

SOLUCIONS ABRIL 2018

AUTOR: Ricard Peiró i Estruch. IES "Abastos". València

ABRIL 1-8: Calcular l'angle que formen dues diagonals d'un cub.

Nivell: A partir de 4ESO.

Solució: Siga $ABCD A'B'C'D'$ el cub d'aresta $a = \overline{AB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle

$$\triangle ABC: \overline{AC} = a\sqrt{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle

$$\triangle ACC': \overline{AC'} = \overline{BD'} = a\sqrt{3}.$$

Les dues diagonals s'intercepten en el punt mitjà P:

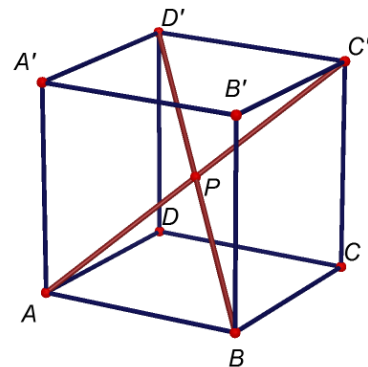
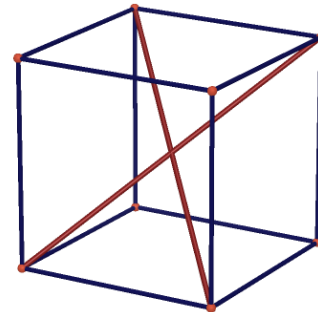
$$\overline{BP} = \overline{AP} = \frac{\overline{AC'}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

Siga $\alpha = \angle APB$ l'angle que formen les diagonals $\overline{AC'}$ i

$\overline{BD'}$. Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABP$:

$$a^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2 \cos \alpha.$$

$$\text{Simplificant: } \cos \alpha = \frac{1}{3}. \alpha = \arccos \frac{1}{3} \approx 70^\circ 31' 43.6''.$$



Abril 4-5: Siga $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ un prisma hexagonal amb totes les seues arestes iguals a a . Calculeu les diagonals AC' i AD' . Calculeu l'àrea de la secció del prisma que passa per A, B, D'. Calculeu el perímetre de la secció del prisma que passa per A, B, D'.

Nivell: A partir de 4ESO.

Solució: Tenim, per a la primera pregunta: $\overline{AD} = 2a$,

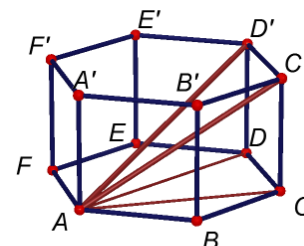
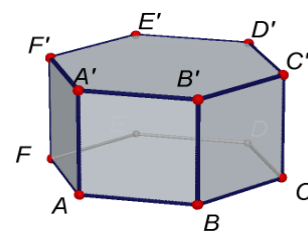
$$\angle ABC = 120^\circ.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$.

$$\overline{AC}^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 120 = 3a^2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle

$\triangle ACC'$:



$$\overline{AC'}^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2. \quad \overline{AC'} = 2a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ADD'$:

$$\overline{AD'}^2 = a^2 + (2a)^2 = 5a^2. \quad \overline{AD'} = a\sqrt{5}.$$

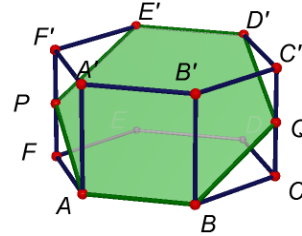
Notem que la secció passa per els punts mitjans P, Q de les

arestes $\overline{FF'}$, $\overline{CC'}$, respectivament.

La secció és l'hexàgon ABQD'E'P.

$$\overline{PQ} = \overline{FC} = 2a. \quad \overline{AE'} = \overline{BD'} = \overline{AC'} = 2a.$$

L'àrea de l'hexàgon ABQD'E'P és igual al doble de l'àrea del trapezi ABQP:



$$S_{ABQD'E'P} = 2 \left(\frac{\overline{AB} + \overline{PQ}}{2} \cdot \frac{\overline{AE'}}{2} \right) = 2 \left(\frac{a + 2a}{2} a \right) = 3a^2$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AFP$:

$$\overline{AP}^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}a \right)^2 = \frac{5}{4}a^2. \quad \overline{AP} = \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

El perímetre de l'hexàgon ABQD'E'P és:

$$P_{ABQD'E'P} = 2\overline{AB} + 4\overline{AP} = (2 + 2\sqrt{5})a.$$

Abril 2-3: Siga el cub ABCDEFGH. Siguen K, L, M els punts mitjans de les arestes AB, CG i EH, respectivament. Determineu la proporció entre els volums del tetraedre KLMF i el cub original.

