SOLUCIONS JUNY 2018

Solucions extretes del llibre:

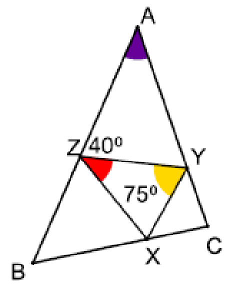
XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA 2014

Obtenibles en http://www.concursoprimavera.es#libros

NIVELL: Batxillerat i preparació OME

AUTORS: Col·lectiu "Concurso de Primavera". Comunitat de Madrid

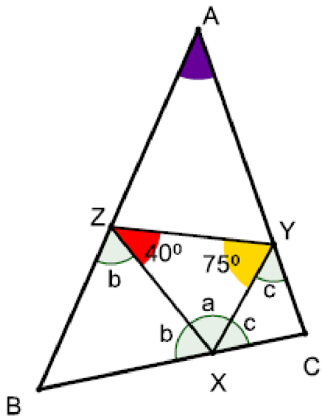
Juny 1: En el ΔABC, AY=AZ, BX=BZ, CX=CY, $\angle XZY = 40°$, $\angle XYZ = 75°$ Quant mesura $\angle BAC$?



Solució 1: Tenint en el cap que la suma dels angles interns d'un triangle és 180°, tenim en la figura d'abaix:

$$\Delta XYZ \Rightarrow a = 180° - (40° + 75°) = 65°$$

$$a + b + c = 180° \Rightarrow b + c = 180° - 65° = 115°$$



$\Delta ABC \Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = 180° \Rightarrow \angle A + 180° - 2b + 180° - 2c = 180° \Rightarrow \angle A + 180° = 2 (b + c) \Rightarrow \angle A = 2·115° - 180° = 50°$.

Solució d'Ignacio Larrosa (@ilarrosac): Tenim:

$\angle YXZ = 180° - (40° + 75°) = 65°$

Com AY=AZ, BX=BZ, CX=CY les mediatrius del triangle ΔXYZ coincideixen amb les bisectrius del triangle ΔABC i per tant la circumferència circumscrita al ΔXYZ coincideix amb la circumferència inscrita en el triangle ΔABC amb centre en I. Ja que l'angle central és doble que l'angle inscrit tenim:

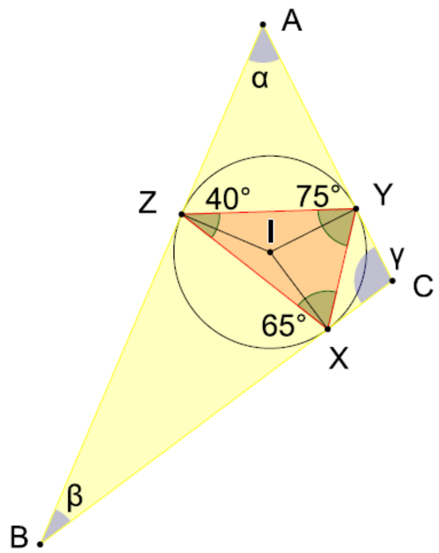
$$\angle XYZ = 2·\angle YXZ = 2·65° = 130°$$

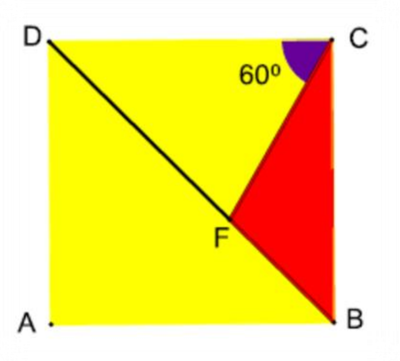
A més, ja que la tangent és perpendicular al radi en la circumferència: $\angle IZA = \angle IYA = 90°$.

Per tant, en el quadrilàter ZIYA:

$\angle A = \alpha = 360° - (\angle YIZ + \angle IZA + \angle IYA) = 360° - (\angle YIZ + 90° + 90°) = 180° - 2·65° = 50°$.

