1(5)	1(5)	1(5)	2(5)	0(5)	0(5)	2(5)
2(5)	4(5)	4(5)	0(5)	3(5)	3(5)	0(5)
3(5)	4(5)	4(5)	0(5)	3(5)	3(5)	0(5)
4(5)	1(5)	1(5)	2(5)	0(5)	0(5)	2(5)

D'ella obtenim que:

$$\left.\begin{array}{c} x = 2(5) \text{ o } 3(5) \\ y = 2(5) \text{o } 3(5) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \; x^2 + y^2 = 3(5)$$

Per tant, d'A hem de llevar els nombres que no estiguen en les classes 2(5) o 3(5) per a què es complisca el requerit.

Febrer 19: Trobeu els naturals que compleixen:

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 10$$

Nivell: Preparació OME.

Solució: Fem el canvi u = $\sqrt[3]{x}$ y v = $\sqrt[3]{y}$. Aleshores l'equació proposada es transforma en l'equació: u + v = 10 les solucions naturals de la qual són

u	1	2	3	4	5	6	7	8	9
v	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Per tant, las soluciones naturals en x i y són:

u	v	$x = u^3$	$y = v^3$
1	9	1	729
2	8	8	512
3	7	27	343
4	6	64	216
5	5	125	125
6	4	216	64
7	3	343	27
8	2	512	8
9	1	729	1

Febrer 20: Calculeu el residu de dividir 2017^{2018} per 11

Nivell: Preparació OME.

Solució: Si representem per $r_{11}(A)$ el residu de la divisió de A entre 11, tenim:

$$r_{11}(2017^{2018}) = (r_{11}(2017))^{2018} = (r_{11}(4))^{2018} = r_{11}(4^{2018})$$

Ara:

n	$r_{11}(4^n)$
1, 6, 11, ... 1(5)	4
2, 7, 12, ... 2(5)	5
3, 8, 13, ... 3(5)	9
4, 9, 14, ... 4(5)	3
5, 10, 15, ... 0(5)	1

I com 2018 = 3(5) $\Rightarrow$ $r_{11}(4^{2018}) = 9 = r_{11}(2017^{2018})$

Febrer 21: Trobeu b i c i les solucions de l'equació:

$$5x^2 - (65+5b)x + 185c = 0$$

sabent que les solucions són nombres primers

Nivell: Preparació OME.

Solució: Recordem que si x_1 i x_2 són les arrels de $Ax^2 + Bx + C = 0$

$$x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A}$$

Aplicat al nostre cas tenim:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{65+5b}{5} = 13 + b \Rightarrow x_1 + x_2 = 13 + b \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{185c}{5} = 37c \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 37c \end{cases}$$

La pregunta es si existeixen valors de b i c de manera que aporten valors de x_1 i x_2 primers. De la segon equació per la unicitat de la descomposició factorial en nombres primers tenim que una solució, fiquem x_1, és 37, d'on $x_2 = c$. Substituint en la primera equació, pleguem a:

$$37 + c = 13 + b \quad (\text{amb c primer}) \Rightarrow 24 + c = b \quad (\text{amb c primer}) \quad (*)$$

Y aquesta equació té infinites solucions, tantes com nombres primers c poden substituir-se en (*)

c	b	equació	solucions
2	26	$5x^2 - 195x + 370 = 0$	$x_1 = 37$; $x_2 = 2$
3	27	$5x^2 - 200x + 555 = 0$	$x_1 = 37$; $x_2 = 3$
5	29	$5x^2 - 210x + 925 = 0$	$x_1 = 37$; $x_2 = 5$
…	…	…	…

Febrer 22: Siguen x i y reals positius no iguals a 1. Quin és el menor valor no negatiu de

$$\log_x(y) + \log_y(x)?$$

Nivell: Preparació OME.

Solució: Tenim de la definició de logaritme:

$$\left.\begin{array}{r} \text{Si } \log_x(y) = z \Rightarrow x^z = y \Rightarrow x = y^{\frac{1}{z}} \\ \text{Si } \log_y(x) = t \Rightarrow y^t = x \end{array}\right\} \Rightarrow y^t = y^{\frac{1}{z}} \Rightarrow t = \frac{1}{z}$$

Per tant:

$$\log_x(y) + \log_y(x) = z + t = z + \frac{1}{z} = 2 + \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2$$

Així, que, el menor valor possible de $\log_x(y) + \log_y(x)$ en $]0, +\infty[$ es 2.

