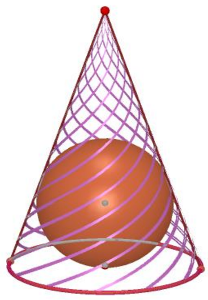
SOLUCIONES NOVIEMBRE 2018

Autor: Ricard Peiró i Estruch. IES “Abastos”. València

Noviembre 1-2:



Un cono tiene inscrita una esfera. Si el volumen de la esfera es la mitad del volumen del cono, calculad la proporción entre el radio del cono y la generatriz del cono.

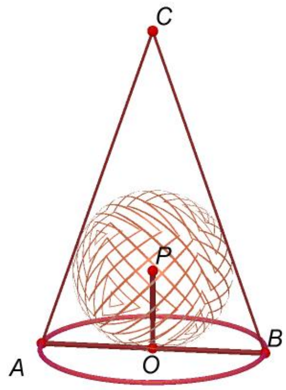
Solución: Sea $\overline{AB} = 2R$ diámetro de la base del cono.

Sea O centro de la base del cono.

Sea $\overline{AC} = \overline{BC} = g$ generatriz del cono.

La esfera es tangente al cono, entonces el radio de la esfera es el radio de la circunferencia inscrita al triángulo isósceles $\overset{\Delta}{ABC}$.

Sea $\overline{PO} = r$ radio de la esfera.



El área del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{2(R+g)2(g-R)2R2R}}{4} = \frac{2(R+g)}{2}r .$$

Entonces, $r = R\sqrt{\frac{g-R}{R+g}}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AOC}$:

$$\overline{OC} = \sqrt{g^2 - R^2} .$$

El volumen del cono es:

$$V_{con} = \frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{g^2 - R^2} .$$

El volumen de la esfera es:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3\frac{g-R}{R+g}\sqrt{\frac{g-R}{R+g}} .$$

El volumen de la esfera es la mitad del volumen del cono, entonces:

$$\frac{V_{con}}{V_{esfera}} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{g^2-R^2}}{\frac{4}{3}\pi R^3\frac{g-R}{R+g}\sqrt{\frac{g-R}{R+g}}} = 2 .$$

Simplificando:

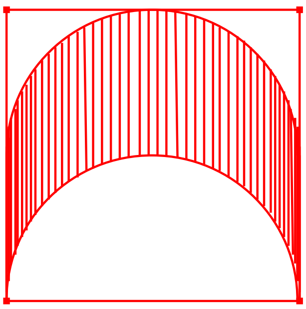
$9R^2 - 6gR + g^2 = 0$. Dividiendo la expresión por g^2:

$9\left(\frac{R}{g}\right)^2 - 6\frac{R}{g} + 1 = 0$. Resolviendo la ecuación:

$$\frac{R}{g} = \frac{1}{3}.$$

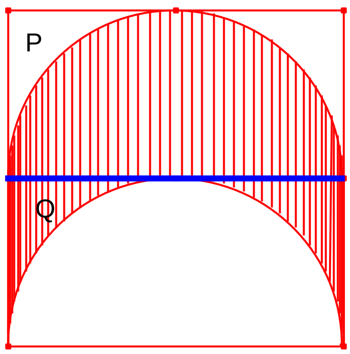
En este caso, $g = 3R$, $\overline{OC} = 2R\sqrt{2}$, $r = \frac{\sqrt{2}}{2}R$.

Noviembre 3-4:



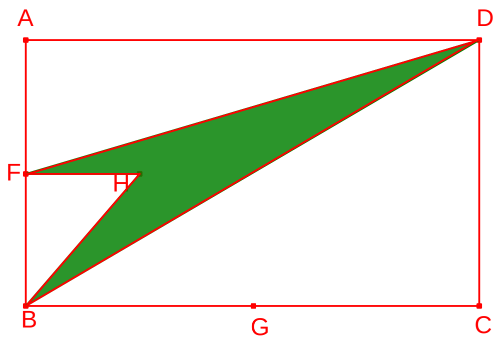
En un cuadrado de lado c se han dibujado dos arcos (semicircunferencias) de diámetro el lado de un cuadrado. Calculad el área de la región generada por los dos arcos.

Solución:



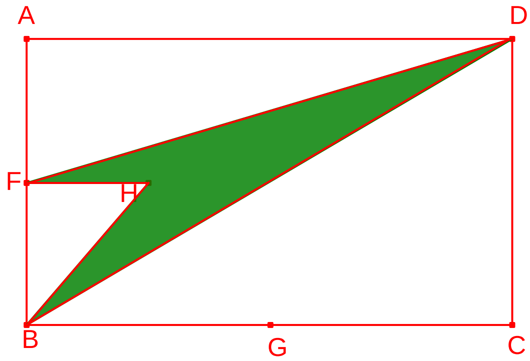
El área sombreada es, obviamente, igual en mitad del área del cuadrado.

