SOLUCIONS MAIG 2018

Col·lecció confeccionada per José Colón Lacalle per a preparar l'Olimpíada Matemàtica de la FESPM de primer cicle de l'ESO en 2002

Nivell: Primer cicle de l'ESO. Preparació a l'Olimpíada Matemàtica de la FESPM

Maig 1-2: La representació olímpica d'un país pot desfilar de tres en tres, de quatre en quatre o de cinc en cinc i queda per davant el banderer. Quantes persones la componen? La representació d'un altre país intenta el mateix, però ara de tres en tres queden dos solts, de quatre en quatre els sobren tres i de cinc en cinc els sobren quatre. Quants membres la componen? La representació espanyola té menys sort. De tres en tres sobren dos, de quatre en quatre i de cinc en cinc sobren tres, però el nombre d'atletes és major que el dels altres dos països. Quants són?

Solució: Per al primer país, si N és el nombre de representants, N – 1 (llevant al banderer) ha de ser múltiple de 3, de 4 i de 5, és a dir múltiple de (mcm (3, 4, 5) =) 60. Per tant, N = 60k + 1, és a dir, N $\in$ {61, 121, 181,…..}.

Per al segon país, si M és el nombre de representants, (M – 1) – 2 ha de ser múltiple de 3, és a dir M ha de ser múltiple de 3, (M – 1) – 3 ha de ser múltiple de 4, és a dir M ha de ser múltiple de 4, (M – 1) – 4 ha de ser múltiple de 5, és a dir M ha de ser múltiple de 5. És a dir, M ha de ser simultàniament múltiple de 3, de 4 i de 5, és a dir múltiple de (mcm (3, 4, 5) =) 60. Per tant, M = 60 k, és a dir, M $\in$ {60, 120, 180, 210,…}.

Per a Espanya, si R és el nombre de representants, (R – 1) – 2 ha de ser múltiple de 3 i (R – 1) – 3 = R – 4 ha de ser múltiple de 4 i de 5, és a dir de 20; és a dir R = 20k + 4. Per tant, R ha de ser múltiple de 3 i complir R = 20k + 4 $\in$ {24, 44, 64, 84, 104, 124, 144, ….}. Busquem dins d'aquest conjunt els múltiples de 3 i obtenim que el nombre de representants d'Espanya ha de ser {24 (menyspreat per exigències de l'enunciat), 84, 144,… } és a dir R = 20k + 4 amb k $\in$ {4, 7, 10, ..}

Maig 3-4: Un grup d'amics pensen realitzar un viatge de 5000 km. En el seu pressupost tenen inclòs una certa quantitat destinada a gastar en gasolina.

Afortunadament, el preu de la gasolina baixa uns dies abans de realitzar el viatge, la qual cosa els permetrà estalviar 0,5 cèntims d'euro per km, gràcies a la qual cosa podran recórrer 250 km més dels previstos. A quant va ascendir, el seu pressupost per a gasolina?

Solució: Siga y els € pressupostats per Km. De l'enunciat tenim: 5000·y = 5250·(y – 0,005). La seua solució és y = 0,105 €/km. Com estava pressupostat recórrer 5000 km, el pressupost per a gasolina era de (0,105·5000 =) 525 €.

Maig 5-6: El pare de Dani, que és fuster, va fer un cub de fusta i el va pintar de verd. Com era massa gran per a utilitzar-lo va decidir tallar-lo en 27 cubs més xicotets i iguals. Classifica aquests cubs més xicotets segons el nombre de cares pintades

Solució: Amb tres cares pintades hi ha 8 cubs (els cubs que estan en els vèrtexs del cub gran). Amb dues cares pintades hi ha 12 cubs. Amb una cara pintada hi ha 6 (un, el cub central, per cada cara del cub inicial). Finalment, amb cap cara pintada n'hi ha un (el cub que està a l'interior del cub inicial).

