

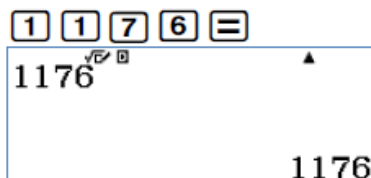
SOLUCIONS MARÇ 2018

Problemes amb calculadora (CASIO fx-570SPX o similar)

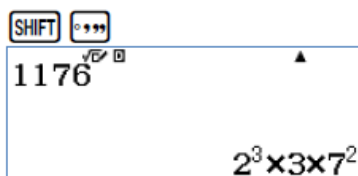
Març 1: Quin és el menor nombre natural que al multiplicar-lo per 1176 s'obté un quadrat perfecte? Quin és el quadrat perfecte?

Nivell: A partir de 1ESO.

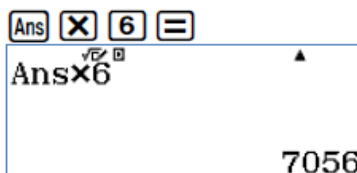
Solució: Introduïm el nombre 1176



Factoritzem el nombre:



Com busquem el menor quadrat perfecte busquem els factors primers que falten per tenir cada factor primer amb exponent el menor parell possible. En el nostre cas només cal un factor 2 i un factor 3. Hem de multiplicar el nombre per $2 \cdot 3 = 6$.



Hem de multiplicar per 6 i el quadrat perfecte és 7056.

Març 2: Els punts (1, 2), (5, a) y (a, 7) són col·lineals.

a) Determinar el valor de a.

b) Determinar l'equació de la recta que formen els tres punts.

KöMaL K396.

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Les coordenades del vector $\overrightarrow{AB}$ són: $\overrightarrow{AB} = (4, a - 2)$. Les coordenades del vector $\overrightarrow{AC}$ són: $\overrightarrow{AC} = (a - 1, 5)$.

Els punts A, B, C estan alineats si les components dels vectors són proporcionals:

$$\frac{4}{a-1} = \frac{a-2}{5}.$$

És una equació de segon grau:

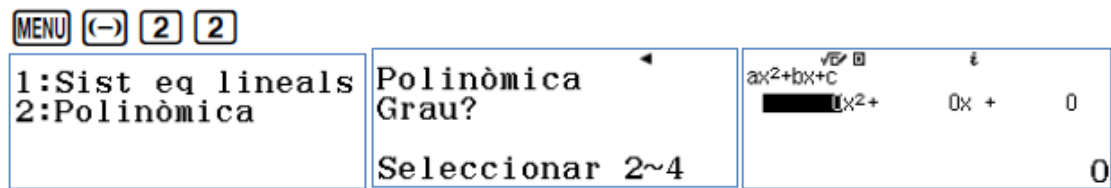
$$20 = (a-1)(a-2).$$

$$20 = a^2 - 2a - a + 2.$$

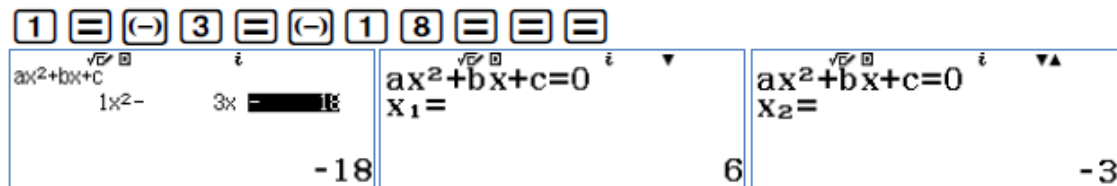
$$a^2 - 3a - 18 = 0.$$

Resolem l'equació amb la calculadora Casio 991:

Obrim el menú d'equacions polinòmiques de segon grau:



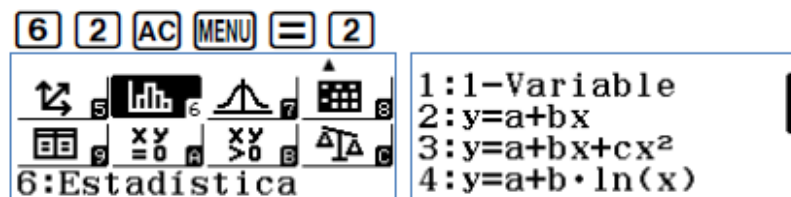
Introduïm els coeficients de l'equació i resolem:



Les solucions son $a = 6$, $a = -3$.

Si $a = 6$ els punts són $A(1, 2)$, $(5, 6)$ i $(6, 7)$.

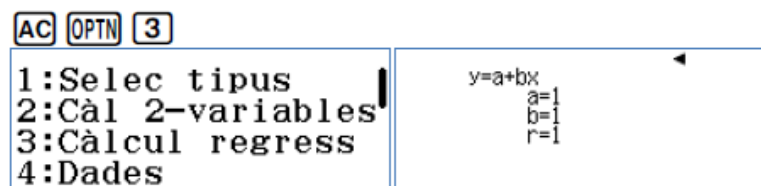
Obrim el menú estadística amb regressió lineal



Omplim les coordenades dels tres punts

	x	y
1	1	2
2	5	6
3	6	7
4		

Amb les opcions calculem la regressió lineal:



L'equació de la recta és

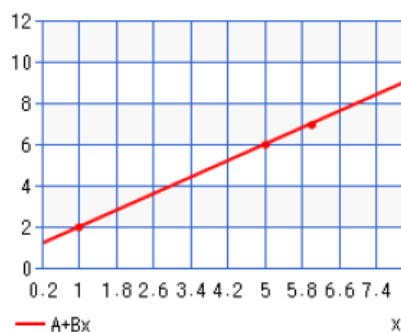
$$y = x + 1.$$

Amb el QR la dibuixem

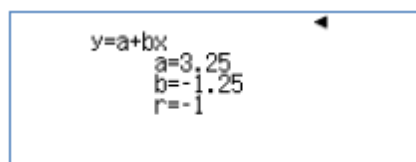
AC OPTN 3 OPTN OPTN 4 SHIFT OPTN



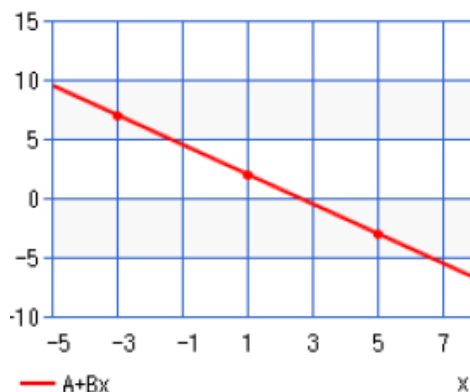
1/1



Si $a = -3$ els punts són $A(1, 2)$, $(5, -3)$ i $(-3, 7)$. El procediment seria anàleg.



L'equació de la recta és $y = -1.25x + 3.25$.



Març 3-4: Dani va escriure els primers 2018 naturals en una taula com la mostrada a l'esquerra. Quin és l'últim número de la segona fila? *KöMaL, K489.*

Nivell: Preparació OMS segon cicle.

Solució 1: Els termes de la primera fila són los nombres triangulars:

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \dots, \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

La segona fila és la successió:

$$2, 5, 9, 14, 20, 27, \dots$$

Les diferències de dos termes consecutius són:

1	3	6	10	15	21	...
2	5	9	14	20		
4	8	13	19			
7	12	18				
11	17					
16						
⋮						

3, 4, 5, 6, 7,.....