Noviembre 5-6:



Sea el rectángulo ABCD de área 32 cm^2. Sean F y G los puntos medios de los lados AB y BC, respectivamente. Sea H el punto medio del segmento AG. Determinar el área de la región FHBD

Solución: Sea S el área del rectángulo ABCD.



$$S_{BCD} = S_{BAD} = S_{ABC} = \frac{1}{2}S.$$

$$S_{FAD} = \frac{1}{2}S_{BAD} = \frac{1}{4}S.$$

$\overline{FH}$ es la paralela mediana del triángulo $\overset{\Delta}{ABG}$.

$$S_{ABG} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{4}S.$$

$$S_{AFH} = \frac{1}{4}S_{ABG} = \frac{1}{16}S.$$

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{AFH}$, $\overset{\Delta}{BFH}$ son iguales ya que tienen los catetos iguales.

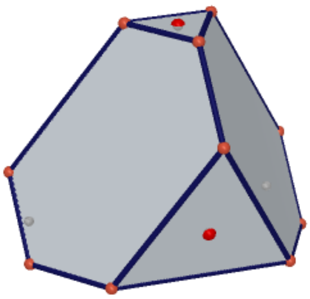
$$S_{BFH} = S_{AFH} = \frac{1}{16}S.$$

$$S_{FHBD} = S - (S_{BCD} + S_{FAD} + S_{BFH}) = S - \left(\frac{1}{2}S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S\right) = \frac{3}{16}S.$$

Entonces,

$$S_{FHBD} = \frac{3}{16}S = \frac{3}{16}32 = 6\ cm^2.$$

Noviembre 7-8:



En cada uno de los vértices de un tetraedro regular de arista 3 se ha cortado una pirámide tal que la sección formada es un triángulo equilátero. Las cuatro pirámides obtenidas tienen dimensiones distintas. Calcular la longitud total de todas las aristas del sólido truncado.

Solución: Las pirámides cortadas son tetraedros regulares de aristas a, b, c, d.

El tetraedro truncado formado tiene 18 aristas:

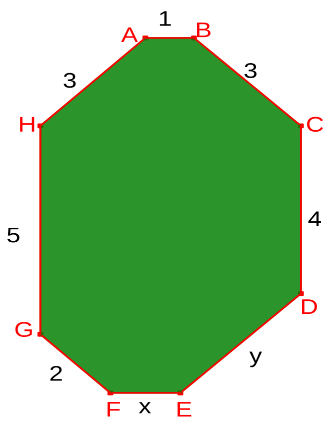
Tres de longitud a, tres de longitud b, tres de longitud c, tres de longitud d, i seis de longitudes, $3-(a+b)$, $3-(a+c)$, $3-(a+d)$, $3-(b+c)$, $3-(b+d)$, $3-(c+d)$, respectivamente.

La suma de las longitudes de las aristas es:

$$S_{st} = 3a + 3b + 3c + 3d + 3 - (a+b) + 3 - (a+c) + 3 - (a+d) + 3 - (b+c) + 3 - (b+d) + 3 - (c+d) = 12$$

Es decir, la suma de las longitudes de todas las aristas es igual a la suma de las aristas del tetraedro inicial.

Noviembre 9-10:



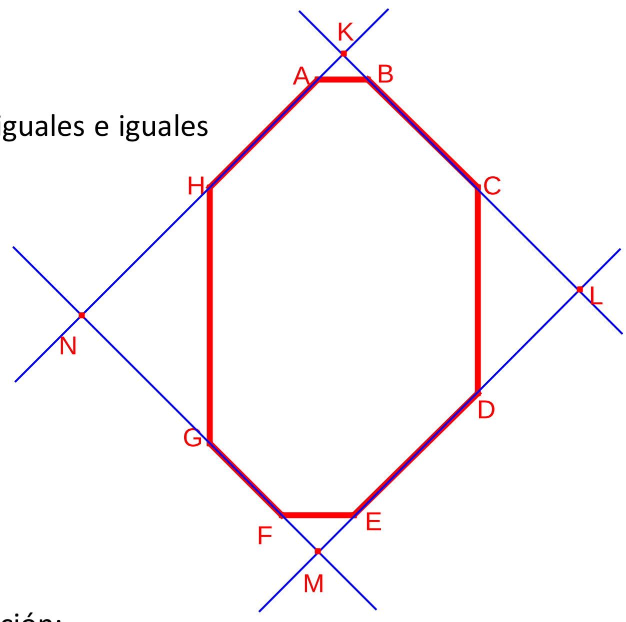
Sea ABCDEFGH un octógono equiangular.

Si AB = 1, BC = AH =3, CD = 4, GH = 5 y FG = 2. Hallar las medidas de los lados EF = x y DE = y

Solución: La suma de los ángulos de un polígono convexo de 8 lados es:

$180^{o}(8-2)=1080^{o}$. Entonces, cada uno de los ángulos del polígono mide:

$$\frac{1080^{o}}{8}=135^{o}.$$



Los ángulos exteriores de este polígono son todos iguales e iguales a 45º.