Maig 7-8: Dos trens que circulen per vies diferents, parteixen en el mateix moment i van un cap a l'altre. Un d'ells es desplaça amb velocitat constant de 80 km / h, l'altre es desplaça amb velocitat constant de 96 km / h es creuen quan han transcorregut 7 minuts i 30 segons. Quina distància, en km, separa les dues estacions?

Solució: Si t és el temps (mesurat en hores) transcorregut des de la sortida simultània de tots dos trens fins que es creuen, tenim que la distància recorreguda pel tren que circula a 80 km / h és 80 · t i la distància recorreguda pel tren que circula a 96 km / h és 96 · t. Com la distància entre les estacions és la suma de les dues distàncies tenim que la distància entre estacions és:

$$80 \cdot t + 96 \cdot t = 176 \cdot t = 176 \cdot (7m\ 30\ sg) = 176 \cdot (7{,}5\ m) = 176 \cdot \frac{7{,}5}{60} = 22\ km.$$

Maig 9: Cercar un número de quatre xifres tal que, si posem la coma entre les desenes i les centenes, ens dóna un nombre que és la mitjana aritmètica dels enters que queden a banda i banda de la coma.

Solució: Representarem un nombre de quatre xifres: a, b, c i d per el simbolisme $\overline{abcd}$, i anàlogament als de dues xifres. Amb això l'enunciat equival a l'equació:

$$\overline{ab},\overline{cd} = \frac{\overline{ab} + \overline{cd}}{2}$$

que utilitzant correctament el llenguatge algebraic equival a:

$$10a + b + \frac{c}{10} + \frac{d}{100} = \frac{10a + b + 10c + d}{2}$$

que simplificada porta a: $500a + 50b = 490c + 49d \Leftrightarrow 50(10a + b) = 49(10c + d) \Leftrightarrow 5^2 \cdot 2 \cdot (10a + b) = 7^2 \cdot (10c + d)$. I ara per la unicitat de la descomposició factorial en nombres primers tenim que l'última equació és equivalent al sistema:

$$\begin{cases} 10c + d = 50 \\ 49 = 10a + b \end{cases}$$

que es fàcilment resoluble. De la primera equació c = 5 i d = 0 i de la segona equació a = 4 i b = 9. El nombre de l'enunciat és: 4950.

Maig 10: En paginar un llibre s'han gastat 360 xifres, numerant totes les pàgines, des de la primera a l'última. Quantes pàgines té el llibre?

Solució: En total, en el llibre, hi ha les següents pàgines:

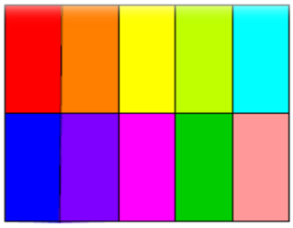
Nou d'un dígit (des de la número 1 fins a la número 9). Queden (360 - 9 =) 351 dígits. Noranta de dos dígits (des de la número 10 fins a la número 99). Queden (351-2 · 90 =) 171 dígits. com:

$$\frac{171}{3} = 57$$

Queden dígits per completar 57 pàgines numerades amb tres dígits (des de la 100 fins a la (57 + 99 =) 156). Com comprovació, hi ha 9 + 90 + 57 = 156 pàgines.

Maig 11-12: Quants rectangles es generen a la figura adjunta?

Troba un procediment per poder comptar el nombre de rectangles que hi hauria en les figures amb sis, set, ..., columnes.



Nivell: La generalització: OMS de segon cicle.

Solució: Tenim:

$$\text{Amb un rectangle} \;\Rightarrow\; 5\ (\text{primera fila}) + 5\ (\text{segona fila}) \;\Rightarrow\; 10 \text{ rectangles}$$

$$\text{Amb dos rectangles} \;\Rightarrow\; \begin{cases} (2\text{x}1) \;\Rightarrow\; 4\ (\text{primera fila}) + 4\ (\text{segona fila}) \;\Rightarrow\; 8 \text{ rectangles} \\ (1\text{x}2) \;\Rightarrow\; 5 \;\Rightarrow\; 5 \text{ rectangles} \end{cases}$$