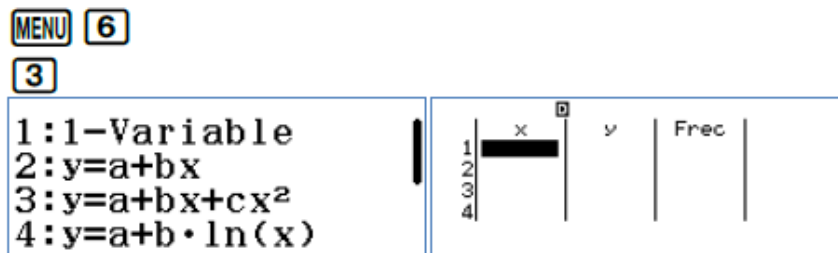
La diferència de dos termes consecutius de les diferències és:

1, 1, 1, 1,....

és una successió aritmètica de segon ordre.

Vegem si la successió es un polinomi de segon grau.

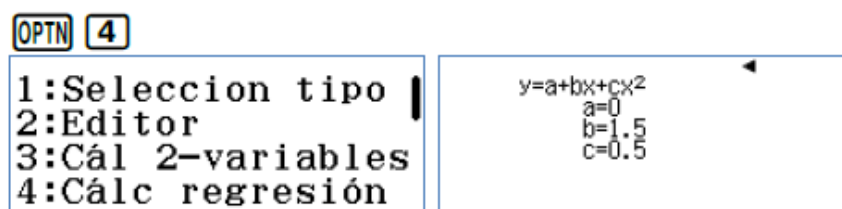
Obrim el menú estadística de dos variables, regressió quadràtica:



Introduïm les dades en la calculadora: en x els nombres naturals i en i els termes de la successió.

	x	y	Frec
1	1	2	1
2	2	5	1
3	3	9	1
4	4	14	1

Obrim opcions càlcul regressió:



El terme general de la successió és $\{0.5n^2 + 1.5n\}_{n=1}^{\infty}$

L'últim terme de la fila ha de ser menor o igual que 2015.

$$\frac{n^2 + 3n}{2} \leq 2015 .$$

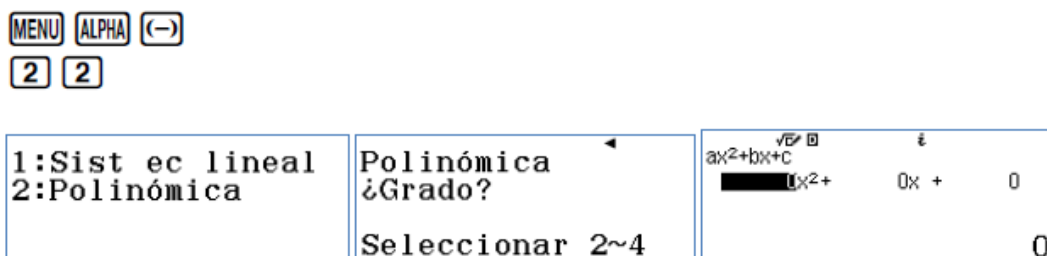
Resolem l'equació:

$$\frac{n^2 + 3n}{2} = 2015 .$$

Simplificant-la:

$$n^2 + 3n - 4030 = 0 .$$

Obrim el menú equacions:



Introduïm els coeficients i resollem:

1 **=** **3** **=** **(-)** **4** **0** **3** **0** **=** **=** **=**

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 = 62$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_2 = -65$$

La solució és natural. En la segona fila el lloc 62 està ocupat per el 2015.

Solució 2: La successió 2, 5, 9, 14, 20,... és una successió recurrent:

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = n + 2 + a_n.$$

Si resollem l'equació de successions amb la Casio CP400:

$$a_n = \frac{n^2 + 3n}{2}.$$

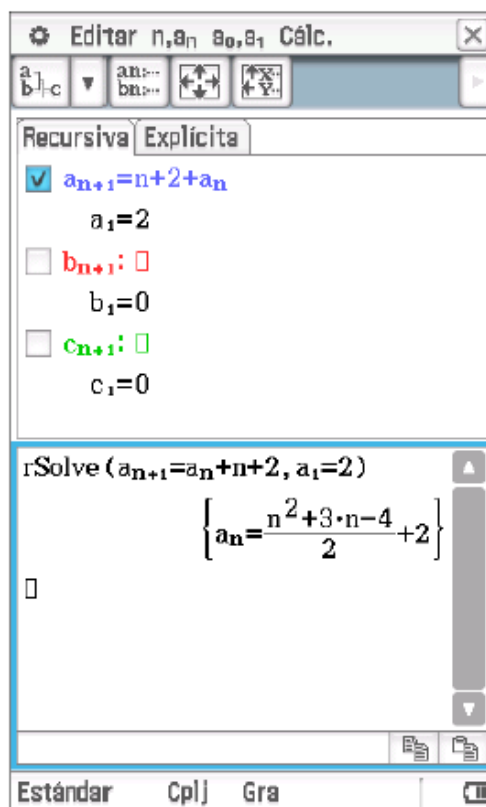
Calculem el nombre natural n que compleix $a_n \leq 2015$:

$$\frac{n^2 + 3n}{2} \leq 2015$$

$$1 \leq n \leq 62$$

Si $n = 62$, $a_{62} = 2015$.

L'últim nombre de la segona fila és 2015.



Març 5: A.- Calcular la suma dels primers 100 quadrats perfectes.

B.- Calcular: $1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 99 - 100$

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Dos soluciones per al apartat A

1. La fórmula és $S_{100} = \sum_{x=1}^{100} x^2$

SHIFT **x^2** **x^2** **x^2** **▶** **1** **▶** **1** **0** **0** **=**

$$\sum_{x=1}^{100} (x^2)$$

$$338350$$

2. La fórmula és $S_n = \sum_{x=1}^n x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Introduïm la fórmula:

$$\boxed{AC} \boxed{\frac{\square}{\square}} \boxed{x} \boxed{(} \boxed{x} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{)} \boxed{(} \boxed{2} \boxed{x} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{)}$$

Calculem el valor per a $x = 100$

$$\boxed{CALC} \boxed{1} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{=}$$

$$\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$$

$$x = 100$$

$$\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$$

$$338350$$

Per al apartat B, tenim:

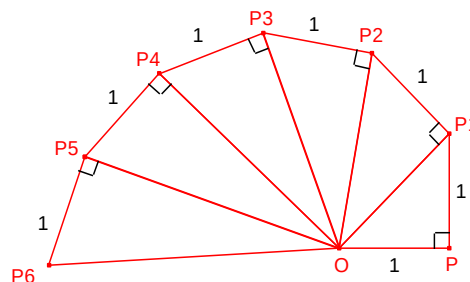
La fórmula és $S_{100} = \sum_{x=1}^{100} (-1)^{x+1} \cdot x$. Introduïm la fórmula:

$$\boxed{SHIFT} \boxed{x} \boxed{(} \boxed{(-)} \boxed{1} \boxed{)} \boxed{x^{\square}} \boxed{x} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{\rightarrow} \boxed{x} \boxed{\rightarrow} \boxed{1} \boxed{\rightarrow} \boxed{1} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{=}$$

$$\sum_{x=1}^{100} ((-1)^{x+1} x)$$

$$-50$$

Març 6-7: En la figura tots els triangles són rectangles en P, P_1 , $P_2, \dots, P_n, \dots$. A més, es compleix $1 = OP = PP_1 = P_1P_2 = \dots$. Calculeu les mesures de les primeres deu hipotenuses OP_1 , $OP_2, \dots, OP_{10}$ dels triangles. Calculeu la hipotenusa OP_n . Calculeu la suma de les 10 primeres hipotenuses i la suma d'àrees dels primers 10 triangles



Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OPP_1$: $\overline{OP_1} = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{PP_1}^2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OP_1P_2$: $\overline{OP_2} = \sqrt{\overline{OP_1}^2 + \overline{P_1P_2}^2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OP_2P_3$: $\overline{OP_3} = \sqrt{\overline{OP_2}^2 + \overline{P_2P_3}^2}$.

a)

Utilitzarem la funció M de la calculadora

$$\boxed{\sqrt{\square}} \boxed{1} \boxed{x^2} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{x^2} \boxed{=}$$

$$\sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$\sqrt{2}$$

$$\overline{OP_1} = \sqrt{2}$$

$\sqrt{\text{Ans}^2 + 1^2}$	$\sqrt{\text{Ans}^2 + 1^2}$	$\sqrt{\text{Ans}^2 + 1^2}$
$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$
$\sqrt{\text{Ans}^2 + 1^2}$	$\sqrt{\text{Ans}^2 + 1^2}$	$\sqrt{\text{Ans}^2 + 1^2}$
$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$	$2\sqrt{2}$
$\sqrt{\text{Ans}^2 + 1^2}$	$\sqrt{\text{Ans}^2 + 1^2}$	$\sqrt{\text{Ans}^2 + 1^2}$
3	$\sqrt{10}$	$\sqrt{11}$

Les mesures de les primeres hipotenuses són:

$$\overline{OP_2} = \sqrt{3}, \overline{OP_3} = \sqrt{4} = 2, \overline{OP_4} = \sqrt{5}, \overline{OP_5} = \sqrt{6}, \overline{OP_6} = \sqrt{7}, \overline{OP_7} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \overline{OP_8} = \sqrt{9} = 3$$

b)

$\overline{OP_n} = \sqrt{n+1}$. Es pot provar aquesta conjectura per inducció completa.

c)

Utilitzarem la funció suma de series finites

$\sum_{x=0}^{\square} (\square)$	
$\sum_{x=1}^{10} (\sqrt{x+1})$	$\sum_{x=1}^{10} (\sqrt{x+1})$
	24.78490298

La suma és aproximadament, 24.78490298.

d)

Les àrees dels primers triangles són:

$$S_1 = \frac{1 \cdot 1}{2}, S_2 = \frac{\sqrt{2} \cdot 1}{2}, S_3 = \frac{\sqrt{3} \cdot 1}{2}, S_4 = \frac{\sqrt{4} \cdot 1}{2}, S_5 = \frac{\sqrt{5} \cdot 1}{2}, \dots, S_n = \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Per a fer la suma de les àrees utilitzarem la funció de sumes finites de la calculadora.

$\sum_{x=1}^{10} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right)$	$\sum_{x=1}^{10} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right)$
	11.23413909

La suma és aproximadament 11.23413909.

Marc 8: Si els únics nombres que es poden utilitzar de la teua calculadora són el 0 i l'1, quin és el menor nombre de tecles que es deuen prémer per a obtindre el número 2048

Nivell: A partir de 1ESO.

Solució: Partim del fet que $2018 = 2^{11}$. Si sols podem utilitzar les tecles numèriques 0 i 1:

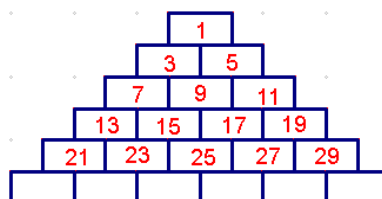
1 + 1 = 2

$2^{11} = 2048$

Fan un total de 8 tecles. Si utilitzem las tecles de parèntesis utilitzem 9 tecles

$(1+1)^{11} = 2048$

Març 9-10: S'ha construït la següent piràmide de nombres. Quina és la fila amb suma de 29791? En la diagonal {1, 3, 7,...}, Quin nombre ocupa la posició sisena ?, i la posició 100? Generalitza el resultat. A la diagonal {1, 5, 11, ...} quin nombre ocupa la posició sisena ?, i la posició 100? Generalitza el resultat.



Nivell: A partir de 3ESO.

Solució:

a)

La successió de les sumes de les files és:

$$1, 3 + 5 = 8, 7 + 9 + 11 = 27, 13 + 15 + 17 + 19 = 64, \dots$$

És la successió de les potències cúbiques dels naturals:

$$1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \dots, n^3, \dots \quad n^3 = 29791; \quad n = \sqrt[3]{29791}.$$

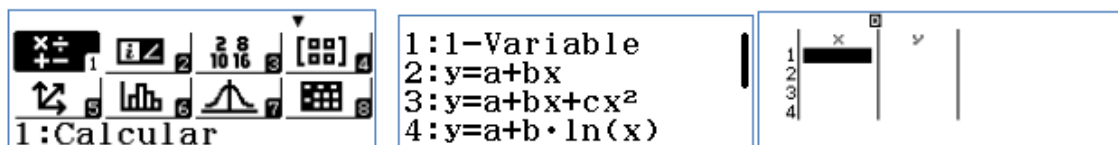
$\sqrt[3]{29791} = 31$

b)

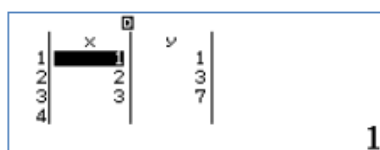
$$1, 3, 7, 13, 21, 31, \dots$$

La successió de les primeres diferències és: 2, 4, 6, 8, La successió de les segones diferències és: 2, 2, 2, successió constant. La successió 1, 3, 7, 13, 21, 41... és una successió aritmètica de segon ordre.

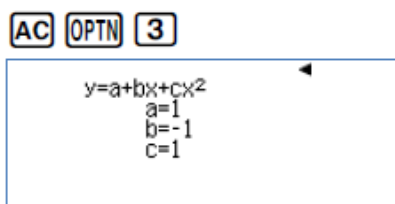
Utilitzarem el menú de estadística (regressió quadràtica) per a calcular el terme general.



Introduïm tres valors de la successió:

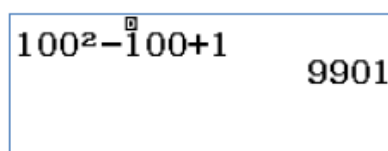


Calculem la regressió:



El terme general és $b_n = n^2 - n + 1$.

El terme 100 és:



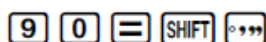
Tenim $b_{100} = 9901$

Març 11: Trobeu els naturals a i b amb $\text{mcm } 90$ i dels que se sap que $\left\lfloor \frac{a+b}{7} \right\rfloor = 3$

Nivell: A partir de 1ESO.

Solució: Com el quocient de la divisió entera de $a + b$ entre 7 es 3, $a + b > 21$ i $a + b < 28$. Per tant, $21 < a + b < 28$. Si $a + b$ és primer $\text{mcd}(a, b) = 1$ i a més de l'enunciat $\text{mcm}(a, b) = 90$.

Per tant, $a \cdot b = 90$ i $a + b = 23$. Per tant, busquem dos nombres primers entre sí amb producte de 90 i amb suma 23. Amb la factorització:



Amb una taula busquem les parelles de divisors de 90.