NOTA: De manera alternativa, definim:

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z}$$

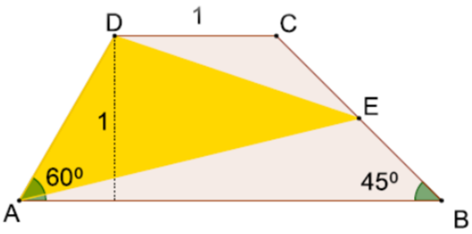
Ens pregunten por el mínim d'aquesta funció en $]0, +\infty[$. Per derivació:

$$f'(z) = \frac{2z^2 - z^2 - 1}{z^2} = \frac{z^2 - 1}{z^2}; \ f'(z) = 0 \Rightarrow z^2 - 1 = 0 \Rightarrow z = \pm 1$$

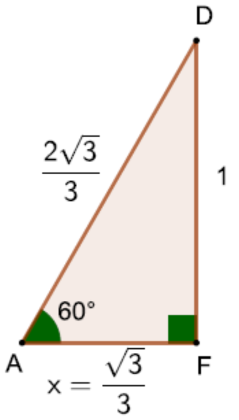
$$f''(z) = \frac{2z^3 - 2z(z^2 - 1)}{z^4} = \frac{2}{z^3} \Rightarrow \begin{cases} f''(1) = 2 > 0 \Rightarrow z = 1 \text{ aporta mínim} \\ f''(-1) = -2 < 0 \Rightarrow z = -1 \text{ aporta màxim} \end{cases}$$

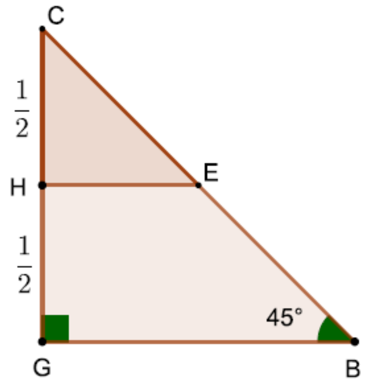
Febrer 23-24: Siga ABCD un trapezi amb DC // AB, DC = 1 = distancia entre DC i AB, ∠A = 60°, ∠B = 45°. Siga E el punt mitjà de CB. Calculeu perímetre i àrea del triangle ΔAED

Nivell: Preparació OME.



Solució: Siga F la projecció ortogonal de D sobre AB. Aleshores ΔAFD es un triangle





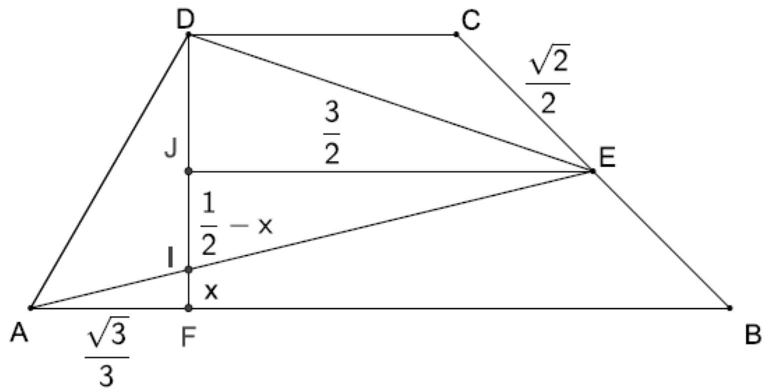
30°-60°-90°. Per tant, si x = AF, 2x = AD i al aplicar Pitàgores:

$$4x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Considerem ΔCGB, on G es la projecció ortogonal de C sobre AB. Es tracta d'un triangle 45°-45°-90°. Per tant, GB = CG = 1 i CB = $\sqrt{2}$.

Si H és la projecció ortogonal de E sobre CG, queda format el triangle ΔCHE, que (al ser E el punt mitjà de CB) és semblant al ΔCGB amb raó de semblança ½. Per tant, HC = HE = ½.

Considerem la paral·lela a AB que passa per E. Queden generats els triangles ΔAIF i ΔEIJ que són semblants (els dos són rectangles i tenen igual l'angle en I per ser oposats pel vèrtex)



$$\frac{\frac{1}{2} - x}{x} = \frac{3/2}{\sqrt{3}/3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 1 - 2x = 3\sqrt{3}x \Rightarrow x = \frac{1}{2 + 3\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3} - 2}{23} \Rightarrow 1 - x = \frac{25 - 3\sqrt{3}}{23}$$

Per últim:

$$A_{\Delta ADE} = A_{\Delta DIE} + A_{\Delta DAI} = A_{\Delta DIE} + (A_{\Delta AFD} - A_{\Delta AIF})$$

$$A_{\Delta DIE} = \frac{\text{base} \cdot \text{alçada}}{2} = \frac{1 - x}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3(25 - 3\sqrt{3})}{92}$$