Nivell: A partir de 4ESO.

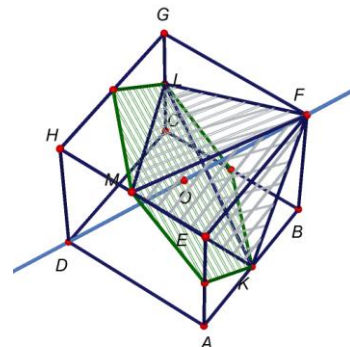
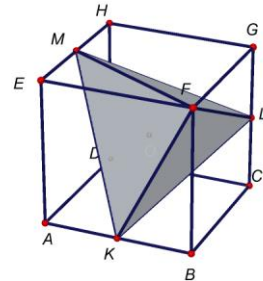
Solució: Siga $\overline{AB} = a$ l'aresta del cub ABCDEFGH.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AKE$:

$$\overline{EK} = \frac{\sqrt{5}}{2}a. \quad \text{Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle}$$

$$\text{rectangle } \triangle KEM: \overline{MK} = \frac{\sqrt{6}}{2}a. \quad \text{Anàlogament}$$

$$\overline{KL} = \overline{LK} = \overline{MK} = \frac{\sqrt{6}}{2}a$$



El centre O del cub és el centre del triangle equilàter $\triangle KLM$. $\overline{FK} = \overline{FL} = \overline{FM} = \overline{EK} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$.

Aleshores, F pertany a la mediatriu del triangle $\triangle KLM$. I, a més, $\overline{OF}$ és perpendicular al triangle $\triangle KLM$. $\overline{OF} = \frac{1}{2}\overline{DF} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. El volum del tetraedre és:

$$V_{KLMF} = \frac{1}{3}S_{KJLM} \cdot \overline{OF} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\sqrt{6}}{2}a \right)^2 \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{16}a^3.$$

La proporció entre els volums del tetraedre i el cub és:

$$\frac{V_{KLMF}}{V_{\text{cub}}} = \frac{\frac{3}{16}a^3}{a^3} = \frac{3}{16}.$$

Abril 6-7: A l'interior d'un con estan disposades dues esferes tangents entre si i tangents a la superfície del con. La proporció entre els radis de les esferes és igual a m/n ($m > n$). Determinar l'angle en el vèrtex de la secció axial del con.

Nivell: A partir de 4ESO.

Solució: Considerem la secció axial del con $\triangle ABC$

(triangle isòsceles $\overline{AC} = \overline{BC}$). Siga M el punt mitjà del diàmetre $\overline{AB}$ de la base.

Siga O el centre de la esfera inscrita al con i a la base del con de radi m.

Siga $h = \overline{CM}$, l'alçada del con.

Siga P el centre de la esfera superior tangent a la anterior i la superfície lateral del con de radi n.

El pla tangent a les dues esferes talla les generatrius $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ en els punts K, L, respectivament. Siga N la intersecció de l'alçada $\overline{CM}$ y $\overline{KL}$.

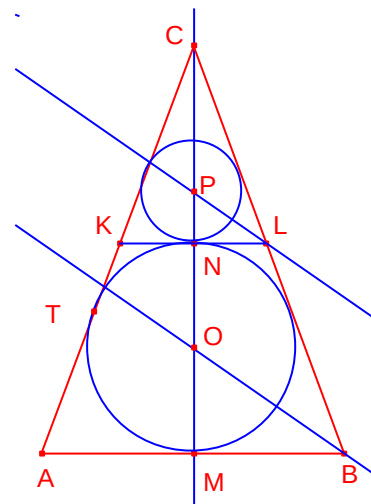
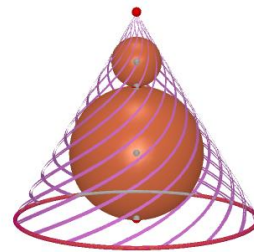
Els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle KLC$ són semblants i la raó de semblança és m/n .