D(90)	1	3	9
1	1	1	1
2	2	6	18
5	5	15	45
2·5	10	30	90

Els nombres són 18 i 5, amb suma 23. Si busquem els divisors de 90 amb la màquina

MENU **9** **9** **0** **÷** **x**

$f(x) = 90 \div x$

Per a definir la taula sabem que per a trobar les parelles de divisors sols hi ha que buscar-les fins la rail quadrada de 90

= **=** **▼** **9** **=**

Table Range
Start:1
End :9
Step :1

=

x	f(x)
1	90
2	45
3	30
4	22.5

▼ **▼** **▼** **▼** **▼** **▼** **▼**

x	f(x)
5	18
6	15
7	12.857
8	11.25

▼ **▼**

x	f(x)
7	12.857
8	11.25
9	10

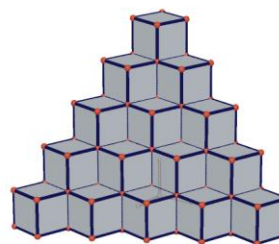
Entre totes les parelles les que compleixen totes les condicions són 5 i 18.

Març 12-13: Esta piràmide està feta amb 35 cubs i té 5 capes.

Quants cubs són necessaris per a una piràmide de 10 capes? I per a una piràmide amb 100 capes?

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Tenim:



Núm. capa n	1	2	3	4	5	n
Nom. cubs en la capa n	1	3	6	10	15	
Total de cubs en la capa n	1	4	10	20	35	

El nombre de cubs per capa segueix la successió de nombres triangulars. El terme general és

$\frac{1+n}{2}n$. El total de cubs fins la capa $n = 10$ és igual a la suma dels cubs de les $n = 10$ capes.

Utilitzarem la funció de sumes finites.

$$\sum_{x=1}^{10} \left(\frac{1+x}{2} x \right)$$

$$\sum_{x=1}^{10} \left(\frac{1+x}{2} x \right) = 220$$

Es necessiten 220 cubs.

El total de cubs fins la capa $n = 100$ és igual a la suma dels cubs de les $n = 100$ capes:

$$\sum_{x=1}^{100} \left(\frac{1+x}{2} x \right) = 171700$$

Són necessaris 171.700 cubs.

Març 14: Quin és el major nombre de sis xifres que dividit per 4, 7 i 11 dona residu 3?

Nivell: A partir de 1ESO.

Solució: Busquem els múltiples de 4, 7 i 11. Com són primers entre sí els múltiples són els múltiples de $4 \cdot 7 \cdot 11 = 308$

$$4 \times 7 \times 11 = 308$$

Dividim el major nombre de sis xifres entre 308.

$$999999 \div 308 = 12987 \frac{4}{4}$$

$\boxed{S \div D}$

$$999999 \div 308 = 3246.75$$

Multipliquem 308 per 3246

$\boxed{3} \boxed{0} \boxed{8} \boxed{\times} \boxed{3} \boxed{2} \boxed{4} \boxed{6} \boxed{=}$

$$308 \times 3246 = 999768$$

Y como el residu ha de ser 3, sumem 3 al resultat.

$\boxed{+} \boxed{3} \boxed{=}$

$$\text{Ans} + 3 = 999771$$

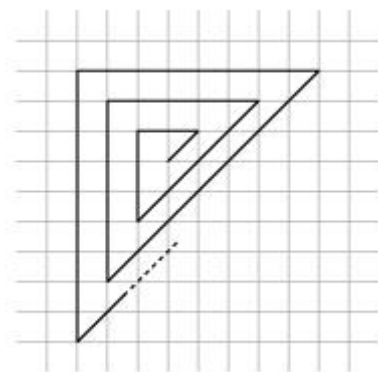
El nombre buscat és 999.771

Març 15-16: En un paper quadriculat (cada quadrícula mesura 5mm de costat) s'ha dibuixat la següent sanefa de 999 segments. Quant mesura la línia poligonal? Aproxima a metres. *KöMaL K360. Desembre 2012.*

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Suposem que cada quadrícula mesura de costat 1u.

Començant per el segment més petit les mesures dels segments formen la successió:



$$\sqrt{2}, 2, 3, 4\sqrt{2}, 5, 6, 7\sqrt{2}, 8, 9, 10\sqrt{2}, \dots, 997\sqrt{2}, 998, 999.$$

La suma de tots els segments és:

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 999 + (\sqrt{2} - 1)(1 + 4 + 7 + \dots + 997).$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 999 = \sum_{x=1}^{999} x.$$

$$1 + 4 + 7 + \dots + 997 = \sum_{x=1}^{333} 3x - 2.$$

La mesura total dels segments en mm és:

$$L = 5 \cdot \sum_{x=1}^{999} x + 5 \cdot (\sqrt{2} - 1) \sum_{x=1}^{333} 3x - 2.$$

Utilitzant la calculadora Casio 991:

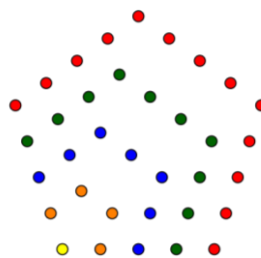
5 [X] [SHIFT] [X] [X] [▶] 1 [▶] 9 9 9 [▶] + 5 [X] [√] 2 [▶] -
1 [)] [X] [SHIFT] [X] 3 [X] - 2 [▶] 1 [▶] 3 3 3 [=]

La longitud de la poligonal és: $L = 2841643.13\text{mm} \cong 2.842\text{m}$

Març 17: El nombre 1369, és pentagonal?

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Els nombres pentagonals són 1, 5, 12, 22, 35. Com la segona diferència és constant, per a trobar el terme general es pot utilitzar la regressió quadràtica amb la calculadora



Primer seleccionem el menú estadística i seleccionem regressió quadràtica

[MENU] 6 3

Escollim treballar sense freqüències

[SHIFT] [MENU] [▼] 3 2

	x	y
1	1	1
2	2	5
3	3	12
4	4	22

Escollim la opció de la regressió quadràtica

[OPTN] 4

$$y = a + bx + cx^2$$

a=0
b=-0.5
c=1.5

Per tant $a_n = 1,5n^2 - 0,5n$ o $a_n = \frac{3n^2 - n}{2}$. Per a saber si 1369 es pentagonal resollem l'equació

$\frac{3n^2 - n}{2} = 1369$. La preparem per a resoldre-la en la calculadora: $3n^2 - n - 2738 = 0$.

$$ax^2+bx+c$$

$$3x^2 - 1x - 2738$$

$$-2738$$

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x_1 =$$

$$30.3774999$$

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x_2 =$$

$$-30.04416656$$

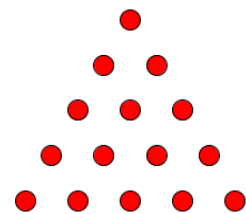
Per tant 1369 no és pentagonal. Ho podem comprovar amb la taula de valors de la funció $f(x) =$

$$\frac{3x^2-x}{2}$$

x	f(x)
4	28
5	29
6	30
7	31

31

Març 18-25: Aitana col·lecciona monedes d'un cèntim d'euro. Les ha col·locat segons l'esquema de la dreta, formant un triangle equilàter (a la figura de costat cinc). Quants euros tindrà si pot fer un triangle de costat trenta?



Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Ens adonem que el triangle va augmentant afegint a la part de baix una fila que té tantes monedes com el nombre de files ja existent més un. Per saber quantes monedes té el triangle sumem el nombre de monedes de cada fila: $1+2+3+4+5=15$ cèntims en el cas del triangle amb base 5 monedes i $1+2+3+4+5+6=21$ cèntims en el cas del triangle amb base 6 monedes. D'aquesta manera per a saber les monedes que hi ha en total en el triangle de base 30 monedes utilitzarem la funció sumatori:

SHIFT X ALPHA) ▼ 1 ▲ 3 0 =

$$\sum_{x=1}^{30} (x)$$

$$465$$

Per tant, sabem que el triangle en qüestió, conte 465 cèntims d'euro. Per a contestar a la qüestió plantejada utilitzarem la funció divisió entera:

$$465 \div 100$$

$$C=4, R=65$$

Haurà 4 euros i 65 cèntims d'euro.