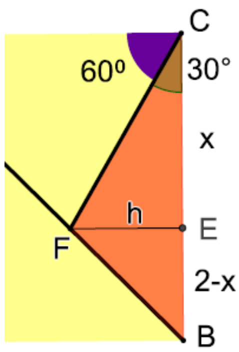
D'idèntica manera: $\beta = 180° - 2·75° = 30°$ y $\gamma = 180° - 2·40° = 100°$





Juny 2-3: En el quadrat ABCD es considera el punt F definit com la intersecció de la diagonal BC amb la recta que forma 60° amb el costat DC. Trobar l'àrea del triangle ΔFCB

Solució: Tracem per F una paral·lela a AB, aconseguint el segment FE que és l'altura del triangle d'interès.



Al ser ΔFCE un triangle 30°-60°-90°, tenim x = $\sqrt{3}$·h.

Per altra banda, ΔFEB és un triangle 45°-45°-90°, i d'ací que h = 2 – x

Del sistema que formen las dues últimes expressions obtenim:

$$h = \frac{2}{1+\sqrt{3}}$$

Y, per últim:

$$A_{\Delta FEB} = \frac{2 \cdot h}{2} = \frac{2}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$$

Juny 4: Calcular N sabent que N és el menor enter positiu que en dividir-lo entre 5 dóna residu 2, en dividir-lo per 7 dóna residu 3 i en dividir-lo per 9 dóna residu 4.

Solució: De l'enunciat tenim que deu complir-se el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} N = 2(5) \\ N = 3(7) \\ N = 4(9) \end{array}\right\}$$

Per a resoldre-ho, buscarem solucions al sistema que formen les dues primeres expressions i veurem quina d'elles és la primera a complir la tercera expressió

$$\left.\begin{array}{l} N = 5p + 2 \\ N = 7q + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 5p + 2 = 7q + 3 = (5+2)q + 3 \Rightarrow 5 \cdot (p - q) = 2q + 1 \Rightarrow 5k = 2q + 1$$

Com 5k acaba en 0 o 5, 2q deu acabar en 9 o en 4. Com 2q es parell no pot acabar en 9. Per tant 2q acaba en 4, per tant, q acaba en 2 o 7. Es dir q pot ser 2, 7, 12, 17, 22, 27,...

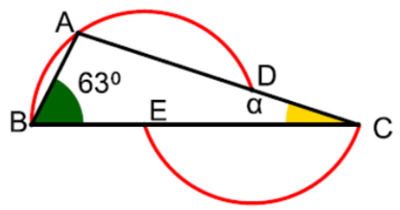
q	2q+1	k=$\frac{2q+1}{5}$	P = k + q	N = 5p + 2 = 7q + 3	residu mòdul 9
2	5	1	3	17	17=8(9)
7	15	3	10	52	52=7(9)

12	25	5	17	87	87=6(9)
17	35	7	24	122	122=5(9)
22	45	9	31	157	**157=4(9)**

La solució és el nombre 157

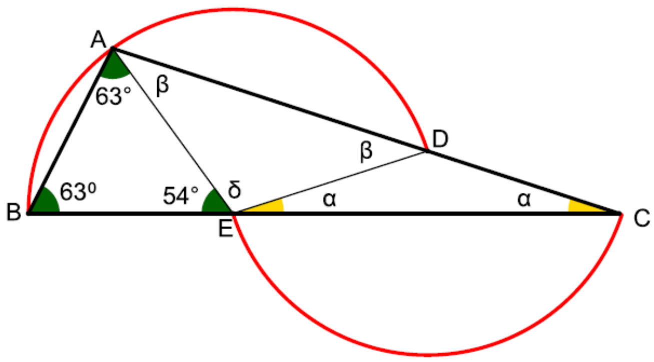
Molts dels càlculs de la taula poden evitar-se a l'adonar-nos que totes les columnes son PA. La primera i segona de diferència 5, la tercera de diferència 2, la quarta de diferència 7, la quinta de diferència 32 i la sisena de diferència 1 (els residus)

Juny 5-6: En la figura adjunta s'observa un triangle ΔABC i dos arcs de circumferència: un de centre E que passa per A, B y D i altre de centre D que passa per E i C. Si l'angle $\angle EBA = 63°$, quin és el valor de l'angle α?