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{h}{h-2m} = \frac{m}{n}$$

Resolent l'equació:

$$h = \frac{2m^2}{m-n}.$$



Siga $\alpha = \angle ACM$. L'angle en el vèrtex de la secció axial és, $\angle ACB = 2\alpha$. Siga T el punt de tangència de la esfera de centre O i la generatriu $\overline{AC}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle OTC$:

$$\sin \alpha = \frac{m}{h-m} = \frac{m}{\frac{2m^2}{m-n} - m} = \frac{m-n}{m+n}.$$

$$\alpha = \arcsin \frac{m-n}{m+n}.$$

$$\angle ACB = 2\alpha = 2 \cdot \arcsin \frac{m-n}{m+n}.$$

Abril 6-7: En qualsevol prisma el nombre total de cares C i el nombre

total d'arestes A, compleixen: $C = \frac{A}{3} + 2$

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Siga la base del prisma un polígon de n costats.

El nombre de cares és:

$$C = n + 2.$$

El nombre V de vèrtex és:

$$V = 2n.$$

Aplicant la fórmula d'Euler:

$$C + V = A + 2, \quad n + 2 + 2n = A + 2.$$

Resolent l'equació: $A = 3n$, i queda

$$\frac{A}{3} + 2 = \frac{3n}{3} + 2 = n + 2 = C.$$

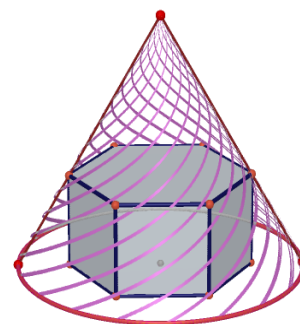


Abril 10-11: En un con equilàter (con en el qual el diàmetre de la base és igual a la generatriu) s'ha inscrit un prisma regular hexagonal amb totes les seves arestes iguals. Determinar la proporció entre els volums del prisma i del con.

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Siga O el centre de la base del con, de vèrtex S.

Siga ABCDEFA'B'C'D'E'F' el prisma regular hexagonal tal que



$$\overline{AB} = \overline{AA'} = x.$$

$$\overline{OA} = x.$$

$$\overline{AD} = \overline{A'D'} = 2x.$$

Siga $\overline{PQ} = 2R$ el diàmetre que passa per els punts A, D.

$$\overline{AS} = 2R.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle POS$: $\overline{OS} = R\sqrt{3}$, altura del con.

$$\overline{PA} = R - x.$$

$$\angle SPO = 60^\circ$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle PAA'$:

$$\overline{AA'} = \sqrt{3} \cdot \overline{PA}, \quad x = \sqrt{3}(R - x).$$

Resolent l'equació:

$$x = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} R.$$

El volum del prisma és:

$$V_{\text{prisma}} = 6 \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 \cdot x = \frac{3\sqrt{3}}{2} x^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2} R \right)^3 = \frac{81\sqrt{3} - 135}{8} R^3.$$

El volum del con equilàter és:

$$V_{\text{con}} = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R\sqrt{3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} R^3.$$

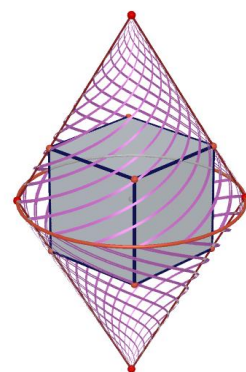
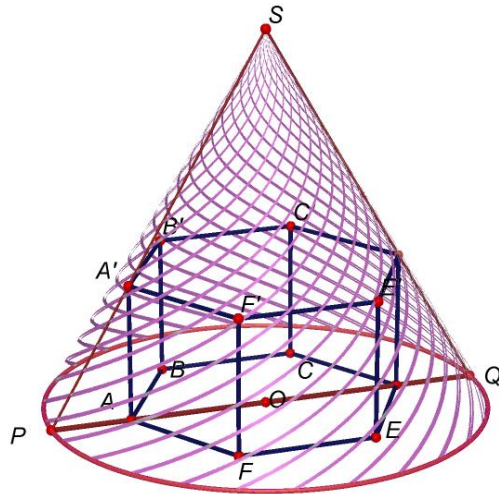
La proporció entre els volums del prisma i del con

$$\frac{V_{\text{prisma}}}{V_{\text{con}}} = \frac{\frac{81\sqrt{3} - 135}{8} R^3}{\frac{\pi\sqrt{3}}{3} R^3} = \frac{243\sqrt{3} - 405}{8\pi\sqrt{3}} \approx 0.3650.$$

Abril 12-13: A la figura, hi ha un doble con i un cub. Els dos cons són equilàters (el diàmetre de la base és igual a la generatriu). La cara inferior (superior) del cub és tangent a la cara lateral del con inferior (superior). Calcular la proporció entre els volums del cub i del doble con.