Març 19: Amb els dígitos no nuls formar un nombre de nou xifres diferents ABCDEFGHI de manera que AB siga múltiple de 2, ABC de tres, ABCD de quatre i així successivament.

Nivell: A partir de 1ESO.

Solució: Com ABCDE és múltiple de 5, el nombre serà: ABCD5FGHI. Les xifres que ocupen lloc parell han de ser nombres parells: B, D, F i H: 2, 4, 6 o 8. Com el 5 ja està col·locat: A, C, G i I: 1,3,7 o 9. ABC múltiple de 3 i A= 1, 3, 7 o 9. B = 2, 4, 6 o 8 i C = 1, 3, 7 o 9. Com ABCD deu ser múltiple de 4, C imparell i D parell, busquem com han d'acabar els múltiples de 4 amb la calculadora

MENU 9 4 X

$f(x) = 4x$

= = ▾ 2 0 = =

<table> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>1</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td>8</td></tr> <tr><td>3</td><td>12</td></tr> <tr><td>4</td><td>16</td></tr> </table> 1	x	f(x)	1	4	2	8	3	12	4	16	<table> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>5</td><td>20</td></tr> <tr><td>6</td><td>24</td></tr> <tr><td>7</td><td>28</td></tr> <tr><td>8</td><td>32</td></tr> </table> 8	x	f(x)	5	20	6	24	7	28	8	32
x	f(x)																				
1	4																				
2	8																				
3	12																				
4	16																				
x	f(x)																				
5	20																				
6	24																				
7	28																				
8	32																				
<table> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>9</td><td>36</td></tr> <tr><td>10</td><td>40</td></tr> <tr><td>11</td><td>44</td></tr> <tr><td>12</td><td>48</td></tr> </table> 12	x	f(x)	9	36	10	40	11	44	12	48	<table> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>12</td><td>48</td></tr> <tr><td>13</td><td>52</td></tr> <tr><td>14</td><td>56</td></tr> <tr><td>15</td><td>60</td></tr> </table> 15	x	f(x)	12	48	13	52	14	56	15	60
x	f(x)																				
9	36																				
10	40																				
11	44																				
12	48																				
x	f(x)																				
12	48																				
13	52																				
14	56																				
15	60																				
<table> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>15</td><td>60</td></tr> <tr><td>16</td><td>64</td></tr> <tr><td>17</td><td>68</td></tr> <tr><td>18</td><td>72</td></tr> </table> 18	x	f(x)	15	60	16	64	17	68	18	72	<table> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>18</td><td>72</td></tr> <tr><td>19</td><td>76</td></tr> <tr><td>20</td><td>80</td></tr> <tr><td>21</td><td>84</td></tr> </table> 19	x	f(x)	18	72	19	76	20	80	21	84
x	f(x)																				
15	60																				
16	64																				
17	68																				
18	72																				
x	f(x)																				
18	72																				
19	76																				
20	80																				
21	84																				
<table> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>22</td><td>88</td></tr> <tr><td>23</td><td>92</td></tr> <tr><td>24</td><td>96</td></tr> <tr><td>25</td><td>100</td></tr> </table> 22	x	f(x)	22	88	23	92	24	96	25	100											
x	f(x)																				
22	88																				
23	92																				
24	96																				
25	100																				

Per tant, D sols pot ser 2 o 6. A+B+C és múltiple de 3 menor o igual que 9+8+7= 24 i major o igual que 1+2+3 = 6. Sumes possibles: 6, 9, 12, 15, 18, 21 o 24. Però, com B es parell i A i C imparells diferents de 5 les possibilitats són:

123

321

147

741

183

381

189

981

387

783

789

987

Les completem amb la quarta xifra (2 o 6) i la quinta que és 5

12365

32165

14725

14765

74125

74165

18325

18365

38125

38165

18925

18965

98125

98165

38725

38765

78325

78365

78925

78965

98725

98765

La sexta xifra ha d'acabar en nombre parell i la suma de les sis xifres ha de ser múltiple de 3:

12365 (17+4)

123654

32165

321654

14725 (19+8)

147258

14765 (23+

Impossible

74125 (19+8)

741258

74165 (23+

Impossible

18325 (19+

Impossible

18365 (23+4)

183654

38125 (19+	Impossible
38165 (23+4)	381654
18925 (25+	Impossible
18965 (29+4)	189654
98125 (25+	Impossible
98165 (29+4)	981654
38725 (25	Impossible
38765 (29+4	387654
78325 (25	Impossible
78365 (29+4)	783654
98725 (31+	Impossible
98765 (35+4)	987654

Completem la sèptima xifra i provarem amb la divisió o amb el criteri del 7

123654

1236547 no

1236549 no

321654

3216547 no

3216549

147258

1472583

1472589 no

741258

7412583 no

7412589 no

183654

1836547 no

1836549 no

381654

3816547

3816549 no

189654

1896543 no

1896547 no

981654

9816543 no

9816547 no

387654

3876541 no

3876549 no

783654

7836541 no

7836549

987654

9876541 no

9876543 no

Completem l'octava xifra, utilitzant el criteri de el huit. Dividim les tres últimes xifres entre 8

32165498 no

14725836 no

38165472

78365492 no

Por tant, el nombre buscat és 381654729

Març 20-21: A.- Trobeu el natural n que compleix:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 10$$

B.- Demostreu i generalitzeu la igualtat:

$$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \dots \cdot \log_{11} 10 = \log_{11} 2$$

Nivell: A partir de 4ESO.

Solució: Per a l'apartat A tenim:

Solució 1: Simplifiquem els primers sumands del primer membre:

$\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ $-1+\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ $\sqrt{3}-\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$ $2-\sqrt{3}$
$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}$ $-2+\sqrt{5}$	$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$ $\sqrt{6}-\sqrt{5}$	

I a partir d'ells fàcilment deduïm que la suma coincideix amb $-1+\sqrt{n+1}$ que ha de ser igual a 10. Resolem l'equació amb la funció SOLVE



$$-1 + \sqrt{x+1} = 10$$

$$x = 120$$

$$L-R = 0$$

Per tant, $n = 120$

Solució 2:

Amb el menú TAULA calcularem la antiimatge de 10 de la funció $f(x) = \sum_{1}^x \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$.

	$f(x) = \sum_{x=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} \right)$	Rang taula Inici: 1 Fi: 20 Pas: 1
--	--	--

x	$f(x)$
1	0.4142
2	0.732
3	1
4	1.236

x	$f(x)$
17	3.2426
18	3.3588
19	3.4721
20	3.5825

Rang	taula
Inici	:20
Fi	:200
Pas	:10

	$\sqrt{x}$	$f(x)$
1	20	3.5825
2	30	4.5677
3	40	5.4031
4	50	6.1414

	x	$f(x)$
9	100	9.0498
10	110	9.5356
11	120	10
12	130	10.445

Per a l'apartat B tenim: Utilitzarem la funció productes finits

The calculator interface shows the input sequence: ALPHA, X, log, X, +, 1, X, X, 2, X, 1, 0, =. The expression $\prod_{x=2}^{10} (\log_{x+1}(x))$ is displayed, and the result 0.2890648263 is shown at the bottom.