$$\text{Amb tres rectangles} \;\Rightarrow\; 3\ (\text{primera fila}) + 3\ (\text{segona fila}) \;\Rightarrow\; 6 \text{ rectangles}$$

$$\text{Amb quatre rectangles} \;\Rightarrow\; \begin{cases} (4\text{x}1) \;\Rightarrow\; 2\ (\text{primera fila}) + 2\ (\text{segona fila}) \;\Rightarrow\; 4 \text{ rectangles} \\ (2\text{x}2) \;\Rightarrow\; 4 \;\Rightarrow\; 4 \text{ rectangles} \end{cases}$$

$$\text{Amb cinc rectangles} \;\Rightarrow\; 1\ (\text{primera fila}) + 1\ (\text{segona fila}) \;\Rightarrow\; 2 \text{ rectangles}$$

$$\text{Amb sis rectangles} \;\Rightarrow\; (2\text{x}3) \;\Rightarrow\; 3 \text{ rectangles}$$

$$\text{Amb huit rectangles} \;\Rightarrow\; (2\text{x}4) \;\Rightarrow\; 2 \text{ rectangles}$$

$$\text{Amb deu rectangles} \;\Rightarrow\; (2\text{x}5) \;\Rightarrow\; 1 \text{ rectangle}$$

En total apareixen 45 rectangles.

Per a la generalització obtenim les dues primeres files de l'esquema. La tercera fila és la diferència de dos termes consecutius de la successió de la fila 2. La quarta fila és la diferència de dos termes consecutius de la tercera fila i que constantment val 3.

Nombre columnes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre rectangles	3	9	18	30	45	63	84	108	135	165

6 9 12 15 18 21 24 27 30

3 3 3 3 3 3 3 3 3

Quan això passa els termes de la segona fila es diu que són una successió aritmètica de segona classe (o espècie) es pot provar que en una successió que passi això el seu terme general és un polinomi de segon grau: $a_n = a \cdot n^2 + b \cdot n + c$. Per obtenir els coeficients a, b i c substituir valors utilitzant els tres primers termes de la successió:

$$\left.\begin{array}{r} 3 = a + b + c \\ 9 = 4a + 2b + c \\ 18 = 9a + 3b + c \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = \dfrac{3}{2} \\ c = 0 \end{cases}$$

Així doncs:

$$a_n = \frac{3}{2} n(n+1)$$

NOTA: Per a alumnat de primer cicle ja és suficient observar que en restar dos termes consecutius de la successió obtenim els múltiples de 3.

<u>Maig 13:</u> Siguen naturals a, b, c, d, f i g tals que b·f = 91; a·d = 18; c·d = 16; b·g = 39. Si L = a + b + c i H = d + c = f + g; calculeu el producte L·H

<u>Solució:</u> Les condicions sobre els naturals configuren el següent sistema:

$$\left.\begin{array}{r} (1)\ \ bf = 91 \\ (2)\ \ ad = 18 \\ (3)\ \ cd = 16 \\ (4)\ \ bg = 39 \\ (5)\ \ d + c = f + g \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (1)\ y\ (4)\ \ \dfrac{f}{g} = \dfrac{91}{39} = \dfrac{7}{3} \ \Rightarrow\ 3f = 7g \ \Rightarrow \begin{cases} f = 7k & (6) \\ g = 3k & (7) \end{cases} \\ (2)\ y\ (3)\ \ \dfrac{a}{c} = \dfrac{18}{16} = \dfrac{9}{8} \ \Rightarrow\ 8a = 9c \ \Rightarrow \begin{cases} a = 9p & (8) \\ c = 8p & (9) \end{cases} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} (1) \\ (6) \end{array}\right\} \Rightarrow\ bf = 91 = b \cdot 7k \ \Rightarrow\ b = \frac{91}{7k} = \frac{13}{k}\ \ (10) \ \Rightarrow\ k = 1 \text{ o } k = 13\ \ (11)$$

$$\left.\begin{array}{r} (2) \\ (8) \end{array}\right\} \Rightarrow\ ad = 18 = d \cdot 9p \ \Rightarrow\ d = \frac{18}{9p} = \frac{2}{p}\ \ (12) \ \Rightarrow\ p = 1 \text{ o } p = 2\ \ (13)$$