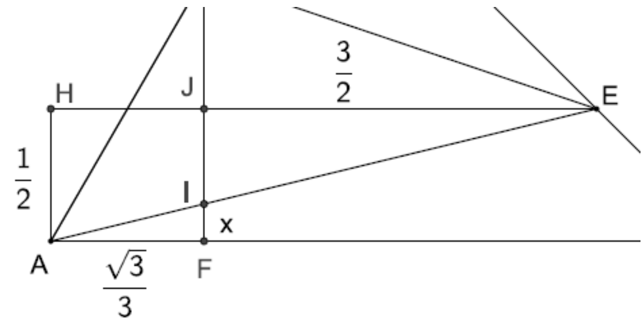
$$A_{\Delta AFD} = \frac{\text{base} \cdot \text{alçada}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$A_{\Delta AIF} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}-2}{23} = \frac{9-2\sqrt{3}}{138}$$

$$A_{\Delta ADE} = \frac{3\left(25-3\sqrt{3}\right)}{92} + \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{9-2\sqrt{3}}{138} = \frac{9+\sqrt{3}}{12}$$

Per al perímetre:

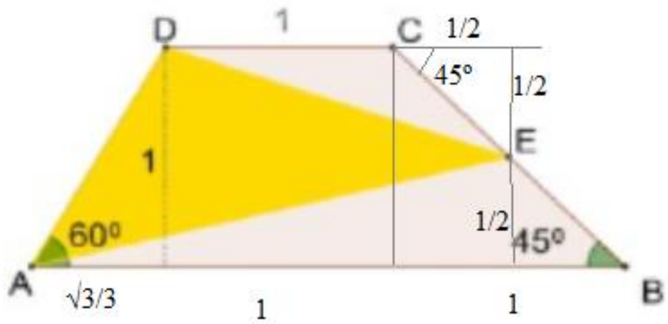
$$DA = \frac{2\sqrt{3}}{3}; \qquad DE = \left\{ \begin{matrix} \text{Pitàgores en } \Delta DJE \\ DJ = \frac{1}{2}, \qquad JE = \frac{3}{2} \end{matrix} \right\} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$



$$AE = \sqrt{HE^2 + HA^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{17\sqrt{6}+18\sqrt{2}}}{6}$$

$$P = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{17\sqrt{6}+18\sqrt{2}}}{6} = \frac{4\sqrt{3} + 3\sqrt{10} + \sqrt{\sqrt{2} \cdot \left(17\sqrt{3}+18\right)}}{6}$$

<u>SOLUCIÓ ALTERNATIVA DE Alef Subcero (@alefsubcero) </u> Més curta i senzilla per a calcular l'àrea



Área (ADE) = Área (ABCD) – Ārea (CDE) – Área (ABE) =

$$= \boxed{\frac{1+\frac{6+\sqrt{3}}{3}}{2}} - \boxed{\frac{1}{4}} - \boxed{\frac{6+\sqrt{3}}{12}} = \boxed{\frac{9+\sqrt{3}}{12}}$$

Perimetro (ABCD) = AD + DE + EA =

$$= \boxed{\sqrt{1+\frac{1}{3}}} + \boxed{\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}} + \boxed{\sqrt{\left(\frac{9+2\cdot\sqrt{3}}{6}\right)^2+\frac{1}{4}}} = \ldots$$

Febrer 25: Quins valors de n (enter) fan que

$$\frac{n^4 - 2n^2 + 2n - 6}{n^3 - 2n + 2}$$

siga enter?

Nivell: Preparació OME.

Solució: Tenim:

$$\frac{n^4 - 2n^2 + 2n - 6}{n^3 - 2n + 2} = n - \frac{6}{n^3 - 2n + 2} \ (*)$$

La fracció proposta és un enter sii la fracció que apareix en el segon membre de (*) és un enter i això ocorre sii n^3 - 2n + 2 és un divisor de 6, és a dir sii n^3 - 2n + 2 $\in\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$. Tindrem:

$$n^3 - 2n + 2 = 1 \ \Rightarrow \ n^3 - 2n + 1 = 0. \text{Per Ruffini l'única solució entera és } n = 1$$

$$n^3 - 2n + 2 = -1 \ \Rightarrow \ n^3 - 2n + 3 = 0. \text{Por Ruffini no té solucions enteres}$$

$$n^3 - 2n + 2 = 2 \ \Rightarrow \ n^3 - 2n = 0 \ \Rightarrow \ n = 0, \qquad n = \pm\sqrt{2}$$

$$n^3 - 2n + 2 = -2 \ \Rightarrow \ n^3 - 2n + 4 = 0. \text{Per Ruffini l'única solució entera és } n = -2$$

$$n^3 - 2n + 2 = 3 \ \Rightarrow \ n^3 - 2n - 1 = 0\text{Per Ruffini l'única solució entera és } n = -1$$

