SOLUCIONES OCTUBRE 2018

Colección preparada por Mario Mestre. Institut “El Pont de Suert”. Alta Ribagorça

Octubre 1: Resolver las ecuaciones:

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$$

$$1 - \cos 4x = \sin 4x$$

Solución: Para la primera ecuación tenemos:

$$\frac{\sin(2x + x)}{\text{sinx}} - \frac{\cos(2x + x)}{\text{cosx}} = 2$$

$$\frac{\sin(2x)\text{cosx} + \cos(2x)\text{sinx}}{\text{sinx}} - \frac{\cos(2x)\text{cosx} - \sin(2x)\text{sinx}}{\text{cosx}} = 2$$

$$\frac{(2\text{sinxcox})\text{cosx} + (\cos^2 x - \sin^2 x)\text{sinx}}{\text{sinx}} - \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)\text{cosx} - (2\text{sinxcox})\text{sinx}}{\text{cosx}} = 2$$

$$2\cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin^2 x = 2 \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Como la última igualdad se cumple para cualquier ángulo, la ecuación primigenia se cumple para cualquier ángulo.

Para la segunda ecuación, tenemos de las relaciones del ángulo mitad:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \quad \Rightarrow \quad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Y haciendo $\alpha = 4x$ junto con la ecuación propuesta lleva a:

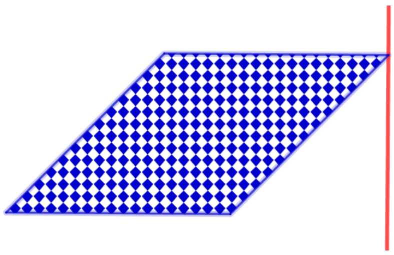
$$2\sin^2(2x) = \sin 4x \quad \Rightarrow \quad 2\sin^2(2x) = 2\sin(2x)\cos(2x)$$

$$2\sin(2x)[\sin(2x) - \cos(2x)] = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sin(2x) = 0 \\ \sin(2x) = \cos(2x) \end{cases}$$

La primera igualdad lleva a $2x = k\pi \Rightarrow x = k\pi/2$ con $k \in Z$

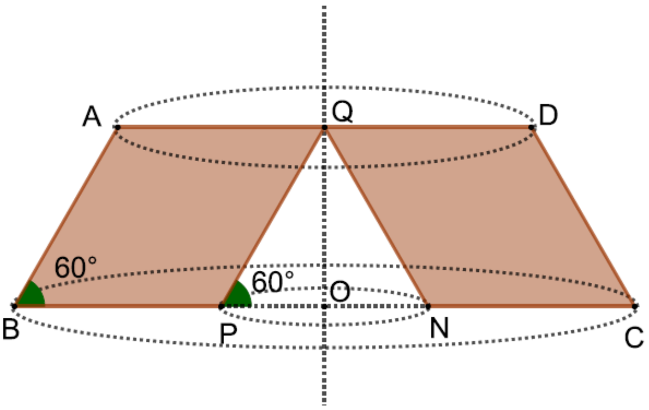
La segunda igualdad lleva a $\text{tag}(2x) = 1 \Rightarrow 2x = \pi/4 + k\pi \Rightarrow x = \pi/8 + k\pi/2$ con $k \in Z$

Octubre 2-3:



Un rombo de lado 19 y ángulo agudo 60° gira alrededor de un vértice del ángulo agudo y perpendicular al lado del rombo. Calcular el área del cuerpo de revolución.

Solución:



El sólido es un tronco de cono ABCD menos un cono PNQ, cumpliéndose: g = AB = 19, r = AQ = 19; R = OB = 19(1+cos 60) pues en ΔOPQ

OP = 19·cos 60 $\Rightarrow$ R = OB = OP + PB = 19·cos 60 + 19 = 19(1+cos 60)

El área del sólido será la de la superficie lateral del cono, más la superficie lateral del tronco de cono, más la de las bases, menos la base del cono

$$A_{\text{sólido}} = A_{\text{Lcono}} + A_{\text{Ltronco}} + A_{\text{base grande}} + A_{\text{base pequeña}} - A_{\text{base cono}}$$

$A_{\text{Lcono}} = \pi rg = \pi \cdot 19^2 \cdot \cos 60$

$A_{\text{Ltronco}} = \pi g(R + r) = \pi \cdot 19 \cdot [19 \cdot (1 + \cos 60) + 19] = \pi \cdot 19^2 \cdot (2 + \cos 60)$

$A_{\text{base grande}} = \pi \cdot OB^2 = \pi \cdot 19^2 \cdot (1 + \cos 60)^2$

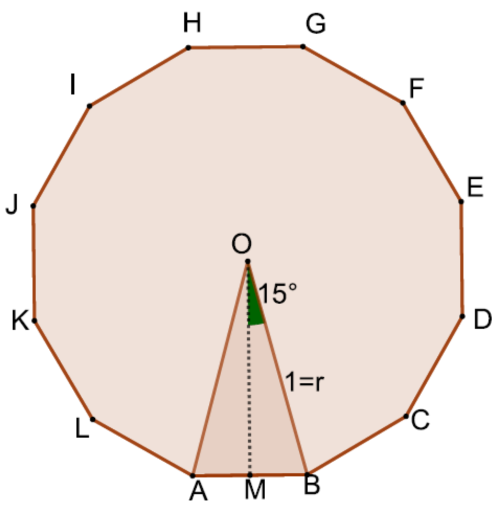
$A_{\text{base pequeña}} = \pi \cdot AQ^2 = \pi \cdot 19^2$

$A_{\text{base cono}} = \pi \cdot OP^2 = \pi \cdot 19^2 \cdot \cos^2 60$

$A_{\text{sólido}} = \pi \cdot 19^2 \cdot [\cos 60 + 2 + \cos 60 + 1 + 2 \cos 60 + \cos^2 60 + 1 - \cos^2 60] = \pi \cdot 19^2 \cdot [4 \cdot \cos 60 + 4] = 4 \cdot \pi \cdot 19^2 \cdot (1 + \cos 60) = 2166 \cdot \pi$

<u>Octubre 4:</u> Se escoge al azar un punto del interior de un círculo de radio 1. ¿Cuál es la probabilidad de que esté fuera del dodecágono inscrito en el círculo?