Las rectas BC, DE, FG, y AH forman el rectángulo KLMN.

$$\overline{AK}=\overline{BK}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \overline{CL}=\overline{DL}=2\sqrt{2},\ \overline{GN}=\overline{HN}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$$

$$\overline{EM}=\overline{FM}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\overline{MN}=\overline{KL}$, entonces:

$\frac{\sqrt{5}}{2}+2+\frac{\sqrt{2}}{2}x=\frac{\sqrt{2}}{2}+3+2\sqrt{2}$. Resolviendo la ecuación:

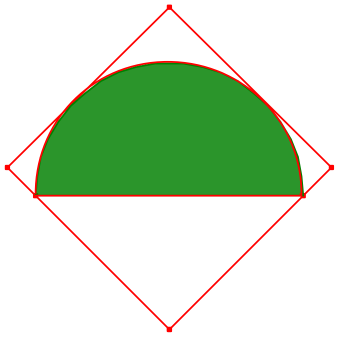
$$x=\sqrt{2}.$$

$\overline{KN}=\overline{LM}$, entonces:

$\frac{\sqrt{5}}{2}+3+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}x+y+2\sqrt{2}$. Resolviendo la ecuación:

$$y=2+\sqrt{2}.$$

Noviembre 11-18:



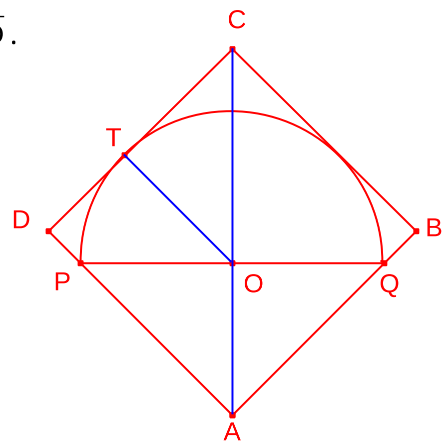
En la figura, un semicírculo de radio 1 está inscrito en un cuadrado. El centro del semicírculo está en una de las diagonales del cuadrado. Determinar el área del cuadrado

Solución: Sea ABCD el cuadrado de lado $\overline{AB} = c$.

Sea el semicírculo de diámetro $\overline{PQ} = 2$ y centro O.

$\overline{PQ}$ es perpendicular a $\overline{AC}$.

Sea T el punto de tangencia de la semicircunferencia y el lado $\overline{CD}$.



$$\overline{OT} = 1,\ \angle CTO = 90^o.\ \angle TCO = 45^o.$$

Entones, $\overline{CT} = \overline{OT} = 1$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OTC}$

$$\overline{OC} = \overline{OT}\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

El triángulo $\overset{\Delta}{AOP}$ es rectángulo i isósceles, entonces:

$$\overline{OA} = \overline{OP} = 1$$

$$\overline{AC} = 1 + \sqrt{2}.$$

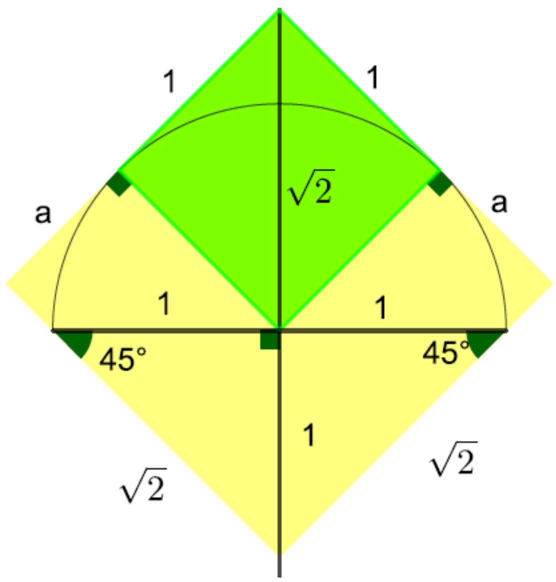
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$c^2 = \overline{AB}^2 = \frac{1}{2}\overline{AC}^2 = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^2 = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}.$$

El área del cuadrado ABCD es:

$$S_{ABCD} = c^2 = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}.$$

Solución Henk Reuling (@HenkReuling)



Diagonal vertical del cuadrado grande = $1+\sqrt{2}$

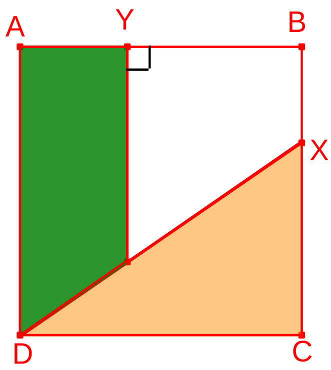
Diagonal horizontal del cuadrado grande = $\sqrt{2}(1+\mathrm{a})$

$$1+\sqrt{2}=\sqrt{2}(1+\mathrm{a})\ \Rightarrow \mathrm{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Área del cuadrado grande

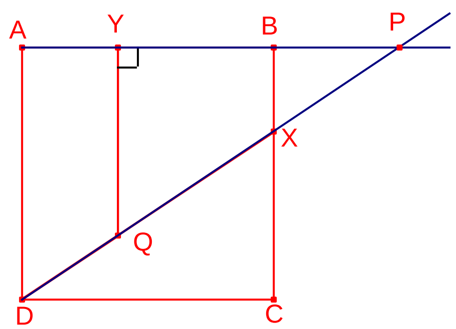
$$(1+\mathrm{a})^2=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$$

Noviembre 12-19:



El cuadrado ABCD de lado 90, está dividido en tres partes de igual área. Hallar la medida de los segmentos CX y AY

Solución: Sea $\overline{CX}=x$ y $\overline{AY}=y$.