Si ara exigim que (12), (9), (6) i (7) compleixen (5) tenim:

$$\frac{2}{p} + 8p = 7k + 3k \ \Rightarrow\ 2 + 8p^2 = 10pk \ \Rightarrow\ 4p^2 - 5kp + 1 = 0\ \ (14)$$

I, per últim:

$$\left.\begin{array}{r} (14) \\ (13) \\ (11) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} k = 1, p = 1 \ \Rightarrow\ 4 - 5 + 1 = 0 \ \text{ SI} \\ k = 13, p = 1 \ \Rightarrow\ 4 - 5 \cdot 13 + 1 \neq 0 \ \text{ NO} \\ k = 1, p = 2 \ \Rightarrow\ 16 - 10 + 1 \neq 0 \ \text{ NO} \\ k = 13, p = 2 \ \Rightarrow\ 16 - 130 + 1 \neq 0 \ \text{ NO} \end{cases}$$

Per tant, sols k = 1 i p = 1. D'on les solucions del sistema original són:

$$\left.\begin{array}{rr} (8)\ \ a = 9 & (10)\ \ d = 2 \\ (10)\ \ b = 13 & (6)\ \ f = 7 \\ (9)\ \ c = 8 & (7)\ \ g = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} L = a + b + c = 9 + 13 + 8 = 30 \\ H = d + c = f + g = 2 + 8 = 7 + 3 = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow\ L \cdot H = 30 \cdot 10 = 300$$

<u>Solució Ahmed Nuh de 6º en el E. P. del C. P. B. B. Verdejo de Manises (València)</u>

"Para resolver este problema lo primero que hacemos es descifrar los números a, b, c, d, f, g. Lo cual se puede hacer hallando el mcd de las distintas sumas resueltas, (b= mcd {91, 39}, d = mcd {16, 18}). Después se divide el resultado de cada suma entre 13 o 2 (b o d) según corresponda para hallar los demás números. Tras hacer estas operaciones se descifran ya todos los números: a = 9, b = 13, c = 8, d = 2, f =7 y g = 3. L·H = 300"

<u>Maig 14:</u> Sobre un rodet buit s'enrotlla fermament una cinta de 25 metres de llarg i 0,1 mm de gruix, donant així, un corró de 10 cm de diàmetre. Quin és el diàmetre del rodet original?
<u>Solució:</u> Sigui r és el radi del rodet i H la seva alçada. Ja que el volum que ocupa la cinta enrotllada en el rodet és el mateix que el generat per la cinta completament plana, tenim:

(Volum generat amb rodet = volum generat per la cinta plana)

$$(25 - r^2) \cdot \pi \cdot H = H \cdot 2500 \cdot 0{,}01 \ \Rightarrow \ 25 - r^2 = \frac{25}{\pi} \ \Rightarrow \ r = \sqrt{25 - \frac{25}{\pi}} \cong 4{,}12 \text{ cm} \ \Rightarrow \ D = 2r$$

$$\cong 8{,}24 \text{ cm}$$

<u>Maig 15-16:</u> Raúl i Aitana viatgen en el seu cotxe a velocitat constant. T'has adonat, li va dir Aitana a Raúl, que els senyals vermells estan regularment espaiades al llarg de la carretera? Em pregunto a quina distància estarà una de l'altra. Aitana va donar un cop d'ull al rellotge del cotxe i va comptar el nombre de senyals vermells que ultrapassaven en un minut. Que estrany, va exclamar! Si es multiplica aquest nombre per deu s'obté exactament la nostra velocitat en km / h. Admetent que en començar i acabar de comptar el minut el cotxe es trobava entre dos anuncis. Quina distància separa els senyals vermells?
<u>Solució:</u> Siga x el nombre de senyals depassades en un minut i d la distància entre senyals, llavors, de l'enunciat tenim:
10 · (nombre de senyals depassades en un minut) = velocitat en km / h = distància recorreguda en una hora10·x = distancia recorreguda en un minut·60