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Siga el cub ABCDA'B'C'D' d'aresta $\overline{AB} = x$.



Siga O el centre del cub i del doble con.

Siga $\overline{PQ} = 2R$ el diàmetre del doble con.

Siga M la intersecció del diàmetre $\overline{PQ}$ i l'aresta $\overline{AA'}$.

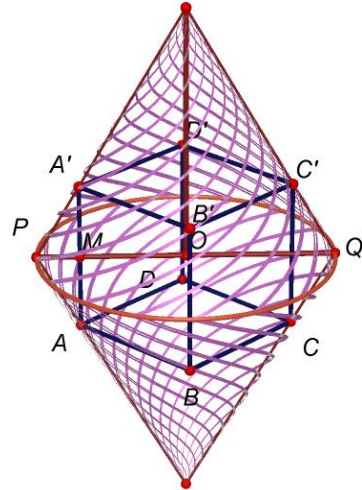
$$\overline{AC} = x\sqrt{2}, \overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}x \quad \overline{PM} = R - \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

$$\overline{A'M} = \frac{1}{2}x, \angle A'PO = 60^\circ.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle

$\triangle PAA'$:

$$\overline{A'M} = \sqrt{3} \cdot \overline{PM}, \frac{1}{2}x = \sqrt{3} \left(R - \frac{\sqrt{2}}{2}x \right).$$



Resolent l'equació:

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}+1}R = \frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{5}R.$$

El volum del cub és:

$$V_{\text{cub}} = x^3 = \left(\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{5}R \right)^3 = \frac{648\sqrt{2}-456\sqrt{3}}{125}R^3.$$

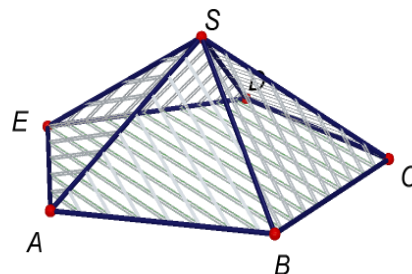
El volum del doble con és:

$$V_{2\text{con}} = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R\sqrt{3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}R^3.$$

La proporció entre els volums del cub i del doble con és:

$$\frac{V_{\text{cub}}}{V_{2\text{con}}} = \frac{\frac{648\sqrt{2}-456\sqrt{3}}{125}R^3}{\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}R^3} = \frac{648\sqrt{2}-456\sqrt{3}}{\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}} = 0.2792$$

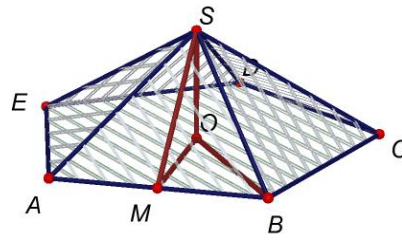
Abril 14-15: Siga donada una piràmide regular pentagonal tal que les seues cares laterals són triangles equilàters. Determineu l'angle que forma la cara lateral i la base. Determineu l'angle que forma una aresta lateral i la base.



Nivell: A partir de 4ESO.

Solució: Siga ABCDES la piràmide de base el pentàgon regular ABCDE i que té totes les arestes iguals, $\overline{AB} = a$.

Siga O el centre del pentàgon regular. Siga M el punt mitjà de l'aresta $\overline{AB}$. $\angle MBO = 54^\circ$.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle OMB$:

$$\frac{a}{2 \cdot \overline{OB}} = \cos 54^\circ. \quad \overline{OB} = \frac{a}{2 \cos 54^\circ}, \quad \frac{2 \cdot \overline{OM}}{a} = \operatorname{tg} 54^\circ. \quad \overline{OM} = 2a \cdot \operatorname{tg} 54^\circ.$$

Per a la primera pregunta, tenim: L'angle que forma una aresta lateral i la base és igual l'angle $\alpha = \angle OBS$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle SOB$:

$$\alpha = \arccos \frac{\overline{OB}}{\overline{BS}} = \arccos \frac{1}{2 \cos 54^\circ} \approx 31^\circ 43' 3''.$$