El área del triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{DCX}$ es igual a la tercera parte del área del cuadrado ABCD:

$\frac{90x}{2}=\frac{1}{3}90^2$. Resolviendo la ecuación:

$$x=60.$$

$$\overline{BX}=90-60=30$$

La recta DX y la recta AB se cortan en el punto P.

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{DCX}$, $\overset{\Delta}{PBX}$ son semejantes.

Aplicando el teorema de Thales:

$\frac{\overline{PB}}{30}=\frac{90}{60}$. Resolviendo la ecuación:

$$\overline{BP}=45.$$

$$\overline{PY} = 135 - y\,.$$

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{PYQ}$, $\overset{\Delta}{PBX}$ son semejantes. Aplicando el teorema de Thales:

$$\frac{\overline{QY}}{1355 - y} = \frac{30}{45} \qquad (1)$$

El área del trapecio ADQY es igual a la tercera parte del área del cuadrado ABCD:

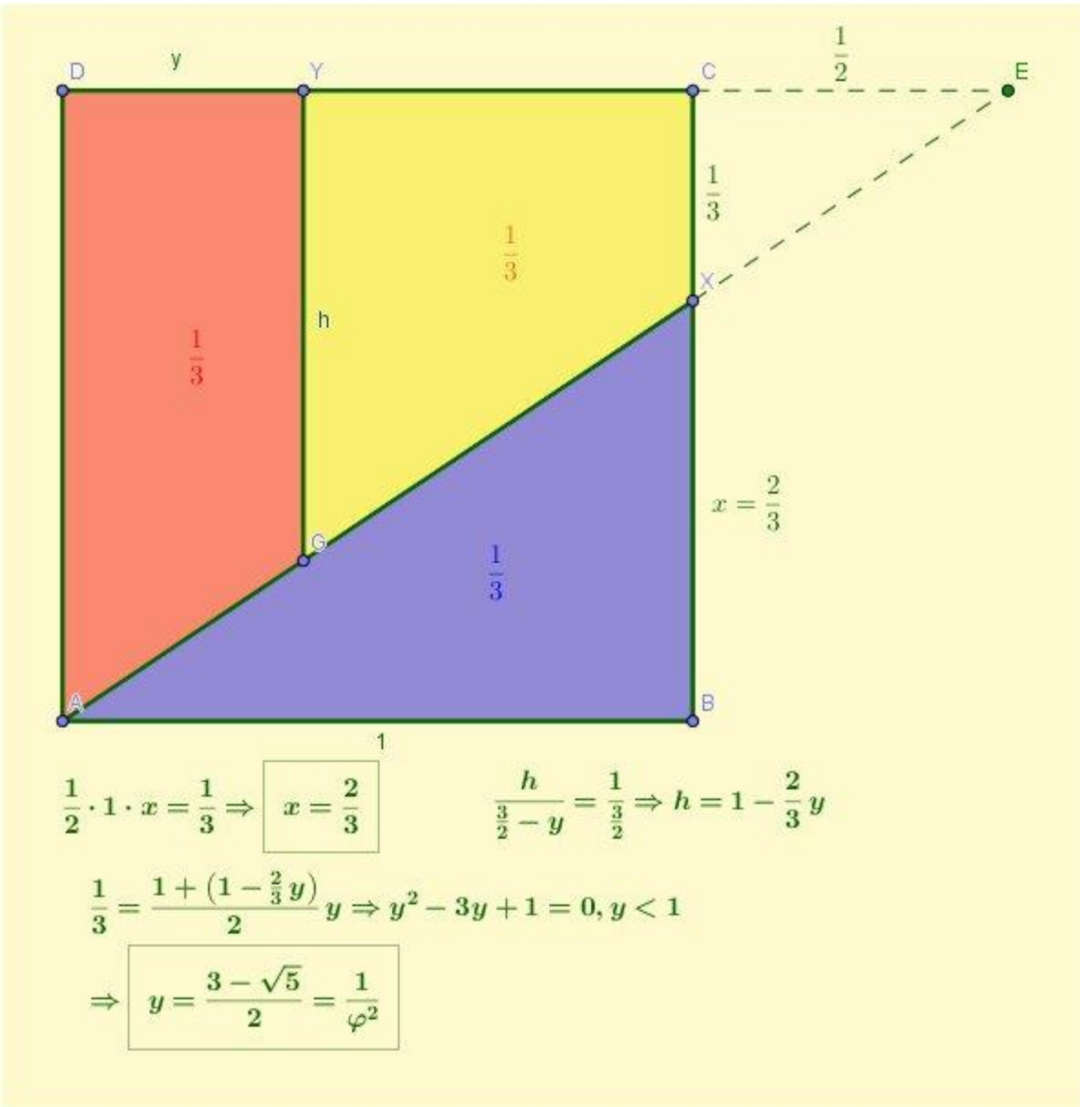
$$\frac{90 + \overline{QY}}{2}\,y = \frac{1}{3}90^2 \qquad (2)$$