10·x = x·d·60

$$d = \frac{10}{60} = 0{,}1\hat{6} \text{ km} = 166,\hat{6} \text{ m}$$

<u>Maig 17-18:</u> A l'Agència d'Investigacions MIA (Matemàtiques Investigades i Aclarides), han de resoldre cert nombre de missions, però disposem d'un nombre d'agents tal que: si encarreguem una missió a cada agent, sobren x missions, però si donem x missions a cada agent, es queden x agents sense missió. Sabent que els agents i missions sumen menys de 15, sabries dir quants agents i missions són?
Solució: Siga y = nombre d'agents i t = nombre de missions. llavors:

Si encarreguem una missió a cada agent, sobren x missions $\Rightarrow$ t – y =x

Si donem x missions a cada agent, es queden x agents sense missió $\Rightarrow$ $x\cdot(y-x) = t$

Agents i missions sumen menys de 15 $\Rightarrow$ $y + t < 15$ (*)

$$\left.\begin{matrix} t-y=x \\ x(y-x)=t \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t=x+y \\ x(y-x)=t \end{matrix}\right\} \Rightarrow x(y-x)=x+y \Rightarrow y=\frac{x^2+x}{x-1}=x+2+\frac{2}{x-1}$$

Per tant, $x-1$ deu ser divisor de 2. Es dir, $x-1=1$ o $x-1=2$.

Si $x = 2$, tenim $y = 6$ i això porta a (primera equació del sistema) $t = 8$

Si $x = 3$, tenim $y = 6$ i això porta a (primera equació del sistema) $t = 9$

D'aquestes dues solucions del sistema sols la primera compleix la condició (*). Per tant hi ha sis agents i huit missions.

<u>Maig 19-20:</u> Un presidiari no recordava quan havia de sortir de la presó. El carceller va voler ajudar mantenint amb ell la següent conversa:

Carceller: Quants anys tens?

Pres: Vint.

Carceller: Jo tinc cinquanta-quatre. Quin dia vas néixer?

Pres. Avui és el meu aniversari.

Carceller: També és el meu! El dia que tingui el doble d'edat que tu, sortiràs de la presó.

Quant de temps dura la condemna del pres?

<u>Solució:</u> Sigui x els anys de condemna del pres. Transcorreguts aquests anys el pres tindrà 25 + x anys i el carceller tindrà 54 + x anys. Com llavors l'edat del carceller serà doble de la del pres:

$$54 + x = 2\cdot(25 + x) \Rightarrow 54 + x = 50 + 2x \Rightarrow x = 4 \text{ anys.}$$

El pres ha d'estar 4 anys en la presó.

<u>Maig 21-22:</u> Col·loca els dígits 2, 3, 4, 5 i 6, d'esquerra a dreta, de manera que el nombre de dues xifres format pels dos dígits de l'esquerra és un múltiple de 2; el format pels dígits segon i tercer per l'esquerra és múltiple de 3, ..., el format pels dígits cinquè i sisè per l'esquerra és múltiple de 6.

1					

<u>Solució:</u> Cal recordar els criteris de divisibilitat: Columnes primera i segona: Un nombre és divisible per 2 sii acaba en xifra parell. Columnes segona i tercera: Un nombre és múltiple de tres sii la suma de les seves xifres és múltiple de tres. Columnes tercera i quarta: Un nombre és múltiple de quatre sii les seues dues últimes xifres és múltiple de quatre. Columnes quatre-cinc: Un nombre és múltiple de cinc sii acaba en zero o cinc (en aquest problema si acaba en cinc). Columnes cinc-sis: Un nombre és múltiple de sis sii és múltiple de dos i de tres

1	2	4	no		
1	4	2 5	no 2 6	no no	
1	6	3	2 no	5	4

Per tant el nombre és el 163254.