Calculemos $\log_{11} 2$:

$$\log_{11}(2)$$

0.2890648263

Els dos resultats són iguals.

Demostració:

Aplicant el canvi de bases de logaritmes:

$$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \dots \cdot \log_{11} 10 = \frac{\log_{11} 2}{\log_{11} 3} \cdot \frac{\log_{11} 3}{\log_{11} 4} \cdot \frac{\log_{11} 4}{\log_{11} 5} \cdot \dots \cdot \frac{\log_{11} 9}{\log_{11} 10} \cdot \log_{11} 10 = \log_{11} 2$$

Generalització:

$$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \dots \cdot \log_{n+1} n = \log_{n+1} 2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Març 22: Busqueu la més gran parella de naturals imparells consecutius menors que 100 amb la diferència dels seus quadrats, un quadrat perfecte.

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Tenim:

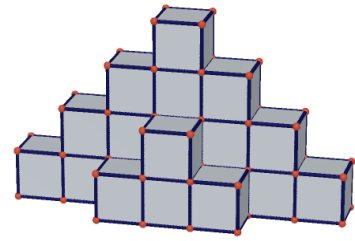
$$(2n + 1)^2 - (2n - 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 + 4n - 1 = 8n$$

amb $8n$ un quadrat perfecte, per tant, busquem els valors de n que facin que $2n+1$ siga menor que 100 i que $\sqrt{8n}$ siga natural menor que 10. Fem una tabla de valores de las funciones: $f(x) = \sqrt{8x}$ y $g(x) = 2x + 1$

<table><tr><th>$\sqrt{x}$</th><th>x</th><th>$f(x)$</th><th>$g(x)$</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>2.8284</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>4.8989</td><td>7</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td><td>5.6568</td><td>9</td></tr></table>	$\sqrt{x}$	x	$f(x)$	$g(x)$	1	1	2.8284	3	2	2	4	5	3	3	4.8989	7	4	4	5.6568	9	1	<table><tr><th>$\sqrt{x}$</th><th>x</th><th>$f(x)$</th><th>$g(x)$</th></tr><tr><td>5</td><td>5</td><td>6.3245</td><td>11</td></tr><tr><td>6</td><td>6</td><td>6.9282</td><td>13</td></tr><tr><td>7</td><td>7</td><td>7.4833</td><td>15</td></tr><tr><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>17</td></tr></table>	$\sqrt{x}$	x	$f(x)$	$g(x)$	5	5	6.3245	11	6	6	6.9282	13	7	7	7.4833	15	8	8	8	17
$\sqrt{x}$	x	$f(x)$	$g(x)$																																							
1	1	2.8284	3																																							
2	2	4	5																																							
3	3	4.8989	7																																							
4	4	5.6568	9																																							
$\sqrt{x}$	x	$f(x)$	$g(x)$																																							
5	5	6.3245	11																																							
6	6	6.9282	13																																							
7	7	7.4833	15																																							
8	8	8	17																																							
<table><tr><th>$\sqrt{x}$</th><th>x</th><th>$f(x)$</th><th>$g(x)$</th></tr><tr><td>9</td><td>9</td><td>8.4852</td><td>19</td></tr><tr><td>10</td><td>10</td><td>8.9442</td><td>21</td></tr><tr><td>11</td><td>11</td><td>9.3808</td><td>23</td></tr><tr><td>12</td><td>12</td><td>9.7979</td><td>25</td></tr></table>	$\sqrt{x}$	x	$f(x)$	$g(x)$	9	9	8.4852	19	10	10	8.9442	21	11	11	9.3808	23	12	12	9.7979	25	12	<table><tr><th>$\sqrt{x}$</th><th>x</th><th>$f(x)$</th><th>$g(x)$</th></tr><tr><td>13</td><td>13</td><td>10.198</td><td>27</td></tr><tr><td>14</td><td>14</td><td>10.583</td><td>29</td></tr><tr><td>15</td><td>15</td><td>10.954</td><td>31</td></tr><tr><td>16</td><td>16</td><td>11.313</td><td>33</td></tr></table>	$\sqrt{x}$	x	$f(x)$	$g(x)$	13	13	10.198	27	14	14	10.583	29	15	15	10.954	31	16	16	11.313	33
$\sqrt{x}$	x	$f(x)$	$g(x)$																																							
9	9	8.4852	19																																							
10	10	8.9442	21																																							
11	11	9.3808	23																																							
12	12	9.7979	25																																							
$\sqrt{x}$	x	$f(x)$	$g(x)$																																							
13	13	10.198	27																																							
14	14	10.583	29																																							
15	15	10.954	31																																							
16	16	11.313	33																																							
<table><tr><th>$\sqrt{x}$</th><th>x</th><th>$f(x)$</th><th>$g(x)$</th></tr><tr><td>17</td><td>17</td><td>11.661</td><td>35</td></tr><tr><td>18</td><td>18</td><td>12</td><td>37</td></tr><tr><td>19</td><td>19</td><td>12.328</td><td>39</td></tr><tr><td>20</td><td>20</td><td>12.649</td><td>41</td></tr></table>	$\sqrt{x}$	x	$f(x)$	$g(x)$	17	17	11.661	35	18	18	12	37	19	19	12.328	39	20	20	12.649	41	20	<table><tr><th>$\sqrt{x}$</th><th>x</th><th>$f(x)$</th><th>$g(x)$</th></tr><tr><td>1</td><td>21</td><td>12.961</td><td>43</td></tr><tr><td>2</td><td>22</td><td>13.266</td><td>45</td></tr><tr><td>3</td><td>23</td><td>13.564</td><td>47</td></tr><tr><td>4</td><td>24</td><td>13.856</td><td>49</td></tr></table>	$\sqrt{x}$	x	$f(x)$	$g(x)$	1	21	12.961	43	2	22	13.266	45	3	23	13.564	47	4	24	13.856	49
$\sqrt{x}$	x	$f(x)$	$g(x)$																																							
17	17	11.661	35																																							
18	18	12	37																																							
19	19	12.328	39																																							
20	20	12.649	41																																							
$\sqrt{x}$	x	$f(x)$	$g(x)$																																							
1	21	12.961	43																																							
2	22	13.266	45																																							
3	23	13.564	47																																							
4	24	13.856	49																																							
<table><tr><th>$\sqrt{x}$</th><th>x</th><th>$f(x)$</th><th>$g(x)$</th></tr><tr><td>5</td><td>25</td><td>14.142</td><td>51</td></tr><tr><td>6</td><td>26</td><td>14.422</td><td>53</td></tr><tr><td>7</td><td>27</td><td>14.696</td><td>55</td></tr><tr><td>8</td><td>28</td><td>14.966</td><td>57</td></tr></table>	$\sqrt{x}$	x	$f(x)$	$g(x)$	5	25	14.142	51	6	26	14.422	53	7	27	14.696	55	8	28	14.966	57	28	<table><tr><th>$\sqrt{x}$</th><th>x</th><th>$f(x)$</th><th>$g(x)$</th></tr><tr><td>9</td><td>29</td><td>15.231</td><td>59</td></tr><tr><td>10</td><td>30</td><td>15.491</td><td>61</td></tr><tr><td>11</td><td>31</td><td>15.748</td><td>63</td></tr><tr><td>12</td><td>32</td><td>16</td><td>65</td></tr></table>	$\sqrt{x}$	x	$f(x)$	$g(x)$	9	29	15.231	59	10	30	15.491	61	11	31	15.748	63	12	32	16	65
$\sqrt{x}$	x	$f(x)$	$g(x)$																																							
5	25	14.142	51																																							
6	26	14.422	53																																							
7	27	14.696	55																																							
8	28	14.966	57																																							
$\sqrt{x}$	x	$f(x)$	$g(x)$																																							
9	29	15.231	59																																							
10	30	15.491	61																																							
11	31	15.748	63																																							
12	32	16	65																																							
<table><tr><th>$\sqrt{x}$</th><th>x</th><th>$f(x)$</th><th>$g(x)$</th></tr><tr><td>13</td><td>33</td><td>16.248</td><td>67</td></tr><tr><td>14</td><td>34</td><td>16.492</td><td>69</td></tr><tr><td>15</td><td>35</td><td>16.733</td><td>71</td></tr><tr><td>16</td><td>36</td><td>16.97</td><td>73</td></tr></table>	$\sqrt{x}$	x	$f(x)$	$g(x)$	13	33	16.248	67	14	34	16.492	69	15	35	16.733	71	16	36	16.97	73	36	<table><tr><th>$\sqrt{x}$</th><th>x</th><th>$f(x)$</th><th>$g(x)$</th></tr><tr><td>17</td><td>37</td><td>17.204</td><td>75</td></tr><tr><td>18</td><td>38</td><td>17.435</td><td>77</td></tr><tr><td>19</td><td>39</td><td>17.663</td><td>79</td></tr><tr><td>20</td><td>40</td><td>17.888</td><td>81</td></tr></table>	$\sqrt{x}$	x	$f(x)$	$g(x)$	17	37	17.204	75	18	38	17.435	77	19	39	17.663	79	20	40	17.888	81
$\sqrt{x}$	x	$f(x)$	$g(x)$																																							
13	33	16.248	67																																							
14	34	16.492	69																																							
15	35	16.733	71																																							
16	36	16.97	73																																							
$\sqrt{x}$	x	$f(x)$	$g(x)$																																							
17	37	17.204	75																																							
18	38	17.435	77																																							
19	39	17.663	79																																							
20	40	17.888	81																																							
<table><tr><th>$\sqrt{x}$</th><th>x</th><th>$f(x)$</th><th>$g(x)$</th></tr><tr><td>1</td><td>41</td><td>18.11</td><td>83</td></tr><tr><td>2</td><td>42</td><td>18.33</td><td>85</td></tr><tr><td>3</td><td>43</td><td>18.547</td><td>87</td></tr><tr><td>4</td><td>44</td><td>18.761</td><td>89</td></tr></table>	$\sqrt{x}$	x	$f(x)$	$g(x)$	1	41	18.11	83	2	42	18.33	85	3	43	18.547	87	4	44	18.761	89	41	<table><tr><th>$\sqrt{x}$</th><th>x</th><th>$f(x)$</th><th>$g(x)$</th></tr><tr><td>5</td><td>45</td><td>18.973</td><td>91</td></tr><tr><td>6</td><td>46</td><td>19.183</td><td>93</td></tr><tr><td>7</td><td>47</td><td>19.39</td><td>95</td></tr><tr><td>8</td><td>48</td><td>19.595</td><td>97</td></tr></table>	$\sqrt{x}$	x	$f(x)$	$g(x)$	5	45	18.973	91	6	46	19.183	93	7	47	19.39	95	8	48	19.595	97
$\sqrt{x}$	x	$f(x)$	$g(x)$																																							
1	41	18.11	83																																							
2	42	18.33	85																																							
3	43	18.547	87																																							
4	44	18.761	89																																							
$\sqrt{x}$	x	$f(x)$	$g(x)$																																							
5	45	18.973	91																																							
6	46	19.183	93																																							
7	47	19.39	95																																							
8	48	19.595	97																																							
<table><tr><th>$\sqrt{x}$</th><th>x</th><th>$f(x)$</th><th>$g(x)$</th></tr><tr><td>9</td><td>49</td><td>19.798</td><td>99</td></tr><tr><td>10</td><td>50</td><td>20</td><td>101</td></tr><tr><td>11</td><td>51</td><td>20.199</td><td>103</td></tr><tr><td>12</td><td>52</td><td>20.396</td><td>105</td></tr></table>	$\sqrt{x}$	x	$f(x)$	$g(x)$	9	49	19.798	99	10	50	20	101	11	51	20.199	103	12	52	20.396	105	52																					
$\sqrt{x}$	x	$f(x)$	$g(x)$																																							
9	49	19.798	99																																							
10	50	20	101																																							
11	51	20.199	103																																							
12	52	20.396	105																																							