<u>Solución:</u>



Tendremos:

OM = apotema =cos 15

AB = lado dodecágono = 2·sin 15

$$A_{\text{dodecágono}} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{24 \cdot \sin 15 . \cos 15}{2} = 12 \cdot \sin 15 \cdot \cos 15 = 6 \cdot \sin 30 = 3$$

$$A_{\text{exterior dodecágono}} = A_{\text{círculo}} - A_{\text{dodecágono}} = \pi \cdot 1^2 - 3 = \pi - 3$$

Y, por tanto:

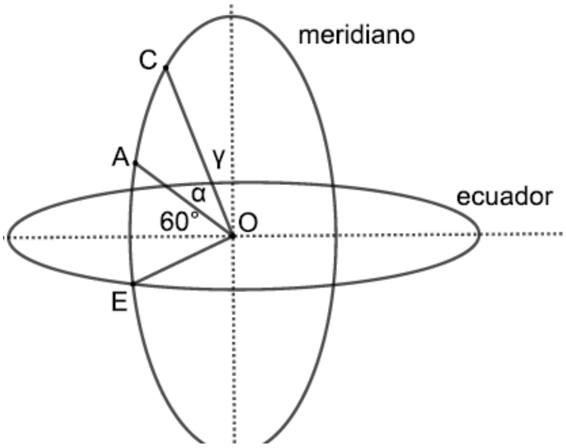
$$\text{probabilidad} = \frac{\pi - 3}{\pi}$$

Octubre 5-6: Dos ciudades A y B están situadas en el mismo paralelo de la esfera terrestre, mientras que la ciudad C se halla en el mismo meridiano que A. La latitud de A es $\varphi = 60°$ norte.

a) Si la ciudad C está a 300 km al norte de A, calcula su latitud considerando que el radio de la Tierra es, aproximadamente, 6.371 km.

b) Si las ciudades A y B tienen de longitud $\lambda_A = 60°$ oeste y $\lambda_B = 40°$ este, respectivamente, ¿qué distancia les separa?

Solución: Para a) tenemos:



R = OA = OC = 6371 km

$\angle EOA = 60°$

$\angle EOC = \alpha$ =latitud de C = $60° + \gamma$

$\angle AOC = \gamma$

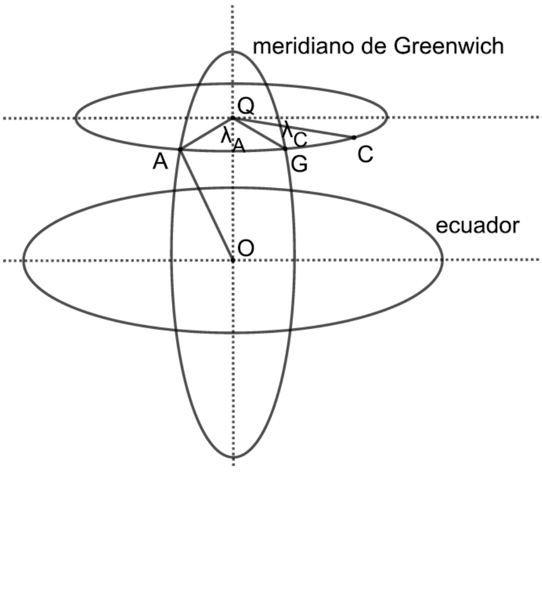
arc AC = $\widehat{AC}$= 300 km

$$\widehat{AC_{km}} = \gamma_{rad} \cdot \frac{R_{km}}{1_{rad}} \Rightarrow 300 = \left(\alpha - 60\frac{\pi}{180}\right)6371 \Rightarrow \alpha = \frac{300}{6371} + \frac{\pi}{3} \approx 1{,}0942\ldots \text{rad}$$

Y, por último:

$$1{,}094286\ldots \cdot \frac{180}{\pi} \approx 62{,}69..° \approx 62°\ 41'\ 52{,}67''\text{norte}$$

Para b)



$\angle AQG = \lambda_A = 60°$ oeste

$\angle CQG = \lambda_C = 40°$ este. $\lambda = \lambda_A + \lambda_C = 100$

r = QA = QG = QC

distancia entre A y C =$\widehat{AC} = 100° \frac{\pi}{180°} \cdot r$

ΔAQO (rectángulo en Q) $OA^2 = AQ^2 + QO^2$

$\angle OAQ = 90° - 60° = 30°$

$$sin30 = \frac{AQ}{OA} = \frac{r}{R} \Rightarrow r = 6371 \cdot sin30 = 3185{,}5\ km$$

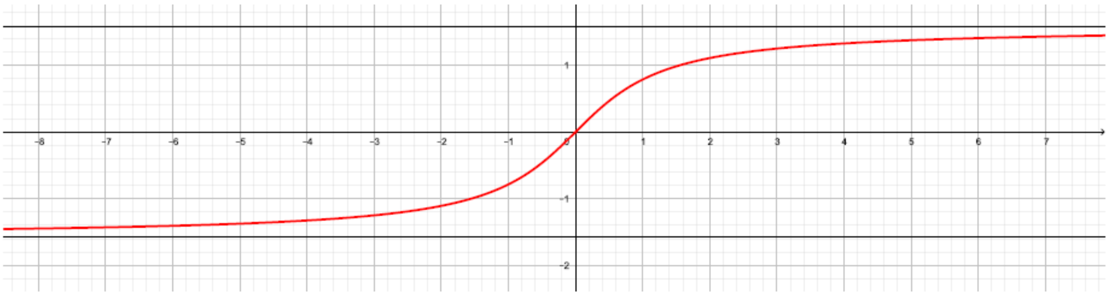
Y, por último:

distancia entre A y C = $\widehat{AC} = 100°\frac{\pi}{180°} \cdot r = 100° \cdot \frac{\pi}{180°} \cdot 3185{,}5 \approx 5559{,}746 \text{ km}$