Consideremos el sistema formado por las expresiones (1) (2):

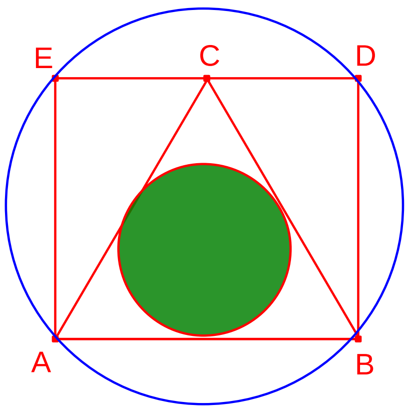
$$\begin{cases} \dfrac{\overline{QY}}{1355 - y} = \dfrac{30}{45} \\ \dfrac{90 - \overline{QY}}{2}\,y = 2700 \end{cases}$$. Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} \overline{QY} = 30\sqrt{5} \\ y = 135 - 45\sqrt{5} \approx 34.38 \end{cases}.$$

<u>**Solución Ignacio Larrosa (@ilarrosac)**</u>: En esta solución el lado del cuadrado mide 1

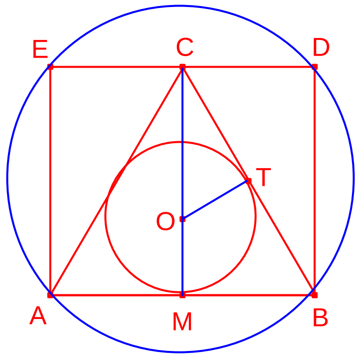


Noviembre 13-14:



En la figura ΔABC es un triángulo equilátero circunscrito en un círculo de radio 1. Una circunferencia está circunscrita al rectángulo ABDE. Calcular el diámetro de la circunferencia

Solución: Sea O el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo equilátero $\overset{\Delta}{ABC}$. Sean M y T los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita y los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, respectivamente.



$$\overline{OM} = \overline{OT} = 1,\ \angle OCT = 30^{o}.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OTC}$:

$$\overline{OC} = 2,\ \overline{CT} = \sqrt{3}.$$

$$\overline{BC} = \overline{CM} = \overline{OM} + \overline{OC} = 3,\ \overline{AB} = 2\overline{CT} = 2\sqrt{3}.$$

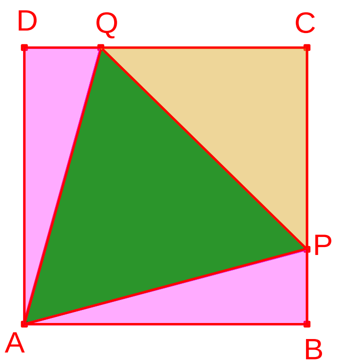
El diámetro de la circunferencia circunscrita al rectángulo ABDE es igual a su diagonal.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABD}$:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 3^2 = 21.$$

$$\overline{AD} = \sqrt{21}.$$

Noviembre 15-22:



El cuadrado ABCD tiene lado a. El triángulo ΔAPQ es equilátero. Calcular el lado del triángulo ΔAPQ y demostrar que la suma de áreas de los triángulos ΔABP y ΔADQ es igual al área del triángulo ΔCQP

Solución: a) Sea $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{AQ} = c$. $\angle BAP = \angle DAQ = 15^{o}$.

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABP}$:

$$\cos 15^{o} = \frac{a}{c}.\ c = \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)a.$$

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABP}$:

$$\frac{\overline{BP}}{a} = \operatorname{tg} 15^{o}.\ \overline{BP} = \left(2 - \sqrt{3}\right)a.\ \overline{PC} = a - \overline{BP} = \left(\sqrt{3} - 1\right)a.$$

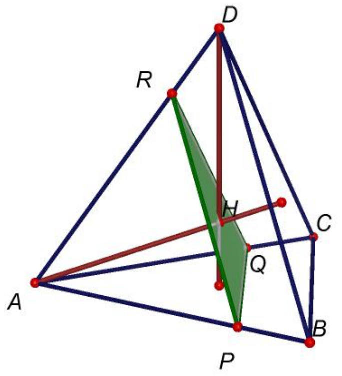
$$\text{b) } S_{ABP} = \frac{1}{2}a \cdot \overline{BP} = \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)a^2.$$

$$S_{ABP} + S_{ADQ} = \left(2-\sqrt{3}\right)a^2.$$

$$S_{PCQ} = \frac{1}{2}\overline{PC}^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)^2 a^2 = \left(2-\sqrt{3}\right)a^2.$$

Entonces, $S_{ABP} + S_{ADQ} = S_{PCQ}$.

Noviembre 16-17:

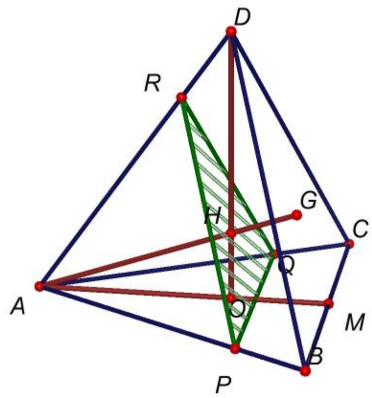


En un tetraedro regular de arista a, calcular el área de la sección determinada por un plano que contiene el punto de intersección de las alturas del tetraedro y es paralelo a una de sus caras

Solución: Sea $\overline{DO} = \overline{AG}$ la altura del tetraedro regular ABCD de arista a.