El valor de n buscat es 32 i por tant los números sol·licitats són 63 i 65 amb diferencia de quadrats $256 (= 16^2)$

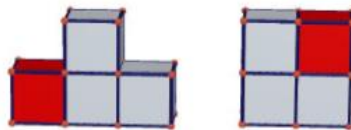
Marc 23-24: Construïm una piràmide de cubs de la següent manera: Comencem una capa amb quatre cubs. Les capes posteriors són dos cubs més alta que l'anterior (mirar figura). Quan arribem a l'altura de 10 cubs, quants cubs haurem gastat? Quan arribem a l'altura de 50 cubs, quants cubs haurem gastat?



Nivell: A partir de 3ESO.

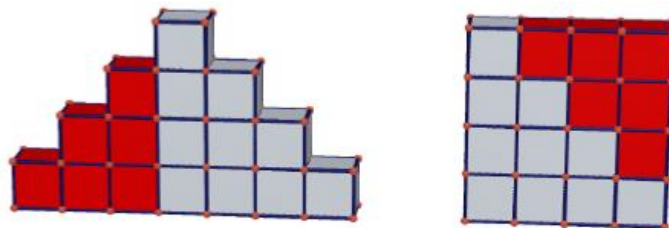
Solució: Analitzant la figura tenim:

Primera fila:



$$4 = 2^2$$

Segon fila



$$16 = 4^2$$

Es fàcil deduir que les files estan formades pels quadrats dels nombres parells. Si la altura es de 10 cubs, el total de cubs utilitzats es la suma dels quadrats dels 5 primers parells consecutius més la suma dels 4 primers parells consecutius.

$$\sum_{x=1}^5 (2x)^2 + \sum_{x=1}^4 (2x)^2$$

Utilitzarem la funció de sumes finites

$$\sum_{x=1}^5 ((2x)^2) + \sum_{x=1}^4 ((2x)^2) = 340$$

Són necessaris 340 cubs.

Anàlogament, per a l'última pregunta, hem d'obtenir:

$$\sum_{x=1}^{25} (2x)^2 + \sum_{x=1}^{24} (2x)^2$$

$$\sum_{x=1}^{25} ((2x)^2) + \sum_{x=1}^{24} ((2x)^2) = 41700$$

Són necessaris 41700 cubs.

Març 26-27 Partim d'un triangle equilàter d'un metre de costat. Unim els punts mitjans dels costats obtenint de nou un triangle equilàter. Repetim aquest procés obtenint així una successió de triangles equilàters. Calcular la suma de àrees de les trenta primeres iteracions



Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Analitzem els primers termes de la successió:

Iteració 1	Iteració 2	Iteració 3	Iteració 4	Iteració 5	Iteració 6
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{256}$	...

Observem que els denominadors són tots potències de 4:

Iteració 1	Iteració 2	Iteració 3	Iteració 4	Iteració 5	Iteració 6
$\frac{1}{4^0}$	$\frac{1}{4^1}$	$\frac{1}{4^2}$	$\frac{1}{4^3}$	$\frac{1}{4^4}$	...