Octubre 7: Estudiando sus propiedades, representar la función:

$$y = \text{arctg } x^2$$

Solución: Recordemos que f(x) = arctag x $\Leftrightarrow$ f(tag x) =x, x$\in$]-π/2, π/2[



Dominio = R

Recorrido = [0, π/2[

Cortes con eje X: y = 0 $\Rightarrow$ x = 0

Cortes con el eje Y: x = 0 $\Rightarrow$ f(0) = 0. Un único corte: (0, 0)

Simétrica respecto al eje Y pues f(x) = f(- x)

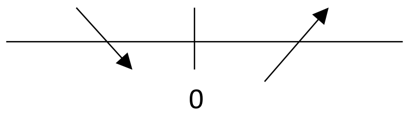
Asíntotas:

Como $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ hay una asíntota horizontal $y = \frac{\pi}{2}$

No hay asíntotas verticales ni oblicuas

Crecimiento, decrecimiento:

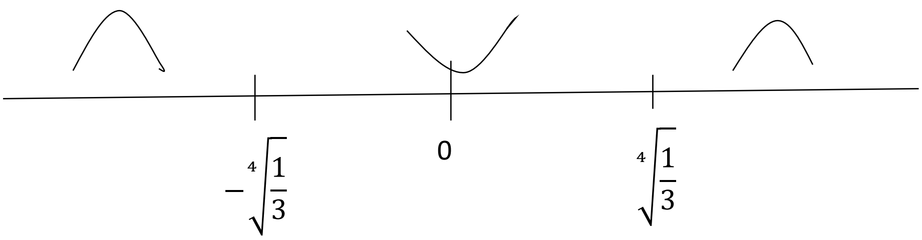
$$y' = \frac{2x}{1 + x^4}$$

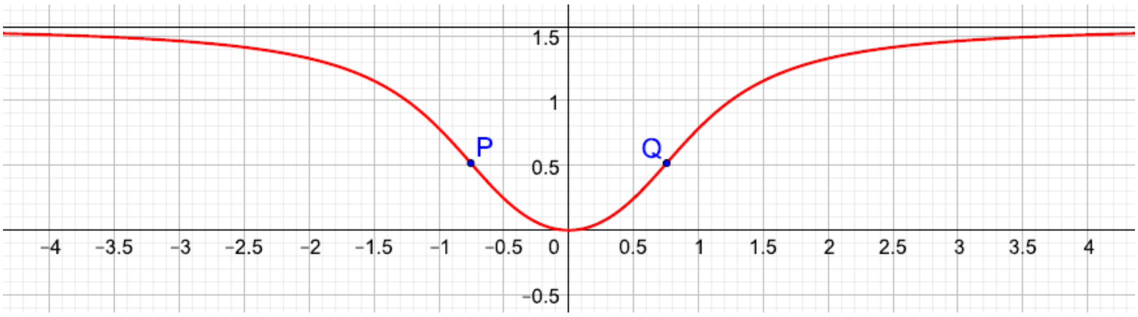


Mínimo relativo en (0, 0)

Concavidad, convexidad:

$$y'' = \frac{2(1 + x^4) - 4x^3(2x)}{(1 + x^4)^2} = \frac{2 - 6x^4}{(1 + x^4)^2} \quad \Rightarrow \quad y'' = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$$





Octubre 8-9: En un bosque en el que hay búhos como depredadores y ratones como presas, las poblaciones varían de acuerdo con los modelos:

$$B(t) = 180 + 30 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}\right), R(t) = 800 + 200 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

respectivamente, donde t viene medido en años a partir del 1 de enero de 2019. ¿Cuáles son las poblaciones de búhos y ratones el 1 de enero de 2020? ¿Cuál es la población máxima de búhos y ratones? ¿Coinciden alguna vez estos valores máximos? Representa ambas funciones con GeoGebra

Solución:

$$R(1) = 800 + 200 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}1\right) = 800 + 200 = 1000 \text{ ratones}$$

$$B(1) = 180 + 30 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}1 - \frac{\pi}{2}\right) = 180 + 30 \cdot \sin(0) = 180 \text{ buhos}$$

El máximo para ratones sale cuando:

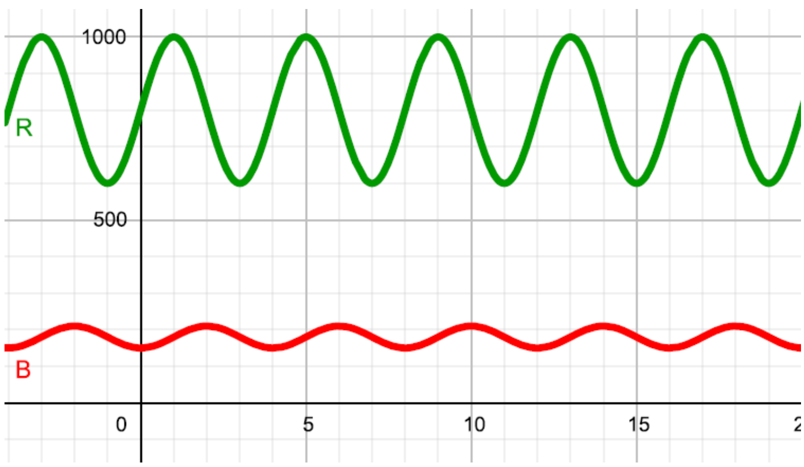
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2}t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ con } k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad \Rightarrow \quad t = 1 + 4k \in \{1, 5, 9, \dots\}$$

El máximo para búhos sale cuando:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ con } k \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad \Rightarrow$$

$$t = 2 + 4k \in \{2, 6, 10, \dots\}$$

Se trata de PA de diferencia 4 y diferente valor inicial, por lo que los máximos no coincidirán en el tiempo