Solució: Els triangles de la figura són isòsceles i es compleix:

$$\left.\begin{array}{r} (1)\quad \delta + 2\beta = 180° \\ (2)\quad \beta = 2\alpha \\ (3)\ \alpha + 54° + \delta = 180° \end{array}\right\}$$



De (3): $\delta = 126° - \alpha$

I substituint en (1), tenint en compte (2):

$$126° - \alpha + 4\alpha = 180°$$

Que porta a $\alpha = 18°$

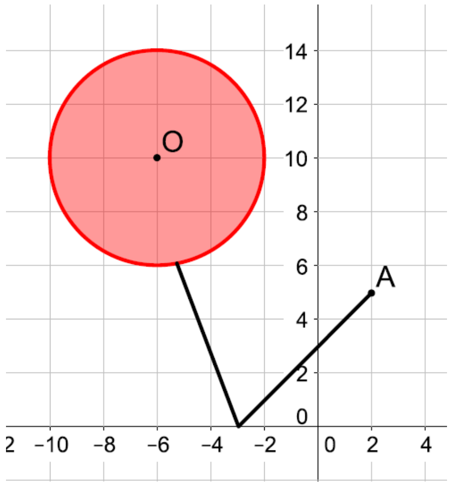
Juny 7: Siga n un natural major que 2018. Si n^2+4 i $n+3$ no són primers entre sí, quin és el seu màxim comú divisor?

Solució: Tenim:

$$n^2 + 4 = (n + 3) \cdot (n - 3) + 13$$

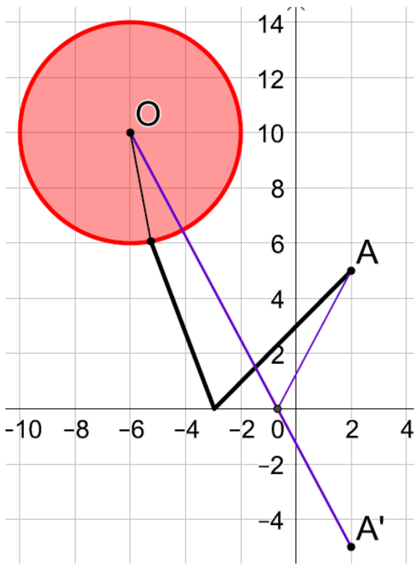
Per l'algoritme d'Euclides, el mcd $(n^2 + 4; n + 3)$ divideix al residu de la dita divisió, i com $n^2 + 4$ i $n + 3$ no són primers entre si, el seu màxim comú divisor no és 1, per tant, deu ser 13.

Juny 8-9: Trobeu la longitud més curta de la poligonal que uneix el punt A (2, 5), passa per l'eix X i talla a la circumferència $(x + 6)^2 + (y - 10)^2 = 16$



Solució: Siga O (- 6; 10) les coordenades del centre de la circumferència. Si A'(2; - 5) és el simètric de A respecte de l'eix X, la longitud més curta que uneix O, amb l'eix X i el punt A és el segment que uneix O i A', la longitud del qual és:

$$d(O; A') = \sqrt{(2+6)^2 + (-5-10)^2} = 17$$



Finalment (per la desigualtat triangular) la distància més curta entre qualsevol punt de la circumferència i A' és la del segment que passa pel centre de la circumferència, després a la distància anterior li hem de treure la del radi de la circumferència. Per tant, la longitud més curta de la poligonal que uneix el punt A (2, 5), passa per l'eix X i talla a la circumferència $(x + 6)^2 + (y - 10)^2 = 16$ és (17 – 4 =) 13

Juny 10: Trobeu els valors de m perquè les rectes y = x – 2 i y = mx + 3 es tallen en un punt de coordenades positives

Solució: Òbviament $m \neq 1$, ja que en cas contrari les rectes són paral·leles i no es tallen (per tindre distinta ordenada en l'origen). Trobem el punt de tall de les rectes resolent el sistema que formen les equacions de les rectes:

$$\left.\begin{array}{r} y = x - 2 \\ y = mx + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x - 2 = mx + 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{1-m} \quad y = \frac{2m+3}{1-m}$$