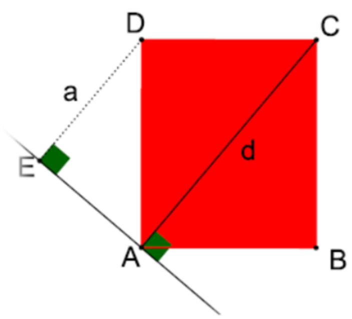
$$n^3 - 2n + 2 = -3 \ \Rightarrow \ n^3 - 2n + 5 = 0. \text{Por Ruffini no té solucions enteres}$$

$$n^3 - 2n + 2 = 6 \ \Rightarrow \ n^3 - 2n - 4 = 0. \text{Per Ruffini l'única solució entera és } n = 2$$

$$n^3 - 2n + 2 = -6 \ \Rightarrow \ n^3 - 2n + 8 = 0. \ \text{Por Ruffini no té solucions enteres}$$

Per tant la fracció proposada és un enter sii n = 0, n = $\pm$1 o n = $\pm$2

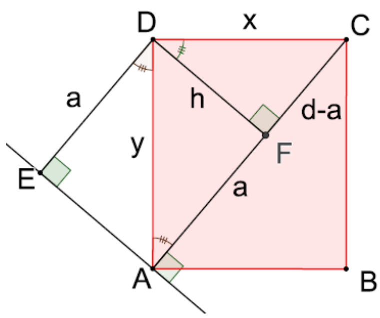
Febrer 26-27: D'un rectangle ABCD es coneix la seua diagonal d i la distancia a. Calculeu la seua àrea i perímetre



Nivell: Preparació OME.

Solució: Comencem per calcular l'àrea d'ABCD. Per a això tracem el segment DF paral·lel a EA per D. Tindrem:

a. $A_{ABCD} = 2\cdot A_{\Delta ADC} = 2\cdot(A_{\Delta AFD} + A_{\Delta DFC})$



b. $\Delta EDA = \Delta DAF$ ja que són semblants (són rectangles i $\angle EDA = \angle DAF$ per alterns interns) i tenen en comú la hipotenusa AD $\Rightarrow$ AF = a i FC = d – a.

c. $\Delta AED \cong \Delta DFC$ (ja que els dos són rectangles i $\angle DAF = \angle FDC$ per tenir els costats perpendiculars). D'ací:

$$\frac{h}{d-a} = \frac{a}{h} \;\Rightarrow\; h = \sqrt{a\cdot(d-a)}$$

Ara, del apartat a

$$A_{ABCD} = 2\cdot(A_{\Delta AFD} + A_{\Delta DFC}) = 2\cdot\left(\frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}h(d-a)\right) = ah + h(d-a) = hd$$
$$= d\cdot\sqrt{a(d-a)}$$

Per a el perímetre, apliquem Pitàgores als triangles ΔADF i ΔDFC:

$$y = \sqrt{h^2 + a^2} = \sqrt{a(d-a) + a^2} = \sqrt{ad};\;\; x = \sqrt{h^2 + (d-a)^2} = \sqrt{a(d-a) + (d-a)^2}$$
$$= \sqrt{d\cdot(d-a)}$$

I, per últim:

$$P = 2(x+y) = 2\left(\sqrt{ad} + \sqrt{d(d-a)}\right)$$

Febrer 28: 1.- Quins naturals donen residu 17 al dividir a 2018? 2.- Quins naturals donen residu 18 al dividir a 2018?

Nivell: Preparació OME.

Solució: Per a l'apartat 1 busquem els n tals que 2018 = nq + 17 $\Rightarrow$ 2001 = nq. Es a dir, busquem els divisores de 2001 majors que 17. Recordem que: si $N = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$ amb $\{p_i\}_{i=1}^{n}$ primers i exponents naturals, és la descomposició factorial de N en producte de primers, el nombre de divisors de N és

$$\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1)$$

Com 2001 = 3·23·29, tenim que 2001 té ((1 + 1)·(1 + 1)·(1 + 1) =) 8 divisors dels quals sols el 1 i el 3 son menors que 17. Els naturals buscats són:

23; 29; (3·23 =) 69; (3·29 =) 87; (23·29 =) 667; (3·23·29 =) 2001.

Per al apartat 2, tenim que busquem els divisors de (2018 – 18 =)2000 majors que 18. Com 2000 = $2^4\cdot5^3$ hi ha ((4 + 1)·(3 + 1) =) 20 divisors. D'ells: 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 5 y (2·5 =) 10 són menors o iguals que 18. Per tant els naturals sol·licitats són els (20 – 7 =) 13 següents:

5^2; 5^3; $2\cdot5^2$; $2\cdot5^3$; $2^2\cdot5$; $2^2\cdot5^2$; $2^2\cdot5^3$; $2^3\cdot5$; $2^3\cdot5^2$; $2^3\cdot5^3$; $2^4\cdot5$; $2^4\cdot5^2$; $2^4\cdot5^3$ (20; 25; 40; 50; 80; 100; 125; 200; 250; 400; 500; 1000; 2000).