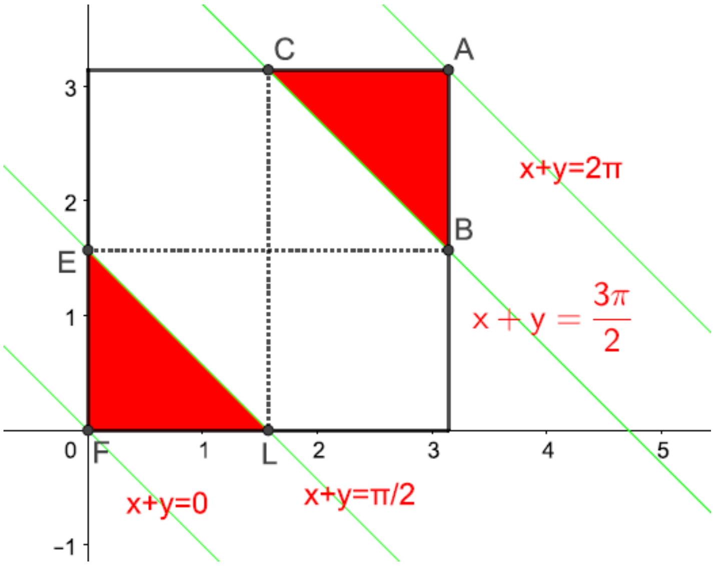
<u>Octubre 10:</u> Representar la zona del plano que verifica:

$$\cos(x + y) \geq 0$$
$$0 \leq x,\ y \leq \pi$$

<u>Solución:</u> Las dos últimas inecuaciones se cumplen en el cuadrado (y en su interior) de vértices (0, 0); (π, 0); (0, π) y (π, π). Como la función coseno es no negativa en el primer y cuarto cuadrante del argumento, tendremos que la primera inecuación es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 0 \leq x + y \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{3\pi}{2} \leq x + y \leq 2\pi \end{array}\right\}$$

Que es fácilmente resoluble recurriendo a las rectas: x + y = 0, x + y = π/2, x + y = 3π/2 y x + y = 2π. En definitiva, la zona donde se verifica el sistema original esta formado por los triángulos ΔABC y ΔEFL (y su interior)



<u>Octubre 11-12:</u> Partiendo de la gráfica de la función y = sin x, obtener un periodo de las gráficas de las funciones:

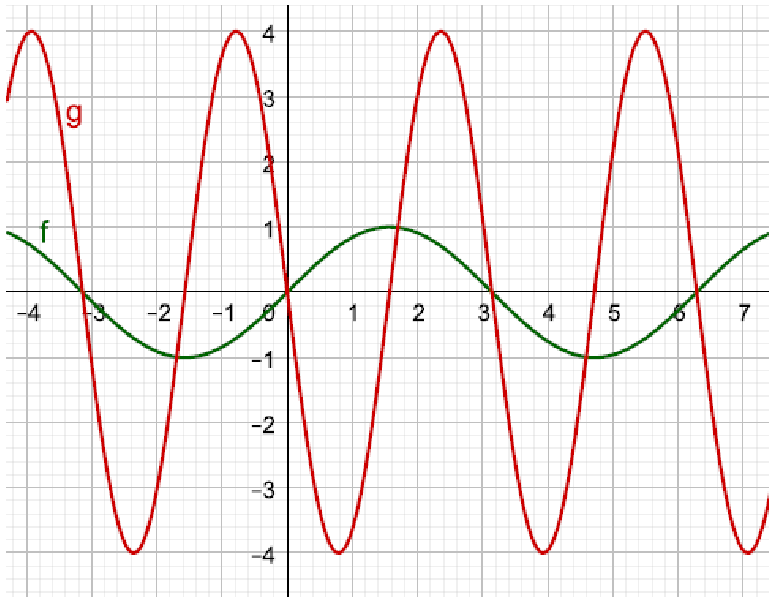
$$\mathbf{g(x) = 4 \cdot f(-2x)}$$
$$\mathbf{h(x) = -\pi \cdot f(\pi x)}$$
$$\mathbf{i(x) = 2 \cdot f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}$$
$$\mathbf{j(x) = \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{x}{2}\right)}$$

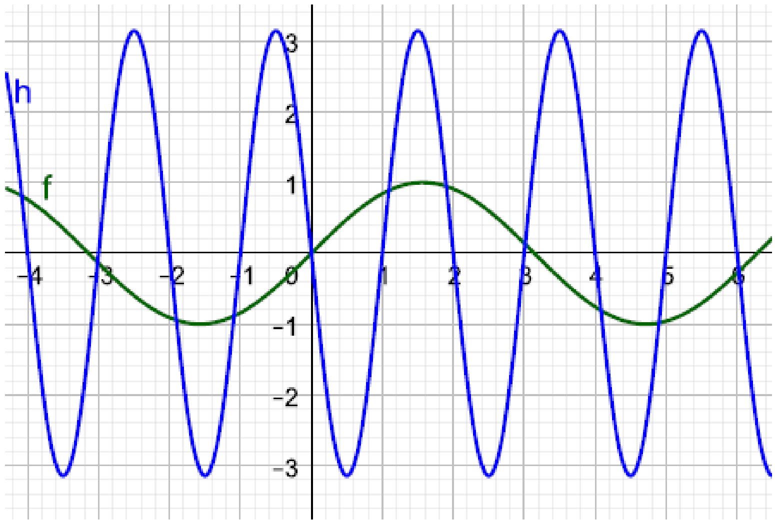
<u>Solución:</u> Tendremos, por ejemplo, para g(x) = 4·f(-2x)

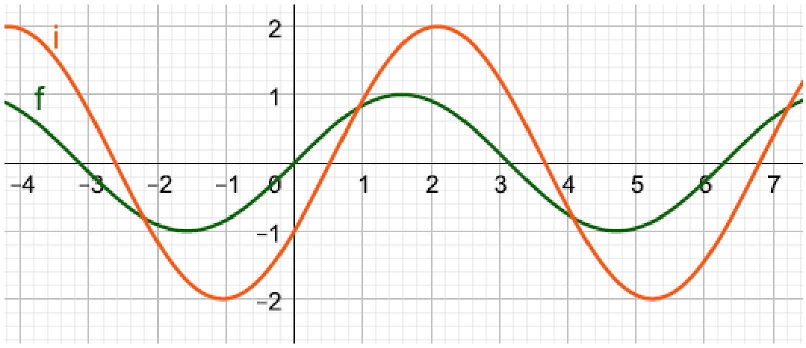
Periodo: La función sin x tiene periodo [0, 2π]