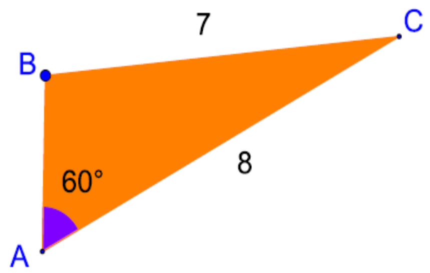
Com les coordenades han de ser positives:

$$\frac{5}{1-m} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m < 1$$

$$\frac{2m+3}{1-m} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m > -\frac{3}{2}$$

Per tant, deu complir-se $m \in \,]-1{,}5;\, 1[$

Juny 11: D'un triangle ΔABC, obtús en B se sap que a = 7, b = 8 y ∠BAC = 60°. Trobeu la seua àrea



Solució: Aplicant el teorema dels cosinus:

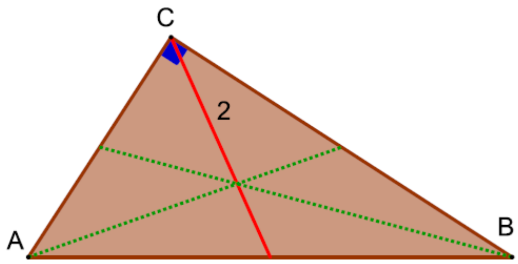
$$7^2 = 8^2 + c^2 - 2 \cdot 8 \cdot c \cdot \cos(60)$$

$$c^2 - 8c + 15 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} c = 5 \\ c = 3 \end{cases}$$

Com el triangle és obtusangle: $b^2 > a^2 + c^2$ i això comporta que sols siga admissible c = 3. Per últim, utilitzant la fórmula d'Heron:

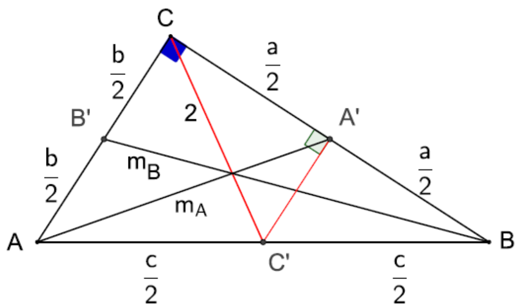
$$A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = \left\{ s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3+7+8}{2} = 9 \right\}$$
$$= \sqrt{9 \cdot (9-3) \cdot (9-7) \cdot (9-8)} = 6\sqrt{3}$$

Juny 12: En un triangle rectangle ΔABC la mediana sobre la hipotenusa mesura 2. Trobeu la suma dels quadrats de les altres medianes.



Solució: Apliquem Pitàgores al ΔCC'A'

$$2^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \Rightarrow 16 = b^2 + c^2 \;\; (1)$$



Apliquem Pitàgores al ΔCAA'

$$m_A{}^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad (2)$$

Apliquem Pitàgores al ΔCBB'

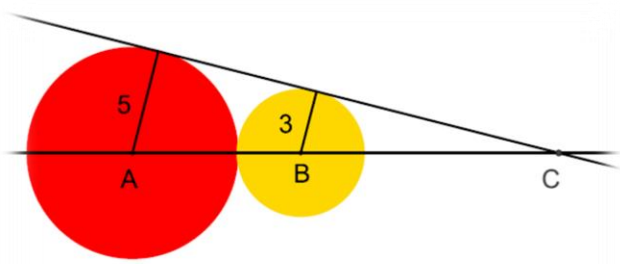
$$m_B{}^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad (3)$$

Sumant (2) i (3)