Sea H la intersección de las dos alturas.

Sea M el punto medio de la arista $\overline{BC}$.



$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

$$\overline{AO} = \frac{2}{3}\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AOD}$

$$\overline{DO} = \overline{AG} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

Sea $x = \overline{OH}$, $\overline{AH} = \frac{\sqrt{6}}{3}a - x$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AOH}$:

$\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a - x\right)^2 = x^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2$. Resolviendo la ecuación:

$$x = \frac{\sqrt{6}}{12}a, \; \overline{AH} = \frac{\sqrt{6}}{4}a.$$

Los triángulos equiláteros $\overset{\Delta}{PQR}$, $\overset{\Delta}{BCD}$ son homotéticos con centro de homotecia A y razón $\frac{\overline{AH}}{\overline{AG}}$.

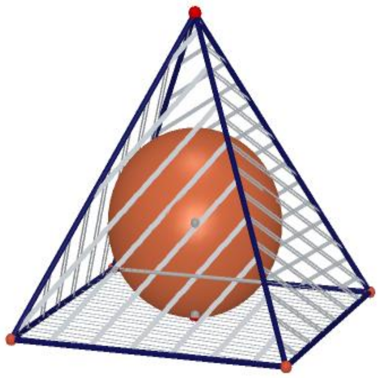
$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AG}}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{4}a}{\frac{\sqrt{3}}{3}a}=\frac{3}{4}.$$

Las áreas de los dos triángulos son proporcionales al cuadrado de la razón de homotecia.

$$\frac{S_{PQR}}{S_{BCD}}=\left(\frac{\overline{AH}}{\overline{AG}}\right)^2=\frac{9}{16}.$$

$$S_{PQR}=\frac{9}{16}S_{BCD}=\frac{9}{16}\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{9\sqrt{3}}{64}a^2.$$

Noviembre 20-21:

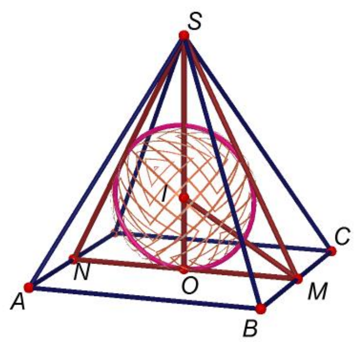


Determinar el radio de la esfera inscrita en una pirámide regular cuadrangular si el volumen de la pirámide es V y el ángulo entre dos cares laterales opuestas es α

Solución: Sea la pirámide cuadrangular regular ABCDS de base el cuadrado ABCD de lado $\overline{AB}=a$ y altura $\overline{OS}=h$.

El volumen de la pirámide es:

$$V=\frac{1}{3}a^2h.$$



Sea M el punto medio de la arista $\overline{BC}$.

Sea N el punto medio de la arista $\overline{AD}$.

$\alpha=\angle MSN.$

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{MOS}$:

$$a=2h\cdot tg\frac{\alpha}{2}.$$

$$V=\frac{1}{3}\left(2h\cdot tg\frac{\alpha}{2}\right)^2h.$$

$$h=\sqrt[3]{\frac{3V}{4tg^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

$$a=\sqrt[3]{6V\cdot tg\frac{\alpha}{2}}$$

Sea I el centro de la esfera.

Sea $\overline{OI}=r$ el radio de la esfera.

$$\angle SMN=90^{o}-\frac{\alpha}{2}.$$

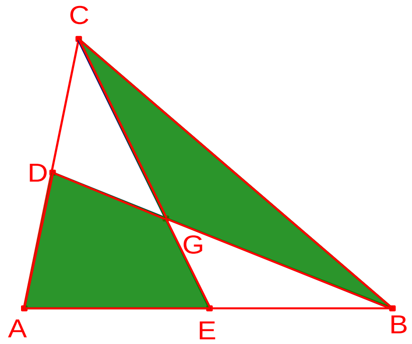
$$\angle IMO = 45^{\circ} - \frac{\alpha}{4}.$$

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{IOM}$:

$$r = \frac{a}{2}\,tg\left(45^{\circ} - \frac{\alpha}{4}\right).$$

$$r = \frac{1}{2}\,tg\left(45^{\circ} - \frac{\alpha}{4}\right)\cdot\sqrt[3]{6V\cdot tg\frac{\alpha}{2}}.$$

Noviembre 23-30:

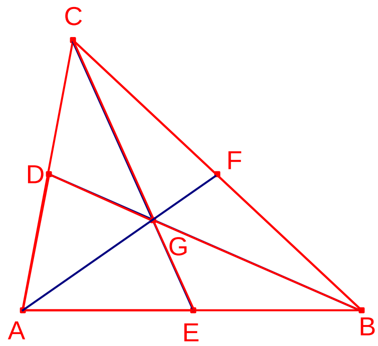


En el triángulo ΔABC se han dibujado las medianas BD y CE que se intersectan en G. Demostrar que el triángulo ΔBCG y el cuadrilátero AEGD tienen la misma área

Solución: Sea la mediana $\overline{AF}$.