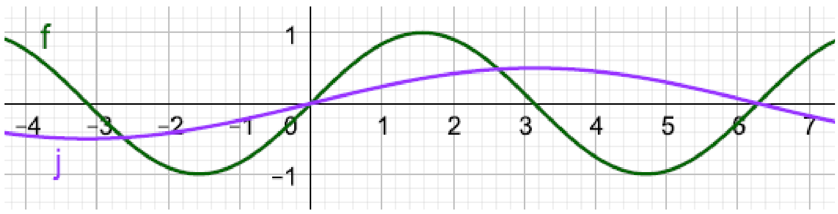
g(x) = 4·f(-2x) $\Rightarrow 0 \leq -2x \leq 2\pi \Rightarrow 0 \geq x \geq -\pi \Rightarrow 0 \leq x \leq \pi$

Como f(- 2x)$\in$[- 1, 1] $\Rightarrow$ $-4 \leq 4 \cdot f(-2x) \leq -4$ $\Rightarrow$ g(x) $\in$ [- 4, 4]

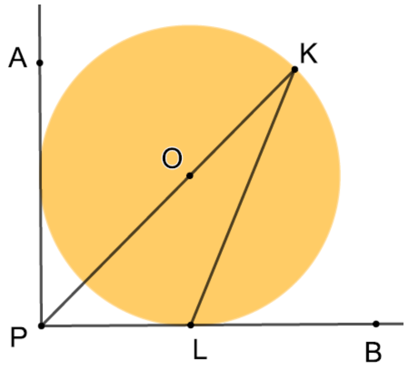








<u>Octubre 13-20:</u>



En la figura, AP y BP son dos segmentos perpendiculares tangentes a la circunferencia de radio 1. PK pasa por el centro de la circunferencia O y L es el punto de tangencia entre PB y la circunferencia. Calcular el perímetro del triángulo ΔPLK

Solución: En la figura tendremos:

PK = PO + OK; PO = $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$; PK = $\sqrt{2}+1$; $\angle KPL = 45°$

Aplicando el teorema de los cosenos al triángulo ΔPLK

$$LK^2 = PK^2 + PL^2 - 2\cdot PK\cdot PL \cdot \cos 45° = \left(\sqrt{2}+1\right)^2 + 1^2 - 2\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2+\sqrt{2} \;\Rightarrow\; LK = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

De donde:

$$\text{Perímetro} = PL + PK + LK = 1 + \left(1+\sqrt{2}\right) + \sqrt{2+\sqrt{2}} = 2+\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Octubre 14: Calcular el valor de la expresión:

$$\mathbf{\sin(2\cdot arctg2) - tg\left(\frac{\pi}{4} - arctg\ 2\right)}$$

en el primer cuadrante

Solución: De las fórmulas del ángulo doble, tenemos:

$$\sin(2\cdot \mathrm{arctag}2) = 2\sin(\mathrm{arctag}2)\cos(\mathrm{arctag}2) = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

calculadas las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo 1-2-$\sqrt{5}$.

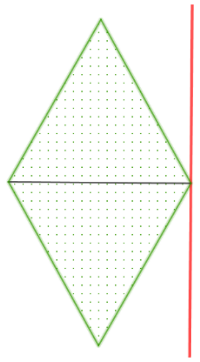
De la fórmula de la tangente de la diferencia:

$$\mathrm{tag}\left(\frac{\pi}{4} - \mathrm{arctag}2\right) = \frac{\mathrm{tag}\frac{\pi}{4} - \mathrm{tag}(\mathrm{arctag}2)}{1+\mathrm{tag}\frac{\pi}{4}\cdot\mathrm{tag}(\mathrm{arctag}2)} = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

calculadas las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo 2-1-$\sqrt{5}$. Por tanto:

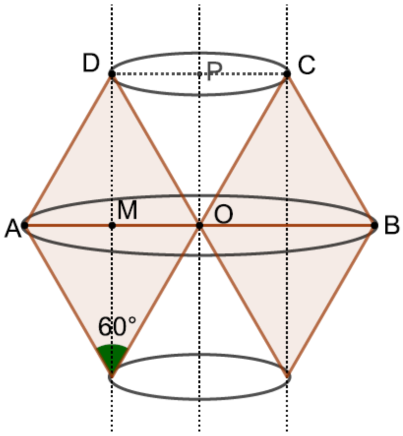
$$\sin(2\cdot \mathrm{arctg}2) - \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \mathrm{arctg}\ 2\right) = \frac{4}{5} - \frac{1}{3} = \frac{7}{15}$$

Octubre 15-22:



Un rombo de lado 19 y ángulo agudo 60° gira alrededor de un eje que pasa por el vértice del ángulo obtuso y es perpendicular al eje pequeño. Calcular el área del solido de revolución.

Solución:



El sólido es un doble tronco de cono ABCD menos dos conos ODC.

El área será la superficie lateral de los dos troncos de cono más la superficie lateral de los conos.