Maig 23-24: Una reina captiva, amb el seu fill i filla va ser tancada en una torre. A la part exterior d'una finestra hi havia una corriola de la qual penjava una corda amb dues cistelles lligades, una a cada extrem; les dues cistelles d'igual pes. Els captius van aconseguir escapar usant un pes que hi havia a la torre. Hauria estat perillós per a qualsevol dels tres descendir pesant més de 15 kg que el contingut de la cistella inferior, perquè hauria baixat massa ràpid; i se les van enginyar per no pesar tampoc menys d'aquesta diferència de 15 kg. La cistella que baixava feia pujar, naturalment, a l'altra. Com ho van aconseguir? La reina pesava 75 kg, la filla 45 kg, el fill 30 i la pesa 15 kg.

Solució: El descens pot descriure com segueix:

1. Posen la pesa a la cistella i aquesta baixa.
2. Es puja el fill a l'altra cistella, i la cistella baixa.
3. Treuen el pes i en el seu lloc puja la filla. La cistella baixa.
4. Es treu el fill i posa el pes. La filla es treu i la cistella baixa.
5. Es posa el fill a l'altra cistella i la seva cistella baixa.
6. Es posa la filla a la cistella juntament amb el fill. En l'altra cistella es treu la pesa i es puja la reina. La cistella baixa.
7. El fill es puja en una cistella i en l'altra es deixa a la pesa. La cistella baixa.
8. Es treu la pesa i es posa la filla. La cistella baixa.
9. Es deixa la pesa sola i la cistella baixa.
10. Es posa el fill i en l'altra cistella es deixa la pesa. La cistella es baixa. I ja hi ha els tres fora de la torre.

Maig 25-26: En la novel·la "Els Viatges de Gulliver" es narren els viatges Gulliver per diversos països imaginaris, un d'ells és Lil·liput, els habitants són tots nans, però amb les mateixes proporcions que

Gulliver. Si Gulliver és 12 vegades més alt que els lil·liputencs, quants matalassos de lil·liputencs hem de cosir per fer un matalàs per Gulliver?.

Solució: Cadascuna de les tres dimensions de l'espai: alçada, amplada i profunditat es veu afectada pel canvi d'escala. És a dir, Gulliver necessités 12 matalassos d'altura, 12 matalassos d'amplada i 12 matalassos de profunditat. En total 123 = 1728 matalassos

Maig 27: Un meló d’argel va pesar 10 kg. Se sap que el 99% d'ell és aigua. Després de cert temps al Sol, es va evaporar part de l'aigua, sent ara el percentatge d'aigua del 98%. Quant pesa ara el meló d’argel?.

Solució: L’aigua equival a un 1% del peso inicial. Per tant, de matèria seca, hi ha inicialment:

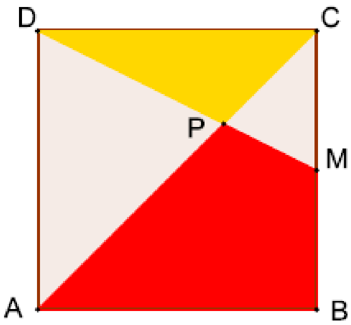
$$\frac{1}{100} \cdot 10 = 0{,}1 \text{ kg}$$

Eixa matèria seca no s’altera i, segons l’enunciat equival al 2% del peso final. Per tant, si x és pes final del meló d’argel, tenim:

$$0{,}1 = \frac{2}{100} \cdot \text{x} \quad \Rightarrow \quad \text{x} = \frac{0{,}1 \cdot 100}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ kg}$$

Doncs, el pes final del meló d’argel és de 5 kg, la meitat del pes inicial.