Per a la segona pregunta, tenim: l'angle que forma una cara lateral i la base és igual l'angle $\beta = \angle OMS$. Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle SMB$:

$$\overline{MS} = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle SOM$:

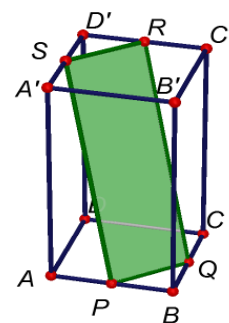
$$\alpha = \arccos \frac{\overline{OM}}{\overline{MS}} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} 54^\circ \approx 37^\circ 22' 39''.$$

Abril 16-17: Siga ABCDA'B'C'D' un prisma regular de base quadrada d'aresta 1 i alçada 2. Siguen P, Q, R i S els punts mitjans de les arestes AB, BC, C'D' i A'D', respectivament. Determineu l'àrea del rectangle PQRS

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Tenim: $\overline{BP} = \overline{BQ} = \frac{1}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\triangle PBQ$:



$$\overline{PQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\triangle BAD$:

$$\overline{BD} = \sqrt{2}.$$

Siga M el punt mitjà del segment $\overline{PQ}$, K el punt mitjà del segment $\overline{RS}$. Siga L la projecció de K sobre la base ABCD.

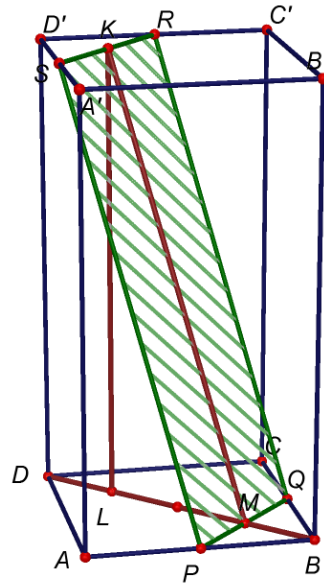
$$\overline{DL} = \overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{PQ} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad \overline{LM} = \overline{BD} - 2 \cdot \overline{BM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle KLM$:

$$\overline{KM} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

L'àrea del rectangle PQRS és:

$$S_{PQRS} = \overline{PQ} \cdot \overline{KM} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}.$$



Abril 18-19: Siga $ABCD A' B' C' D'$ un prisma regular de base quadrada de aresta 1 i alçada 2. Sean P, Q i R els punts mitjans de les arestes AB, BC i $C' D'$, respectivament. Determineu l'àrea de la secció del prisma determinada per el pla PQR

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: La secció determinada por els punts P, Q, R és el hexàgon PQURST, tal que U és el punt mitjà de la aresta $\overline{CC'}$, S és el punt mitjà de l'aresta $\overline{A' D'}$ i T es el punt mitjà de l'aresta $\overline{AA'}$.

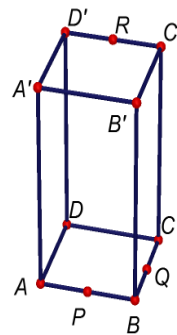
$$\overline{BP} = \overline{BQ} = \frac{1}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\triangle PBQ$:

$$\overline{PQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\triangle ABC$:

$$\overline{AC} = \overline{TU} = \overline{BD} = \sqrt{2}.$$



Siga L la projecció de K sobre la base ABCD.

$$\overline{DL} = \overline{BM} = \frac{1}{2} \overline{PQ} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\overline{LM} = \overline{BD} - 2 \cdot \overline{BM} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle KLM$:

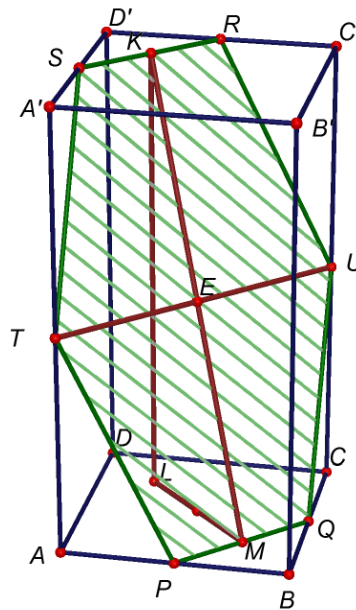
$$\overline{KM} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Siga E el punt mitjà del segment $\overline{TU}$.