R = AO

r = DP

g = 19

En el triángulo ΔADM

$$\sin 30 = \frac{AM}{AD} = \frac{AO/2}{AD} = \frac{R}{2 \cdot AD} \quad \Rightarrow \quad R = 2 \cdot 19 \cdot \frac{1}{2} = 19$$

r = DP = MO = R/2 = 19/2

$$S_{tronco} = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} g = \pi g(R + r) = \pi \cdot 19 \cdot \left(19 + \frac{19}{2}\right) = \frac{1083\pi}{2}$$

$$S_{lateral\ cono} = \pi r g = \pi \cdot 19 \cdot \frac{19}{2} = \frac{361\pi}{2}$$

$$S_{sólido} = 2(S_{tronco} + S_{lateral\ cono}) = 2\left(\frac{1083\pi}{2} + \frac{361\pi}{2}\right) = 1444\pi$$

Octubre 16: Si sec x + tg x = $\frac{1}{2}$, calcular

$$(\sec x - \operatorname{tg} x)^2$$

Solución:

Probaremos en primer lugar, que:

$$\sec x + \operatorname{tag} x = \frac{1}{\sec x - \operatorname{tag} x}$$

Tenemos:

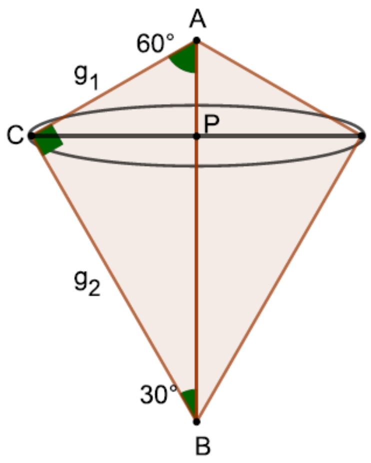
$$\frac{1}{\sec x - \tan x} = \frac{1}{\sec x - \tan x} \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} = \frac{\sec x + \tan x}{\sec^2 x - \tan^2 x} = \frac{\sec x + \tan x}{(1 + \tan^2 x) - \tan^2 x}$$
$$= \sec x + \tan x$$

Por tanto:

$$\text{Si } \sec x + \tan x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sec x - \tan x = \frac{1}{\sec x + \tan x} = 2 \Rightarrow (\sec x - \tan x)^2 = 4$$

<u>Octubre 17:</u> Un triángulo 30°-60° - 90° gira alrededor de su hipotenusa de 18 cm. Hallar el área del cuerpo de revolución generado

<u>Solución:</u>



De la ilustración adjunta, tenemos:

$AB = 18$, $AC = g_1$, $BC = g_2$, $r = CP$.

$A_T = \pi r g_1 + \pi r g_2 = \pi r(g_1 + g_2)$

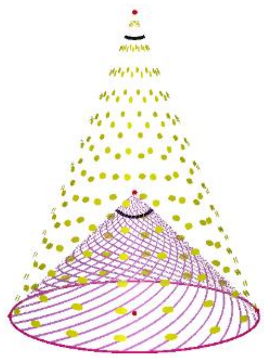
$$\left.\begin{array}{l} \Delta ACP \Rightarrow \tan 60 = \sqrt{3} = \dfrac{CP}{AP} \Rightarrow AP = \dfrac{CP}{\sqrt{3}} \\ \Delta CPB \Rightarrow \tan 30 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{CP}{BP} \Rightarrow BP = CP\sqrt{3} \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow AP + BP = 18$$
$$\Rightarrow CP\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right) = 18 \Rightarrow CP = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta ACP \Rightarrow \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CP}{g_1} \Rightarrow g_1 = \frac{2 \cdot CP}{\sqrt{3}} = 9$$

$$\Delta CPB \Rightarrow \sin 30 = \frac{1}{2} = \frac{CP}{g_2} \Rightarrow g_2 = 2 \cdot CP = 9\sqrt{3}$$

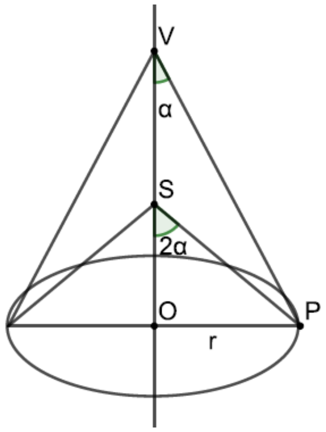
$$A_T = \pi r(g_1 + g_2) = \pi\frac{9\sqrt{3}}{2}\left(9 + 9\sqrt{3}\right) = \pi\frac{81\sqrt{3}}{2}\left(1 + \sqrt{3}\right)$$

<u>Octubre 18-25:</u>



Construimos dos conos con la base común y uno dentro del otro. La distancia entre los dos vértices es 18. El ángulo de la sección axial del cono grande es la mitad de la del pequeño. Calcular estos ángulos si el volumen del sólido limitado por las dos superficies cónicas es 972π cm^3.

Solución:



En la ilustración:

$\beta = 4\alpha$; $\beta' = 2\alpha$; VS = 18; SO = x; VO = h_1; SO = h_2; r = OP

Tendremos:

$$V_{cuerpo} = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 - \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi r^2(h_1 - h_2)$$
$$= 18\frac{1}{3}\pi r^2 = 972\pi \Rightarrow r = 9\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{tag}\alpha = \dfrac{r}{h_1} = \dfrac{9\sqrt{2}}{x+18} \\ (1)\mathrm{tag}2\alpha = \dfrac{r}{h_2} = \dfrac{9\sqrt{2}}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{tag}2\alpha = \frac{2\mathrm{tag}\alpha}{1 - \mathrm{tag}^2\alpha} \Rightarrow \frac{9\sqrt{2}}{x} = \frac{\frac{18\sqrt{2}}{x+18}}{1 - \frac{162}{(x+18)^2}}$$

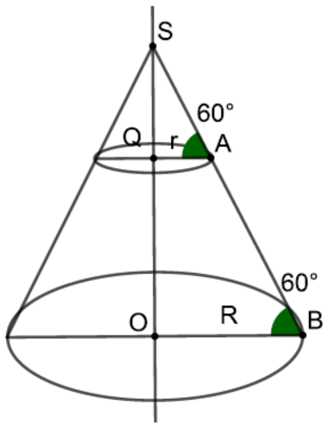
$$\Rightarrow 9\sqrt{2}[(x+18)^2 - 162] = \frac{18\sqrt{2}x}{x+18}(x+18)^2 \Rightarrow (x+18)^2 - 162$$
$$= 2x(x+18) \Rightarrow x^2 = 162 \Rightarrow x = r = 9\sqrt{2}$$

Por último, en (1):

$$\mathrm{tag}2\alpha = \frac{9\sqrt{2}}{9\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow 2\alpha = 45° \Rightarrow \beta = 90;\ \beta' = 45°$$

Octubre 19: Los radios de las bases de un tronco de cono están en razón 1:3. La generatriz del tronco mide 20 y está inclinada 60° respecto de la base. Calcular el volumen del tronco de cono.