Podem anar sumant els valors obtinguts i intentar trobar algun tipus de regularitat:

$$1 + \frac{1}{4} = 1,25$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 1,3125$$

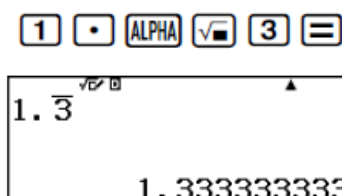
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = 1,328125$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = 1,328125$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} = 1,33203125$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} = 1,333007813$$

Pareix que la suma s'aproxima a 1,333333... Si volguérem donar el resultat en forma de fracció faríem el següent en la calculadora:



Ara en lloc de tenir-lo expressat com a nombre decimal periòdic pur, el visualitzarem com una fracció:

$\boxed{1} \boxed{\cdot} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\sqrt{\square}} \boxed{3} \boxed{=} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{MENU}} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{\text{Ans}} \boxed{=}$

1:Entrada/Salida	1:E Mat/S Mat	1. $\overline{3}$ $\frac{4}{3}$
2:Unidad angular	2:E Mat/S Decimal	
3:Formato número	3:E Línea/S Línea	
4:Símb ingeniería	4:E Línea/S Decim	

Però la intuïció cal formalitzar-la. Tractem de trobar una expressió algebraica per a la successió d'àrees que hi ha en cada iteració. Si ens fixem en l'exponent, aquest és una unitat menys que la corresponent iteració. Per tant, l'exponent podem expressar-ho en funció del número de la iteració mitjançant: $x - 1$. D'aquesta manera l'àrea obtinguda en la n-ésima iteració és: $\frac{1}{4^{x-1}}$. Si volem saber quant val la suma de les àrees de les 30 primeres iteracions, hem d'utilitzar la suma finita:

$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{x} \boxed{\frac{\square}{\square}} \boxed{1} \boxed{\nabla} \boxed{4} \boxed{x^{\square}} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{\nabla} \boxed{1} \boxed{\blacktriangle} \boxed{3} \boxed{0} \boxed{=}$

$\sum_{x=1}^{30} \left(\frac{1}{4^{x-1}} \right)$
 $\frac{4}{3}$

Per tant, la suma de les àrees de les 30 primeres iteracions és $\frac{4}{3}$.

Març 28: El quadrat perfecte 25 compleix que a l'augmentar una unitat cada xifra s'obté de nou un quadrat. Sols hi ha un quadrat de quatre xifres amb aquesta propietat. Troba'l

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Com hem de trobar un quadrat perfecte de quatre xifres, anem, per tanteig, a calcular el primer natural que compleix aquesta condició:

$$10^2 = 100$$

$$20^2 = 400$$

$$30^2 = 900$$

$$31^2 = 961$$

$$32^2 = 1024$$

Per a resoldre aquest problema amb la calculadora anem a utilitzar el menú taula. Primer ens fiquem en el menú taula:

$\boxed{\text{MENU}} \boxed{9}$

$f(x) =$

Ara definim la funció: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1111}$, d'aquesta manera quan observem en la taula un valor exacte tindrem el nombre que ens demana l'enunciat. La taula començarà pel valor 32, ja que és el primer quadrat de quatre xifres.

$\sqrt{x}$ ALPHA) x^2 + 1 1 1 1 = = 3 2 = 5 7 = =

x	$f(x)$
1	32 46.206
2	33 46.904
3	34 47.613
4	35 48.332

x	$f(x)$
5	36 49.061
6	37 49.799
7	38 50.547
8	39 51.303

x	$f(x)$
9	40 52.067
10	41 52.839
11	42 53.619
12	43 54.405

x	$f(x)$
13	44 55.199
14	45 56
15	46 56.806
16	47 57.619

Per tant, el nombre que busquem és $56^2 = 3136 = 2116 + 1111 = 46^2 + 1111$.

Març 29: En quina xifra acaba 13^{2018} ?

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Calculem les primeres potències de la base 13:

$13^1 = 13$	$13^2 = 169$	$13^3 = 2197$	$13^4 = 28561$	$13^5 = 371293$
	$\boxed{1 \ 3 \ x^2 =}$	$\boxed{1 \ 3 \ x^3 =}$	$\boxed{1 \ 3 \ x^4 =}$	$\boxed{1 \ 3 \ x^5 =}$
	13^2	13^3	13^4	13^5
	169	2197	28561	371293

Observem que l'última xifra de les potències de tretze es repeteixen de manera cíclica cada quatre potències. Per tant, el que hem de fer és la divisió entera de 2017 entre 4 per a saber el residu i relacionar-lo amb la potència corresponent per a poder contestar a la qüestió plantejada.

$\boxed{2 \ 0 \ 1 \ 7 \ \text{ALPHA} \ \boxed{=} \ 4 \ \boxed{=}}$

2017	4
	C=504, R=1

Com el residu és 1, podem dir que 13^{2017} acaba igual que $13^1 = 13$, es a dir, en 3.

Març 30: Obtén en la calculadora el resultat de la divisió **350/56** utilitzant sols la tecla de la suma i el teclat numèric

Nivell: A partir de 1ESO.

Solució: Anem a veure quantes vegades hi cap el divisor dins el dividend. Començarem sumant a la calculadora dues vegades 56

$$56 + 56 =$$

$$56 + 56 = 112$$

Ara sumem 56 una vegada més:

$$56 + 56 = + 56 =$$

$$Ans + 56 = 168$$

I ara sols fa falta donar-li a la tecla igual per a continuar fent las sumes:

$$56 + 56 = + 56 = = = =$$

$$Ans + 56 = 336$$

Hem sumat sis vegades 56, per tant, el quotient és 6 i el residu 14.

Març 31: En una classe de 35 alumnes, quina és la probabilitat que almenys dues tinguin la mateixa data d'aniversari?

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Siga l'esdeveniment A = "Almenys dues persones celebren el seu aniversari el mateix dia" i el seu complementari A^c = "No hi ha dues persones que celebren el seu aniversari el mateix dia". Primer calculem la probabilitat de l'esdeveniment A^c que es més senzilla. El nombre de casos possibles de celebració d'aniversari, suposant que l'any té 365 dies, és:

$$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots 331 =$$

$$365^{35} = 4.789059755 \times 10^{89}$$

El nombre de casos favorables l'obtenim pel següent raonament: com la primera de les persones pot haver nascut en un dels 365 dies de l'any, la següent en un dels 364 dies restants i així successivament, el càlcul ve donat per $365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots 331$. Aquesta operació plantejada en la calculadora ve donada per:

ALPHA X 3 6 5 - ALPHA) + 1 ▼ 1 ▲ 3 5

$$\prod_{x=1}^{35} (365-x+1)$$

8.889297606 × 10⁸⁸

Apliquem ara la regla de Laplace:

ALPHA X 3 6 5 - ALPHA) + 1 ▼ 1 ▲ 3 5 ▼ ▼ 3 6
5 X 3 5 =

$$\frac{\prod_{x=1}^{35} (365-x+1)}{365^{35}}$$

0.1856167611

$P(A^c) = \text{casos favorables} / \text{casos possibles} = 0.1856167611 \dots \approx 0.186$

$P(A) = 1 - P(A^c) \approx 1 - 0.186 = 0.814$

1 - ALPHA X 3 6 5 - ALPHA) + 1 ▼ 1 ▲ 3 5 ▼ ▼
3 6 5 X 3 5 =

$$1 - \frac{\prod_{x=1}^{35} (365-x+1)}{365^{35}}$$

$$1 - \frac{\prod_{x=1}^{35} (365-x+1)}{365^{35}}$$

0.8143832389