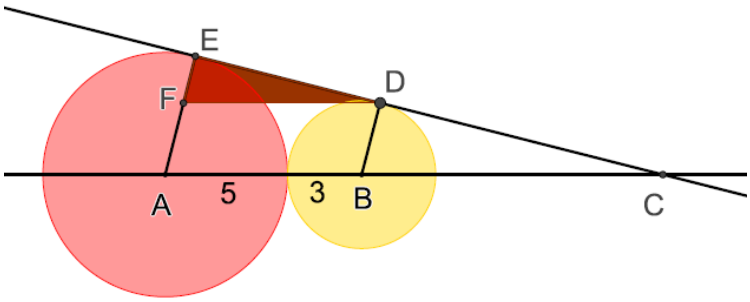
$$m_A{}^2 + m_B{}^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} + a^2 + \frac{b^2}{4} = \frac{5}{4}(a^2 + b^2) = \frac{5}{4} \cdot 16 = 20$$

tenint en compte l'equació (1)

Juny 13-14: Els radis de dues circumferències tangents exteriors són 5 i 3. Una recta tangent exterior a les dues circumferències talla a la recta AB en C. Quan mesura el segment BC?



Solució: Tracem FD, paral·lela a AC. Queda format el triangle ΔEFD que és rectangle en E



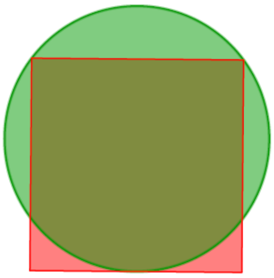
El triangle ΔEFD és semblant al ΔEAC, ja que estan en posició de Tales. Per tant:

$$\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{EA}}=\frac{\mathrm{FD}}{\mathrm{AC}} \Rightarrow \frac{2}{5}=\frac{8}{\mathrm{AC}} \Rightarrow \mathrm{AC}=20 \Rightarrow \mathrm{BC}=\mathrm{AC}-\mathrm{AB}=20-8=12$$

Juny 15: Tinc 6 parells de calcetins de diferents colors, tots regirats en un calaix. Quants calcetins dec traure, com a mínim, per assegurar traure dos del mateix color?

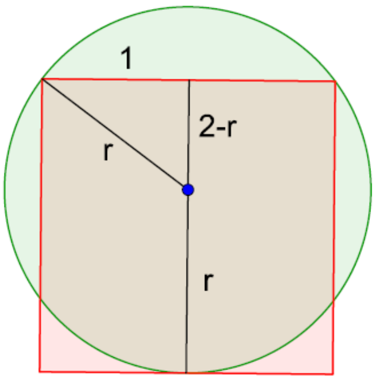
Solució: Si en traiem 6, podem ser tan desafortunats d'extreure un de cada color. El següent que traguem ja serà d'algun dels colors que ja tenim. Per tant hem de treure set mitjons per assegurar que hi ha dos del mateix color.

Juny 16: Una circumferència passa per dos vèrtexs contigus d'un quadrat de costat 2 i és tangent al costat oposat. Trobeu el seu radi.



Solució: Si r és el radi de la circumferència, tenim (veure figura a la dreta) aplicant el teorema de Pitàgores:

$$r^2=1^2+(2-r)^2 \Rightarrow r=\frac{5}{4}$$



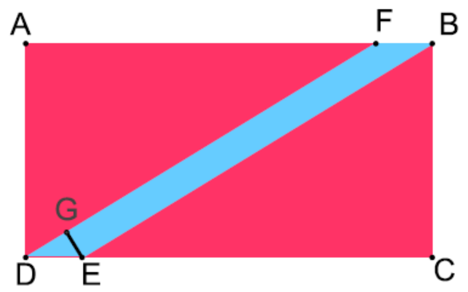
Juny 17: En la primera fase d'un examen, la mitjana de les puntuacions va ser de 76 sobre 100. La nota mitjana dels estudiants que es van classificar per a la segona fase va ser 83 i la mitjana dels no classificats va ser 55. Què % es va classificar per a la segona fase?

Solució: Si hi ha un total de n persones, la suma de totes les puntuacions és 76n. Suposem que es classifiquen c d'ells. La puntuació total d'ells és 83c i la puntuació total dels no classificats és 55·(n – c). Amb això:

$$76\mathrm{n} = 83\mathrm{c} + 55(\mathrm{n} - \mathrm{c}) \;\Rightarrow\; 21\mathrm{n} = 28\mathrm{c} \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{n}} = \frac{21}{28} = 0{,}75$$

Per tant, es van classificar el 75% dels inicials.