$$\overline{ME} = \frac{1}{2} \overline{KM} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

L'àrea de la secció és igual al doble de l'àrea del trapezi PQUT:

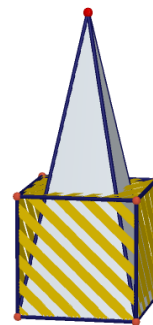
$$S_{PQRST} = 2 \left(\frac{\overline{PQ} + \overline{TU}}{2} \overline{ME} \right) = 2 \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}}{2} \frac{3\sqrt{2}}{4} \right) = \frac{9}{4}$$



Abril 20-21: Siga donat un cub i una piràmide quadrangular recta que té per base una cara del cub. Suposem que el cub i la piràmide tenen la mateixa àrea. Trobar la proporció entre els volums de la piràmide i el cub

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Siga el cub $ABCD A' B' C' D'$ d'aresta $\overline{AB} = a$. Siga $ABCDV$ la piràmide quadrangular regular.



Siga O el centre de la cara ABCD. Siga M el punt mitjà de l'aresta $\overline{AB}$. Siga $\overline{MV} = x$ l'alçada de una cara lateral de la piràmide. Siga $\overline{OV} = h$ l'altura de la piràmide. L'àrea del cub és:

$$S_{\text{cub}} = 6a^2$$

L'àrea total de la piràmide és:

$$6a^2 = a^2 + 4 \frac{1}{2} ax$$

El cub i la piràmide tenen la mateixa àrea, aleshores: $6a^2 = a^2 + 2ax$.

Resolent l'equació: $x = \frac{5}{2}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle MOV$:

$$\left(\frac{5}{2}a\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h^2.$$

Resolent l'equació:

$$h = a\sqrt{6}.$$

El volum de la piràmide és:

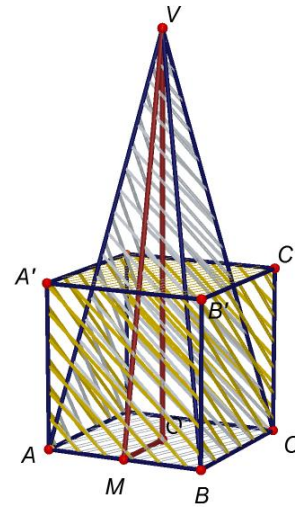
$$V_{\text{piràmide}} = \frac{1}{3}a^2 a\sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}a^3.$$

El volum del cub és:

$$V_{\text{cub}} = a^3.$$

La proporció entre els volums de la piràmide i el cub és:

$$\frac{V_{\text{piràmide}}}{V_{\text{cub}}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}a^3}{a^3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$



Abril 22-29: Siga ABCD un tetraedre regular d'aresta 2.

Sean E y F los puntos mitjans de les arestes BD i CD, respectivament. Determineu l'àrea del triangle $\triangle AEF$

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Siga $\overline{EF}$ la paral·lela mediana de la cara $\triangle BCD$, aleshores:

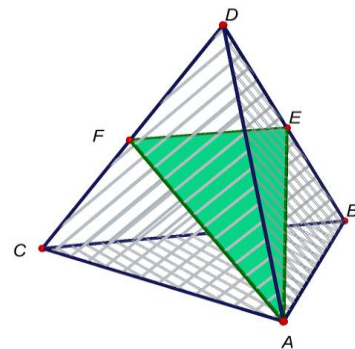
$$\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 1$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AFC$:

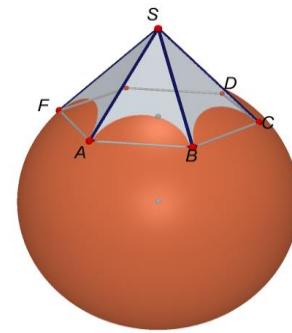
$$\overline{AF} = \overline{AE} = \sqrt{3}.$$

Utilitzant la fórmula de Herón l'àrea del triangle $\triangle AEF$ és:

$$S_{\triangle AEF} = \frac{\sqrt{(2\sqrt{3}+1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (2\sqrt{3})} - 1}{4} = \frac{\sqrt{11}}{4}.$$