Solución:



En la figura:

AB = 20; SO = H; SQ = h; h' = SO – SQ; R = 3r

$$V_{tronco} = \frac{1}{3}h'\left[B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 B_2}\right]$$
$$= \frac{1}{3}\pi h'(r^2 + R^2 + rR)$$

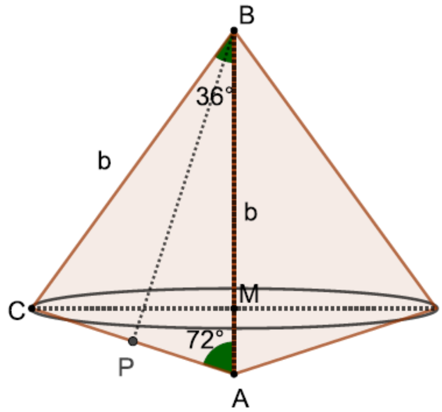
$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{tag}60 = \sqrt{3} = \dfrac{SO}{R} = \dfrac{SQ}{r} = \dfrac{SO - SQ}{R - r} = \dfrac{h'}{R - r} \Rightarrow h' = (R - r)\sqrt{3} \\ \sin 60 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{SO}{SB} = \dfrac{SQ}{SA} = \dfrac{SO - SQ}{SB - SA} = \dfrac{h'}{20} \Rightarrow h' = 10\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 10\sqrt{3}$$
$$= 2r\sqrt{3} \Rightarrow r = 5$$

Y, por ultimo:

$$V_{tronco} = \frac{1}{3}\pi h'(r^2 + R^2 + rR) = \frac{10\sqrt{3}\pi}{3}(5^2 + 15^2 + 5 \cdot 15) = \frac{3250\sqrt{3}\pi}{3}$$

Octubre 21: Un triángulo isósceles ΔABC, con AB = BC = b y $\angle C = \angle A = 72°$ gira en torno a uno de los lados iguales. Calcular el volumen del cuerpo de revolución.

Solución:



El sólido de revolución son dos conos de radio de la base r = CM y alturas h_1 =BM y h_2 = AM con $h_1 + h_2 = b$. P es el punto medio de AC

Tendremos:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2(h_1 + h_2) = \frac{1}{3}\pi r^2 b$$

En ΔABC tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \sin 72 = \frac{BP}{AB} = \frac{BP}{b} \Rightarrow BP = b \cdot \sin 72 \\ \cos 72 = \frac{AP}{AB} = \frac{AP}{b} \Rightarrow AP = b \cdot \cos 72 \Rightarrow AC = 2b \cdot \cos 72 \end{aligned}\right\}$$

$$A_{\Delta ABC} = \begin{cases} = \frac{1}{2}AC \cdot BP = \frac{1}{2}2b\cos 72 \cdot b\sin 72 \\ \quad = \frac{1}{2}AB \cdot CM = \frac{1}{2}b \cdot r \end{cases}$$

De donde:

$$\frac{1}{2}b \cdot r = \frac{1}{2}2b\cos 72 \cdot b\sin 72 \quad \Rightarrow \quad r = b \cdot 2\sin 72 \cdot \cos 72 = b \cdot \sin 144$$

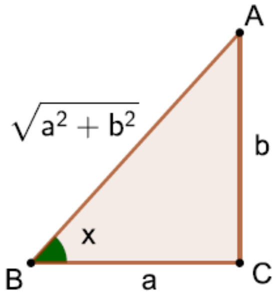
Y, por último:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2(h_1 + h_2) = \frac{1}{3}\pi r^2 b = \frac{1}{3}\pi b^3 \cdot \sin^2 144$$

Octubre 23-24: Demostrar:

$$\text{Si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ y } \operatorname{tg} x = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad a \cdot \cos 2x + b \cdot \sin 2x = a$$

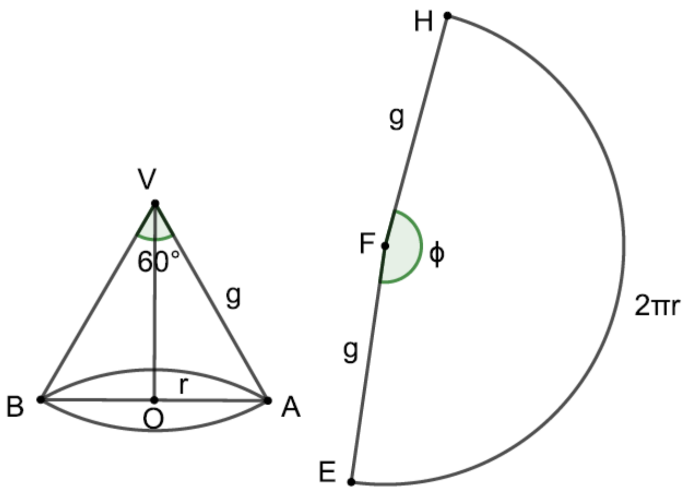
Solución:



$$\begin{aligned} a\cdot\cos 2x + b\cdot\sin 2x &= a(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2b\sin x\cos x \\ &= a\left(\frac{a^2}{a^2+b^2} - \frac{b^2}{a^2+b^2}\right) \\ &+ 2b\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ &= \frac{a^3-ab^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab^2}{a^2+b^2} = \frac{a^3+ab^2}{a^2+b^2} = a \end{aligned}$$

<u>**Octubre 26:**</u> El ángulo en el vértice de la sección axial de un cono es de 60°. Calcular el ángulo central del desarrollo de la superficie lateral

<u>**Solución:**</u>



Hay que calcular el ángulo ϕ. Tenemos que el área lateral del cono es πrg. Por otra parte podemos calcular el área lateral recurriendo a una regla de tres (entre las magnitudes área y ángulo)

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{área} & -- & \text{ángulo} \\ \pi g^2 & -- & 360° \\ A_L & -- & \phi \end{array}\right\} \Rightarrow A_L = \frac{\pi g^2\phi}{360}$$