Juny 18-19: En el rectangle de la figura, de dimensions 12 i 6, DF//BE i EG⊥DF. Si l'àrea del paral·lelogram DEBF és 12, trobeu la longitud EG



Solució: Si agafem DE com base del quadrilàter DEBF tindrem que, la seua altura és 6 i al ser 12 la seua àrea, deu ser DE = 2. D'on:

EC = 12 – 2 = 10

I al aplicar Pitàgores al triangle ΔECB (rectangle en C) aconseguim:

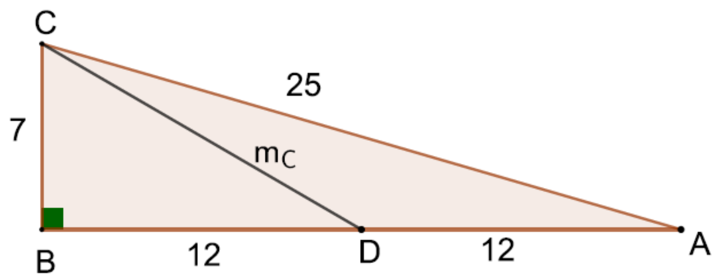
$$\mathrm{EB} = \sqrt{\mathrm{EC}^2 + \mathrm{CB}^2} = \sqrt{10^2 + 6^2} = 2\sqrt{34}$$

Per últim, els triangles ΔDEG i ΔEBC són semblants, ja que els dos són rectangles (en G i en C i ∠GDE = ∠BEC). Per tant:

$$\frac{\mathrm{EG}}{2} = \frac{6}{2\sqrt{34}} \;\Rightarrow\; \mathrm{EG} = \frac{3\sqrt{34}}{17}$$

Juny 20: En un triangle ΔABC es té c=24, a=7, b=25. Quina és la longitud de la mediana per C?

Solució: Ja que, $25^2 = 24^2 + 5^2$ es té que ΔABC és rectangle en B



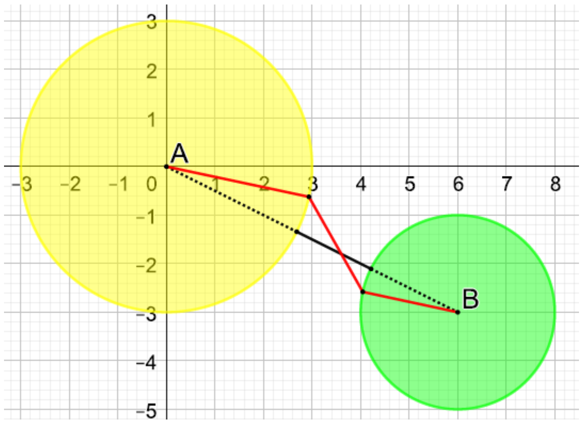
Ara al aplicar Pitàgores al triangle ΔBCD:

$$\mathrm{m_C} = \sqrt{12^2 + 7^2} = \sqrt{193}$$

Juny 21: Quina és la distància més curta entre els punts de les dues circumferències:

$x^2 + y^2 = 9$

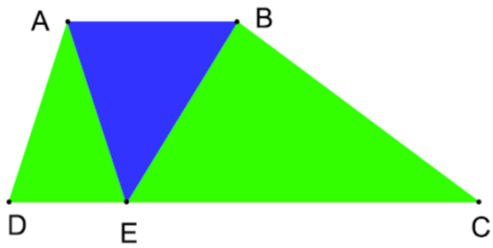
$(x - 6)^2 + (y + 3)^2 = 4$?