Abril 23-30: Siga ABCDEFS una piràmide hexagonal regular de base un hexàgon regular ABCDEF de costat a . Siga a la altura de la piràmide. Una esfera és tangent a les arestes laterals de la piràmide en els vèrtexs de la base. Calculeu el radi de la esfera



Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Siga G el centre de la base ABCDEF de la piràmide

Siga $\overline{SG} = a$, l'alçada de la piràmide. Siga O el centre de l'esfera.

$$\angle SAO = 90^\circ, \angle AGO = 90^\circ.$$

Siga $\overline{OA} = R$ el radi de l'esfera. Siga $\overline{OG} = x$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\triangle AGS$: $\overline{AS} = a\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\triangle SAO$:

$$(a\sqrt{2})^2 + R^2 = (a + x)^2 \quad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\triangle AGS$:

$$a^2 + x^2 = R^2 \quad (2)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

$$\begin{cases} (a\sqrt{2})^2 + R^2 = (a + x)^2 \\ a^2 + x^2 = R^2 \end{cases}$$

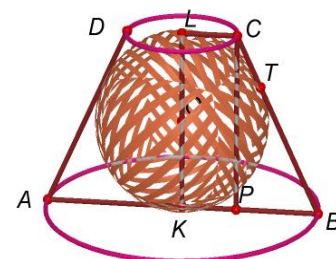
Resolent el sistema:

$$\begin{cases} x = a \\ R = a\sqrt{2} \end{cases}$$

Abril 24-25: Una esfera està inscrita en un con truncat. Proveu que l'àrea de l'esfera es menor o igual que l'àrea lateral del con truncat.

Nivell: A partir de 4ESO.

Solució: Siga r el radi de l'esfera. Siga ABCD una secció axial del con truncat.



Siga K el centre de la base inferior del con truncat. Siga $\overline{BK} = a$ el radi de la base inferior del con truncat. Siga L el centre de la base superior del con truncat. Siga $\overline{CL} = b$ el radi de la base superior del con truncat. Siga $a > b$. $\overline{KL} = 2r$. Siga $\alpha = \angle ABC$, $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Siga T el punto de tangència de l'esfera i la generatriu $\overline{BC}$ del con.

$$\overline{BK} = \overline{BT} = a, \overline{CL} = \overline{CT} = b. \overline{BC} = a + b.$$

Siga P la projecció de P sobre la base inferior del con truncat. $\overline{PB} = a - b$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle CPB$: $\sin \alpha = \frac{2r}{a + b}$.

L'àrea de la esfera és:

$$S_{\text{esfera}} = 4\pi r^2 = \pi(a + b)^2 \sin^2 \alpha.$$

L'àrea lateral del con truncat és:

$$S_{\text{conT}} = \left(\frac{2\pi a + 2\pi b}{2} \right) \overline{BC} = \pi(a + b)^2.$$

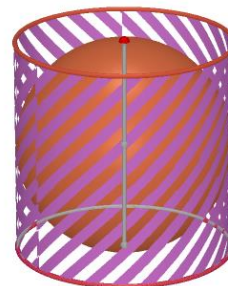
$$S_{\text{esfera}} = \pi(a + b)^2 \sin^2 \alpha < \pi(a + b)^2 = S_{\text{conT}}.$$

L'àrea lateral del con truncat és:

$$S_{\text{conT}} = \left(\frac{2\pi a + 2\pi b}{2} \right) \overline{BC} = \pi(a + b)^2.$$

$$S_{\text{esfera}} = \pi(a + b)^2 \sin^2 \alpha < \pi(a + b)^2 = S_{\text{conT}}.$$

Nota: L'àrea d'una esfera inscrita en un cilindre es igual a l'àrea lateral del cilindre



Abril 26-27: La secció d'un tetraedre regular que passa per dos punts mitjans de dos arestes de la base i és perpendicular a la base, divideix al tetraedre en dos políedres. Determinar la proporció entre els volums dels dos políedres.

Nivell: A partir de 3ESO.

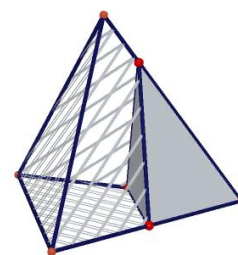
Solució: Siga ABCD el tetraedre regular d'aresta $\overline{AB} = a$.

Siga O el baricentre del triangle equilàter $\triangle ABC$. Siga $h = \overline{OD}$ l'alçada del tetraedre ABCD.