Con ello:

$$\pi rg = \frac{\pi g^2\phi}{360} \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{g} = \frac{\phi}{360}$$

Pero en el triángulo ΔAVO

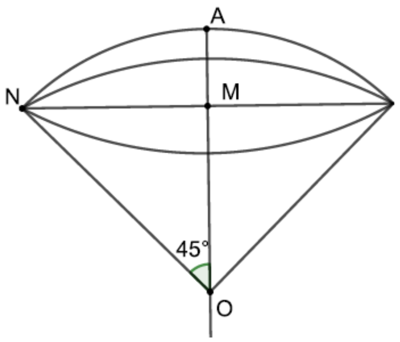
$$\sin 30 = \frac{1}{2} = \frac{OA}{VA} = \frac{r}{g}$$

Con lo que:

$$\frac{1}{2} = \frac{r}{g} = \frac{\phi}{360} \quad \Rightarrow \quad \phi = 180°$$

Octubre 27-28: Un sector circular de 12 cm de radio y ángulo central de 45° gira en torno de uno de sus radios exteriores. Calcular el área y volumen del cuerpo de revolución engendrado

Solución:



El sólido está formado por un cono de vértice el centro de la esfera y un casquete esférico del mismo radio (MN) que la base del cono.

NM = r; ON = R = OA = 12; AM = h, OM = H

En ΔNMO, temenos:

$$\text{tag}45 = 1 = \frac{MN}{OM} \quad \Rightarrow \quad MN = OM = H = r$$

$$\sin 45 = \frac{MN}{12} \quad \Rightarrow \quad r = MN = 12 \cdot \sin 45 = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

$$h = AM = AO - OM = 12 - 6\sqrt{2} = 6\left(2 - \sqrt{2}\right)$$

Con ello:

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\pi 6^2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{2} = \pi \cdot 12^2 \cdot \sqrt{2}$$

$$V_{casquete} = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h) = \frac{\pi}{3} \cdot 6^2 \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(36 - 12 + 6\sqrt{2}\right) = 12^2 \cdot \pi \cdot \left(8 - 5\sqrt{2}\right)$$

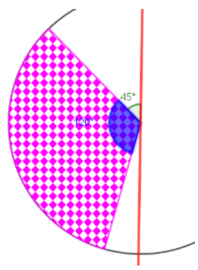
$$V_T = 24^2 \cdot \pi \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)$$

$$A_{lateral\ cono} = \pi r g = \pi \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 12 = 72\pi\sqrt{2}$$

$$A_{casquete} = 2\pi R h = 2\pi \cdot 12 \cdot 6 \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right) = 144\pi\left(2 - \sqrt{2}\right)$$

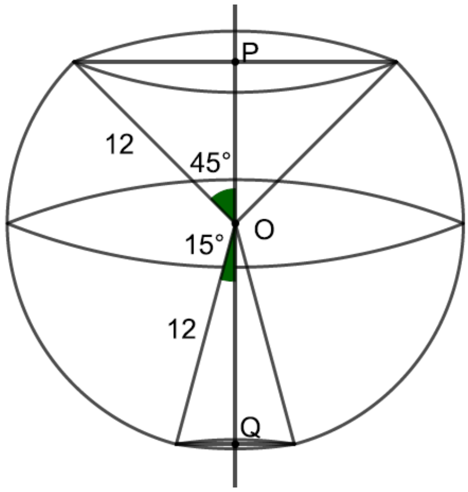
$$A_T = 72\pi\sqrt{2} + 144\pi\left(2 - \sqrt{2}\right) = 72\pi\left(4 - \sqrt{2}\right)$$

Octubre 29-30:



Un sector circular de 12 cm de radio y ángulo en el vértice 120° gira alrededor de un eje que forma 45° con un radio del sector. Hallar el volumen del cuerpo de revolución formado

Solución:



En la figura:

R = 12; h = OP + OQ.

$$\cos 45 = \frac{OP}{12} \Rightarrow OP = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

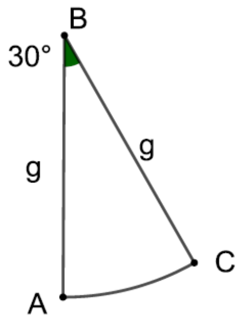
$$\cos 15 = \frac{OQ}{12} \Rightarrow OQ = 12 \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = 3\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$$

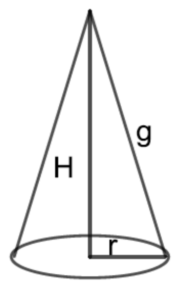
$$h = OP + OQ = 6\sqrt{2} + 3\sqrt{6} + 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2} + 3\sqrt{6}$$

$$V_{\text{sector esférico}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{2}{3}\pi 12^2\left(9\sqrt{2}+3\sqrt{6}\right) = 288\pi\left(3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$$

Octubre 31: Al enrollar un sector circular de centro B y arco AC con ∠B=30° y cuerda del arco AC = 2018, formamos un cono. Hallar su volumen.

Solución:





$$\sin 15 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{1009}{g} \Rightarrow g = \frac{1009}{\sin 15}$$

Utilizando la relación directa entre las magnitudes longitud de la circunferencia de radio g y el ángulo central tendremos:

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{longitud} & -- & \text{angulo central} \\ 2\pi g & -- & 360 \\ \widehat{AC} & -- & 30 \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{AC} = \frac{2\pi g \cdot 30}{360} = \frac{\pi g}{6} \Rightarrow 2\pi r = \frac{\pi g}{6} \Rightarrow r = \frac{g}{12}$$

$$= \frac{1009}{12 \cdot \sin 15} \Rightarrow H = \sqrt{g^2 - r^2} = \sqrt{\frac{1009^2}{\sin^2 15} - \frac{1009^2}{12^2 \cdot \sin^2 15}} = \frac{1009}{\sin 15}\frac{\sqrt{143}}{12}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1009}{12\sin 15}\right)^2 \cdot \frac{1009}{\sin 15}\frac{\sqrt{143}}{12} \approx 429375940{,}4..$$