Solució: Es tracta d'una circumferència de centre A(0; 0) i radi 3 i una circumferència de centre B(6; - 3) i radi 2. Per la desigualtat triangular la menor distància correspon al segment que uneix els centres de les circumferències. És a dir, la menor distància entre les circumferències és:

$$\sqrt{(0-6)^2 + \left(0-(-3)\right)^2} - 3 - 2 = 3\sqrt{5} - 5$$

Juny 22-23: L'àrea del trapezi ABCD és 18, AB = 4 i DE = $\frac{1}{4}$ DC. Si l'altura del trapezi és un enter i el costat DC és un enter imparell, calculeu l'àrea del triangle ΔABE



Solució: La posició del punt E no influeix en res (sempre que E estiga en el segmento DC), ja que tots els triangles ΔABE tenen la mateixa base: AB i la mateixa altura: la distancia entre els segments AB i DC. Siga h l'altura del trapezi i 2k + 1 la base DC. Aleshores:

$$18 = \frac{2k+1+4}{2} \cdot h = \frac{2k+5}{2} \cdot h \;\Rightarrow\; 36 = (2k+5)h = 3^2 \cdot 2^2$$

D'aquesta última equació sols ens interessa la incògnita h. Com que 2k + 5 > 3 l'equació porta a els següents sistemes:

$$\left.\begin{matrix} 2k+5 = 3 \\ h = 3 \cdot 4 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 2k+5 = 2 \cdot 2 \\ h = 3 \cdot 3 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 2k+5 = 3 \cdot 3 \\ h = 2 \cdot 2 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 2k+5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \\ h = 3 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 2k+5 = 3^2 \cdot 2^2 \\ h = 1 \end{matrix}\right\}$$

L'únic amb solucions admissibles és el tercer (h = 4, k = 2).

Por tant, en el triangle ΔABE, la base mesura 4 i l'alçada 4; per la qual cosa, la seua àrea és 8

Juny 24: Si $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$, trobeu el valor de $\sin^3 x + \cos^3 x$

Solució: Tenim:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x) \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x - \sin x \cdot \cos x) = \frac{1}{2} \cdot (1 - \sin x \cdot \cos x) \; (*)$$

Per altra banda:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \begin{cases} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \\ = \sin^2 x + 2\cos x \cdot \sin x + \cos^2 x = 1 + 2\cos x \cdot \sin x \end{cases}$$

D'on:

$$\sin x \cdot \cos x = -\frac{3}{8}$$

Substituint en (*)

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \frac{1}{2} \cdot (1 - \sin x \cdot \cos x) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{3}{8}\right) = \frac{11}{16}$$

Juny 25: Simplificar: $A = \sqrt{10 - 4\sqrt{6}} - \sqrt{10 + 4\sqrt{6}}$

Solució: El primer radical es menor que el segon radical, per tant, l'expressió es negativa.

Elevant al quadrat l'expressió tenim:

$$A^2 = \left(\sqrt{10 - 4\sqrt{6}} - \sqrt{10 + 4\sqrt{6}}\right)^2 = 10 - 4\sqrt{6} + 10 + 4\sqrt{6} - 2\sqrt{(10 - 4\sqrt{6}) \cdot (10 + 4\sqrt{6})}$$

$$= 20 - 2\sqrt{100 - 16 \cdot 6} = 20 - 2 \cdot 2 = 16$$

Per tant, A = - 4

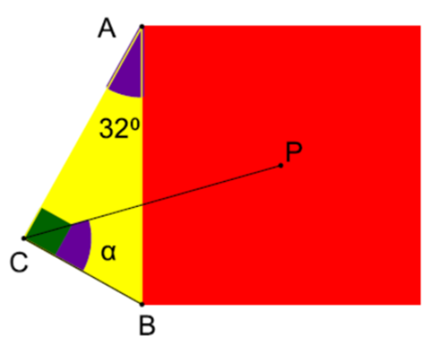
Juny 26: Se sap que les arrels de $x^2 - 85x + c = 0$ són nombres primers. Trobar c.