Dos triángulos que tienen la misma altura tienen las áreas proporcionales a las bases.

Aplicando la propiedad del baricentro:



$$\overline{AG} : \overline{GF} = 2:1.$$

$$S_{AGC} = 2\cdot S_{GFC}.$$

$$S_{BCG} = 2\cdot S_{GFC}.$$

$$S_{ADG} = S_{DCG}.$$

Entonces, $S_{ADG} = S_{GFC}$.

Aplicando la propiedad del baricentro:

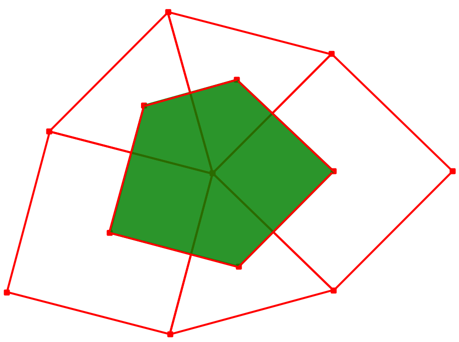
$$\overline{CG} : \overline{GE} = 2:1.$$

$$S_{AGC} = 2\cdot S_{AGE}.$$

Entonces, $S_{AGE} = S_{GFC}$.

Por tanto, $S_{BCG} = S_{ADG} + S_{AGE} = S_{ADGE}$.

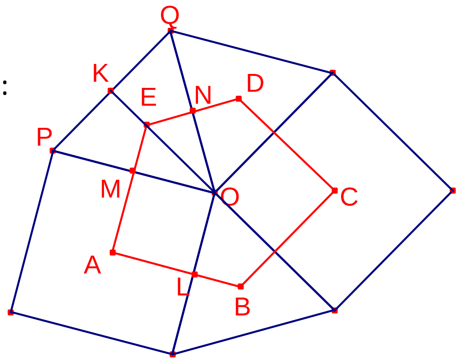
Noviembre 24-25:



En la figura hay dibujados dos cuadrados y tres triángulos equiláteros de lados c. Con sus centros se ha dibujado un pentágono. Determinar su área, su perímetro y los ángulos de las aristas adjuntas.

Solución: Sea ABCDE el pentágono. $\overline{AE}$ es la mediatriz del lado $\overline{OP}$. $\overline{DE}$ es la mediatriz del lado $\overline{OQ}$.

$$\overline{OM} = \overline{AM} = \overline{AL} = \frac{c}{2}.$$



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OKP}$:

$$\overline{OK} = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

Aplicando la propiedad del baricentro al triángulo equilátero $\overset{\Delta}{OPQ}$:

$$\overline{KE} = \overline{ME} = \overline{EN} = \frac{1}{3}\overline{OK} = \frac{\sqrt{3}}{6}c.$$

a) El perímetro del polígono ABCDE es:

$$P_{ABCDE} = 4 \cdot \overline{AL} + 6 \cdot \overline{ME} = \left(2+\sqrt{3}\right)c.$$

b) El área del cuadrilátero OMEN es:

$$S_{OMEN} = \frac{1}{3}S_{OPQ} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}c^2.$$

El área del polígono ABCDE es:

$$P_{ABCDE} = 2 \cdot S_{ALOM} + 3 \cdot S_{OMEN} = 2 \cdot \frac{1}{4}c^2 + 3\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}c^2\right) = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)c^2.$$

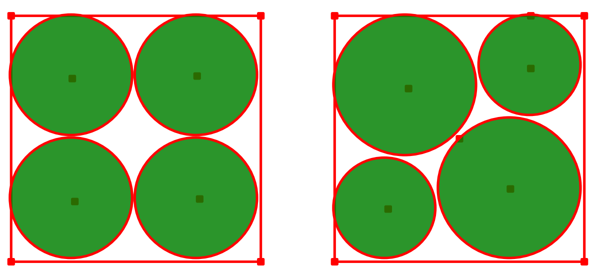
c)

$$\angle OME = \angle ONE = 90^o,\ \angle NOM = 60^o.$$

$$\angle MEN = 360^o - \left(2 \cdot \angle OME + \angle NOM\right) = 120^o.$$

Los ángulos del polígono ABCDE son: $A = C = 90^o$, $B = D = E = 120^o$.

Noviembre 26-27:



Los cuadrados de la figura son iguales y de lado 1. En el de la izquierda hay 4 círculos iguales tangentes entre ellos y tangentes al cuadrado. En el de la derecha hay dos círculos que pasan por el centro del cuadrado y son tangentes a él y otros dos que son tangentes a ellos y al cuadrado. ¿Cuál de los dos cuadrados tiene más área sombreada?

Solución: El radio de las circunferencias de la figura de la izquierda es: $a = \frac{1}{4}$.