El volum del tetraedre regular ABCD és:

$$V_{\text{ABCD}} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 h = \frac{\sqrt{3}}{12} a^2 h$$

Siguen M, N els punts mitjans de les arestes $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, respectivament.



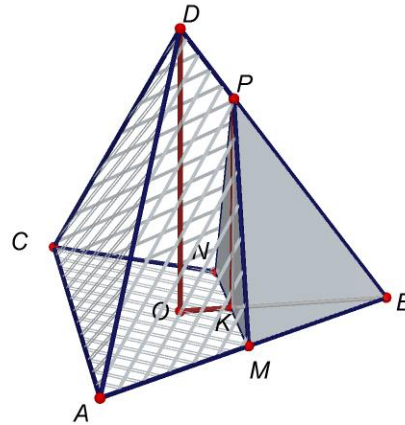
Siga K el punto mitjà del segment $\overline{MN}$.

Siga MNP la secció perpendicular a la base $\triangle ABC$.

$$\overline{OB} = \frac{\sqrt{3}}{3}a, \overline{BK} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a.$$

Els triangles rectangles $\triangle DOB$ i $\triangle PKB$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{h}{\frac{\sqrt{3}}{3}a} = \frac{\overline{PK}}{\frac{\sqrt{3}}{4}a}, \overline{PK} = \frac{3}{4}h.$$



El volum del tetraedre MNBP és:

$$V_{\text{MNBP}} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{3}{4}h = \frac{\sqrt{3}}{64}a^2h.$$

El volum del poliedre AMNCPD és igual al volum del tetraedre ABCD menys el volum del tetraedre MNBP:

$$V_{\text{AMNCPD}} = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2h - \frac{\sqrt{3}}{64}a^2h = \frac{13\sqrt{3}}{192}a^2h.$$

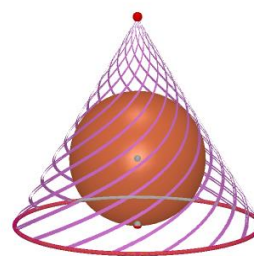
La proporció entre els volums dels poliedres AMNCPD i MNBP és:

$$\frac{V_{\text{AMNCPD}}}{V_{\text{MNBP}}} = \frac{\frac{13\sqrt{3}}{192}a^2h}{\frac{\sqrt{3}}{64}a^2h} = \frac{13}{3}.$$

Abril 28: Siga un con recte amb àrea de la base S_1 i àrea lateral S_2 . S'inscriu una esfera. Trobeu el radi de l'esfera

Nivell: A partir de 3ESO.

Solució: Considerem la secció axial del con $\triangle ABC$ (triangle isòsceles $\overline{AC} = \overline{BC} = g$).



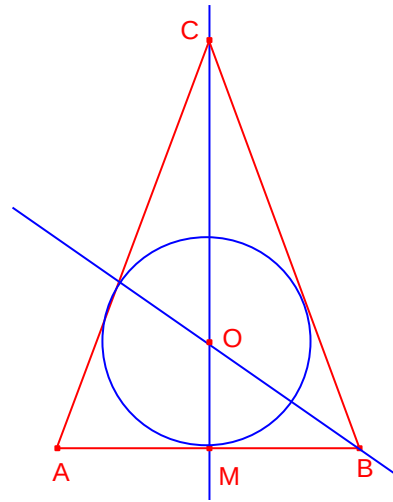
Siga M el punt mitjà del diàmetre $\overline{AB} = 2R$ de la base. Siga O el centre de l'esfera inscrita al con. Siga $r = \overline{OM}$ el radi de l'esfera.

$$S_1 = \pi R^2, S_2 = \pi Rg.$$

L'àrea del triangle $\triangle ABC$ és:

$$S_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{MC}}{2} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}}{2} r.$$

$$R\sqrt{g^2 - R^2} = (g + R)r.$$



$$r = R\sqrt{\frac{g^2 - R^2}{(g + R)^2}} = R\sqrt{\frac{g - R}{g + R}} = \sqrt{R^2 \frac{\frac{S_2}{\pi R} - R}{\frac{S_2}{\pi R} + R}} = \sqrt{R^2 \frac{S_2 - \pi R^2}{S_2 + \pi R^2}} = \sqrt{\frac{S_1 \cdot S_2 - S_1^2}{\pi \cdot S_2 + S_1}}$$