Solució: Recordem que si x_1 i x_2 són les arrels de $ax^2 + bx + c = 0$, aleshores:

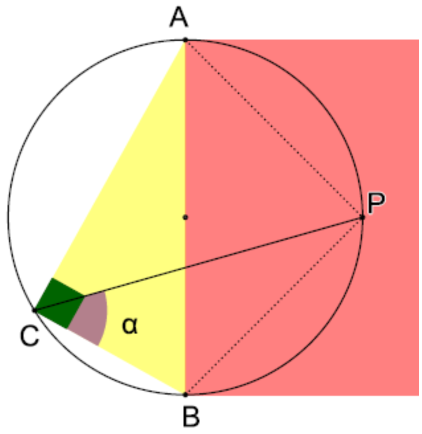
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Per tant, busquem dos nombres primers, la suma dels quals és 85, que és un nombre imparell i per tant suma de un parell i un imparell. Com sols hi ha un nombre primer parell, el 2, un dels nombres primers buscats és el 2. Necessàriament l'altre nombre primer és (85 – 2 =) 83. Per la qual cosa c deu ser (2·83 =) 166.

Juny 27-28: En la figura s'observa un triangle ΔABC, rectangle en C, amb $\angle A = 32°$, que comparteix la hipotenusa AB amb un quadrat de centre P. Trobeu l'angle $\angle PCB = \alpha$



Solució: El quadrilàter ACBP es pot inscriure en una circumferència de diàmetre AB ja que AB es la hipotenusa dels triangles rectangles



ΔABC i ΔABP. Els angles $\angle PCB = \alpha$ i $\angle PAB$ són iguals, ja que tots dos són inscrits i abracen el mateix arc (el que uneix els punts P i B). Per tant:

$$\alpha = \angle PCB = \angle PAB = 45^\circ$$

Juny 29: Quin és el major enter n per al que $\frac{n^2-38}{n+1}$ és enter?

Solució: Com:

$$\frac{n^2-38}{n+1} = n - 1 - \frac{37}{n+1} \quad (*)$$

D'on, per a n enter, la fracció és un enter sii n + 1 és un divisor de 37. Com aquesta fracció porta davant el signe menys la fracció de l'enunciat es major quan més petita és la fracció del segon membre de (*). Es a dir quan n + 1 = 37. Es a dir, quan n = 36

Juny 30: Trobeu els punts comuns de les gràfiques de $y = |x|$ i $y = |x^2 - 4|$

Solució: Tracem les gràfiques de les funcions observem que hi ha que distingir quatre casos:

$x < -2$ $\qquad -2 < x < 0$ $\qquad 0 < x < 2$ $\qquad x > 2$

Per a $x < -2$, tenim:

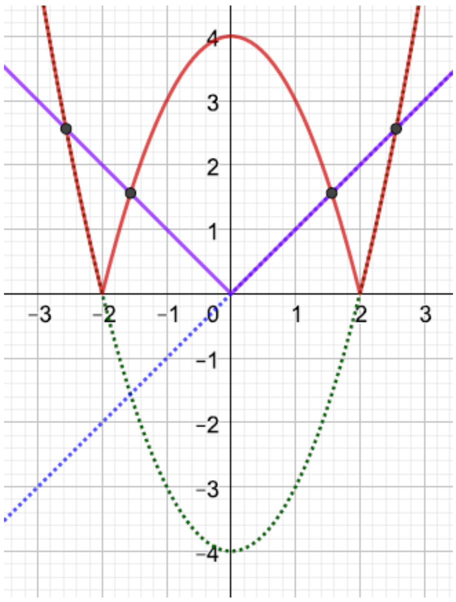
$$\left.\begin{array}{r} y = -x \\ y = x^2 - 4 \end{array}\right\} \Rightarrow -x = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \qquad y_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$$

Per a $-2 < x < 0$, tenim:

$$\left.\begin{array}{r} y = -x \\ y = -x^2 + 4 \end{array}\right\} \Rightarrow -x = -x^2 + 4 \Rightarrow x^2 - x - 4 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{\sqrt{17}-1}{2}, \qquad y_2 = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$$

Per al demés casos, podem procedir com en els anteriors o com que les funcions són simètriques respecte a l'eix Y, calcular els simètrics dels punts de tall trobats. Procedint d'aquesta última manera:

$$x_3 = \frac{\sqrt{17}-1}{2}, \qquad y_3 = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \qquad ; \qquad x_4 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}, \qquad y_4 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$$


4
3
2
1
−3
−2
−1
0
1
2
3
−1
−2
−3
−4