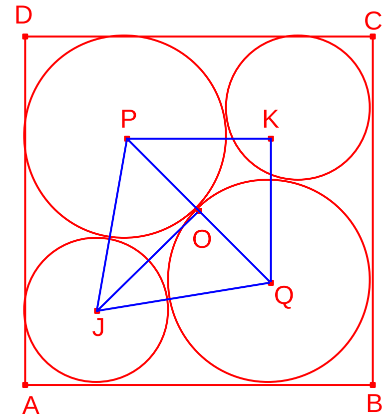
El área de la zona sombreada de la izquierda es:

$$S_e = 4\left(\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398 \ .$$

Sea ABCD el cuadrado de la figura de la derecha.

Sean P y Q los centros de las circunferencias que pasan por el centro O del cuadrado.

Sea r el radio de las dos circunferencias. Por el centro P trazamos una recta paralela al lado $\overline{AB}$. Por el centro Q trazamos una recta paralela al lado $\overline{AD}$. Las dos rectas se intersectan en el punto K.



En el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{PKQ}$: $\overline{PQ} = 2r$, $\overline{PK} = \overline{QK} = 1-2r$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{PKQ}$:

$2r = (1-2r)\sqrt{2}$. Resolviendo la ecuación: $r = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Sea J el centro de la circunferencia pequeña y s su radio.

$$\overline{AJ} = s\sqrt{2} \ , \ \overline{AO} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ .$$

Consideremos el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{JOP}$:

$$\overline{OJ} = \frac{\sqrt{2}}{2} - s\sqrt{2} \ , \ \overline{OP} = r \ , \ \overline{JP} = r + s \ .$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{JOP}$:

$$(r+s)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - s\sqrt{2}\right)^2 + r^2 \ .$$

Simplificando:

$$s^2 + \left(-4+\sqrt{2}\right)s + \frac{1}{2} = 0 \ .$$

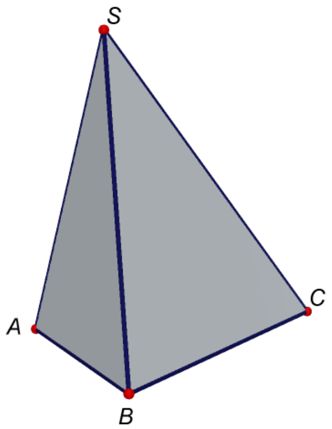
Resolviendo la ecuación:

$$s = \frac{4-\sqrt{2}-2\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2} \ .$$

El área de la zona sombreada de la derecha es:

$$S_d = 2\left(\pi\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) + 2\left(\pi\left(\frac{4-\sqrt{2}-2\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}\right)^2\right) \approx 0.817424 \ .$$

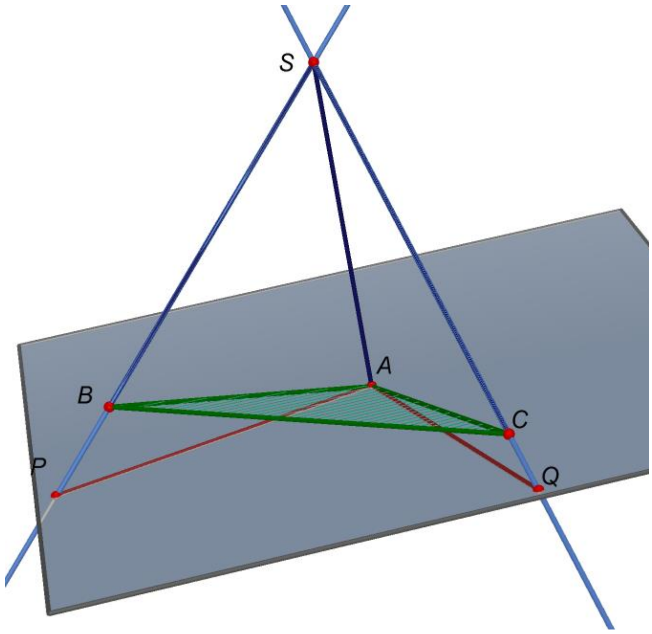
Noviembre 28-29:



Sea el tetraedro ABCS tal que AS = 120, $\angle$ASB = 45° y $\angle$BSC = 60°.

Calcular la medida del ángulo diédrico que forma la arista AS

Solución: Consideremos el plano que pasa por el punto A y es perpendicular a la arista $\overline{AS}$.Este plano corta las rectas SB, SC que forman las aristas en los puntos P y Q, respectivamente.



El ángulo diédrico que forma la arista $\overline{AS}$ es igual al ángulo $\angle$PAQ. Los triángulos rectángulos isósceles $P\overset{\Delta}{A}S$, $Q\overset{\Delta}{A}S$ son iguales.

$$\overline{PA} = \overline{QA} = \overline{AS} = 120^{o}.$$

$$\overline{SP} = \overline{SQ} = 120\sqrt{2}.$$

El triángulo $P\overset{\Delta}{S}Q$ es isósceles y, además, $\angle$PSQ = 60°, por tanto, es equilátero, por tanto,

$$\overline{PQ} = \overline{SP} = \overline{SQ} = 120\sqrt{2}.$$

$$\overline{PQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2.$$

Aplicando el teorema inverso de Pitágoras, $\angle PAQ = 90^{o}$.