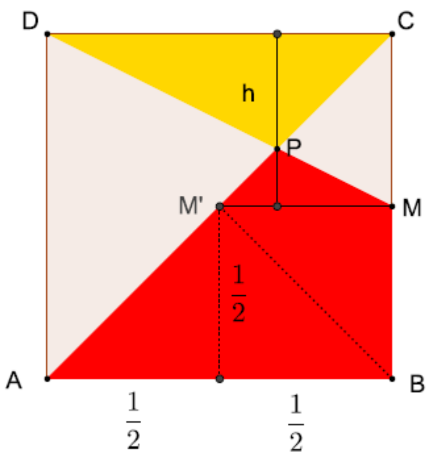
Maig 28: Siga ABCD un quadrat de costat unitat. Si M és el punt mitjà de CB, trobeu la raó entre l’àrea del quadrilàter APMB i l’àrea del triangle ∆CDP



Solució 1: Siga M’ la intersecció de la recta paral·lela a DC que passa per M amb la diagonal AC. Aleshores ∆PDC ≅ ∆PMM’ (puig tenen iguals els angles en P (oposats pel vèrtex) i ∠CDM = ∠M’MP (per ser alterns interns)).

Por tant, tenen els seus costats proporcionals i també mantenen eixa proporcionalitat les altures. Per tant:

$$\frac{1}{1/_2} = \frac{\text{DC}}{\text{M'M}} = \frac{\text{h}}{\frac{1}{2} - \text{h}} \quad \Rightarrow \quad \text{h} = \frac{1}{3}$$



Per tant:

$$\text{A}_{\Delta\text{CDP}} = \frac{\text{base} \cdot \text{alçada}}{2} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\text{A}_{\text{APMB}} = 3 \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}}{2} = \frac{5}{12}$$

Per tant:

$$\frac{A_{\Delta CDP}}{A_{APMB}} = \frac{1/_6}{5/_{12}} = \frac{2}{5}$$

<u>Solució 2 (Ignacio Larrosa @ilarrosac):</u>

P es el baricentre del triangle ΔDBC. Per tant:

$$A_{\Delta PMC} = \frac{1}{3} \cdot A_{\Delta DMC} = \frac{1}{12}$$

$$A_{\Delta PDC} = \frac{2}{3} \cdot A_{\Delta DMC} = \frac{1}{6}$$

$$A_{\Delta APD} = 4 \cdot A_{\Delta PMC} = \frac{1}{3}$$

$$A_{ABMP} = 1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

<u>Mayo 29:</u> Quant sumen els 100 primers números que apareixen després de la coma decimal al calcular 1/13?

<u>Solució:</u> Tenim:

$$\frac{1}{13} = 0,\overset{\frown}{076923}$$

Els sis dígits que formen el període sumen (0 + 7 + 6 + 9 + 2 + 3 =)27. En les 100 primeres posicions decimals hi ha (100 = 16·6 + 4) setze períodes enters i les quatre primeres xifres del període. Per tant, la suma buscada és:

$$16·27 + 0 + 7 + 6 + 9 = 432 + 22 = 454$$

<u>Maig 30:</u> La Laia i Aitana, que tenen pressa, pugen per una escala mecànica. Aitana és el triple de ràpida que la Laia. En acabar de pujar Aitana va comptar 75 escalons i Laia 50 graons.

Quants esglaons té visibles l'escala mecànica?.

<u>Solució:</u> Si anomenem x als graons que se li "amaguen" a Aitana, tenim:

$$75 + x = 50 + 2x \;\Rightarrow\; 75 - 50 = x \;\Rightarrow\; 25 = x$$

Per tant, el nombre d'escalons visibles de l'escalera són: 75 + 25 = 100.

<u>Maig 31:</u> Dani, s'observa que l'any que compleix 14 anys el seu pare compleix 41. Si el seu pare visqués 100 anys, quantes vegades passarà això?.

<u>Solució:</u> Deu de complir-se:

Edat pare = Edat Dani + 27

Sent l'edat del pare 10·a + b i l'edat de Dani 10·b + a amb a, b $\in$ {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Per tant:

$$10·a + b = 10·b + a + 27 \;\Leftrightarrow\; 9·(a - b) = 27 \;\Leftrightarrow\; a - b = 3$$

que té per solucions:

a	b	Edat Dani (10·b + a)	Edat pare (10·a + b)
4	1	14	41
5	2	25	52
6	3	36	63
7	4	47	74
8	5	58	85
9	6	69	96

El expressat en l'enunciat passarà sis vegades.