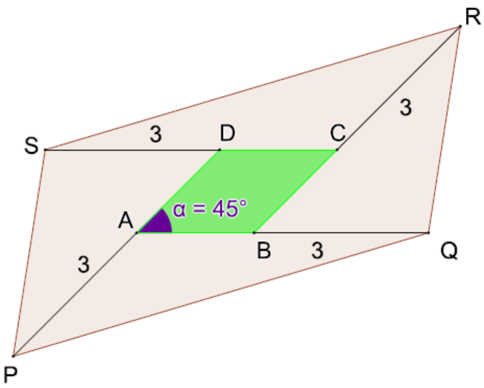
SOLUCIONES DICIEMBRE 2018

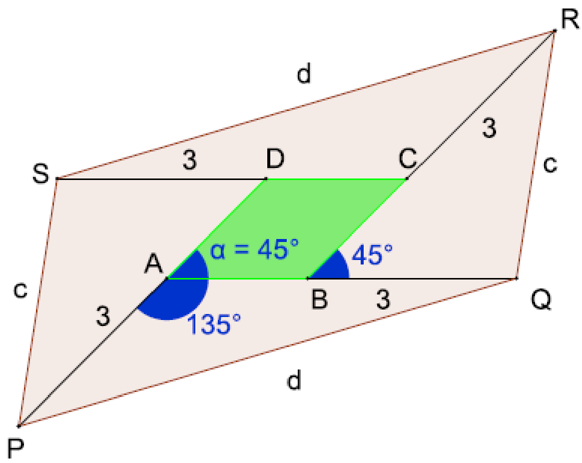
Problemas para bachillerato y preparación a la Olimpiada Matemática Española (RSEM).
Autor: Rafael Martínez Calafat. I.E.S. “La Plana”

Diciembre 1-2:



Se tiene un rombo ABCD de lado 2 cm, de manera que los lados consecutivos AB y AD forman 45°. Cada lado se prolonga 3 cm formándose el cuadrilátero PQRS. Hallar su área y perímetro.

Solución: De la figura de abajo, tenemos:



Perímetro:

$$c^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 45 = 34 - 15\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{34 - 15\sqrt{2}}$$

$$d^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 135 = 34 + 15\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{34 + 15\sqrt{2}}$$

$$\text{Perímetro} = 2c + 2d = 2 \cdot \sqrt{34 - 15\sqrt{2}} + 2 \cdot \sqrt{34 + 15\sqrt{2}} \approx 22{,}013$$

Área:

$$A_{ABCD} = \left\{ \begin{array}{c} \sin 45 = \dfrac{h}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ h = \sqrt{2} \end{array} \right\} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$A_{BQR} = \frac{5 \cdot 3 \cdot \sin 45}{2} = \frac{15\sqrt{2}}{2}$$

$$A_{APQ} = \frac{5 \cdot 3 \cdot |\sin 135|}{2} = \frac{15\sqrt{2}}{4}$$

$$A_{total} = 2\sqrt{2} + 2\frac{15\sqrt{2}}{4} + 2\frac{15\sqrt{2}}{4} = 17\sqrt{2}$$

Diciembre 3-10: Durante las vacaciones de verano, Carles ha estado algunos días en Londres. Durante su estancia en Londres ha llovido 10 días, dos de ellos lo ha hecho por la mañana y por la tarde, los otros ocho sólo ha llovido por las mañanas o por las tardes. Ha habido 10 mañanas y 8 tardes sin llover. ¿Cuántos días ha durado la estancia de Carles en Londres?

Solución: Si la estancia de Carles en Londres ha durado x días tenemos 2x periodos (x mañanas y x tardes). Además, del enunciado:

x mañanas → 10 mañanas no ha llovido
x mañanas → y mañanas ha llovido

x tardes → 8 tardes no ha llovido
x tardes → z tardes ha llovido

Por tanto: 2x = 10 + y + 8 + z = 18 + (y + z). Pero y + z = 10 + 2 pues ha llovido mañana y tarde, 2 días y en los demás sólo ha llovido por la mañana o por la tarde. Luego: 2x = 18 + 10 + 2 = 30 $\Rightarrow$ x = 15. La estancia de Carles en Londres ha durado 15 días.

Solución (@asitnof):

0 = no llueve, 1 = llueve, M = mañana; V =tarde

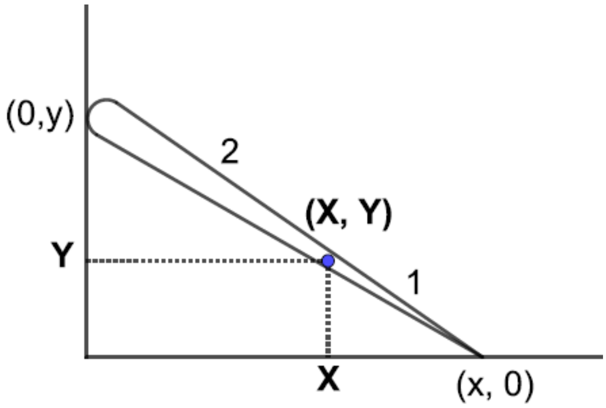
	M	V	llueve	llueve mañana o tarde	no llueve mañana	no llueve tardes
2 días	1	1	2			
x días	1	0	x	x		x
y días	0	1	y	y	y	
z días	0	0			z	z
			10 días	8 días	10 días	8 días

$$\left.\begin{array}{rcr} x+y & = & 8 \\ y+z & = & 10 \\ x+z & = & 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 2(x+y+z) = 26 \quad \Rightarrow \quad x+y+z = 13$$

Días en Londres (13 + 2 =) 15

Diciembre 4-5: Consideremos en el plano un sistema de coordenadas cartesiano. Una aguja recta está a lo largo del eje Y positivo con la punta de la aguja en (0, 0). Un punto P de la mitad inferior de la aguja divide la longitud de la aguja en la razón 1:2. La punta de la aguja se arrastra desde el origen hacia la parte positiva del eje X mientras que la parte del ojal baja por el eje de las Y. Hallar la expresión algebraica de la curva descrita por el punto P.

Solución: Denotaremos por l la longitud de la aguja. Si los puntos finales de la aguja son (0, y) y (x, 0) y el punto P tiene por coordenadas (**X, Y**) entonces:



$$\mathbf{X} = \frac{2x}{3} \qquad \mathbf{Y} = \frac{y}{3}$$

Puesto que $l^2 = x^2 + y^2$ tenemos:

$$l^2 = \left(\frac{3\mathbf{X}}{2}\right)^2 + (3\mathbf{Y})^2$$

$$1 = \frac{\mathbf{X}^2}{\frac{4l^2}{9}} + \frac{\mathbf{Y}^2}{\frac{l^2}{9}}$$

Que corresponde a una elipse con semiejes $a = \frac{2l}{3}$ y $b = \frac{l}{3}$

Diciembre 6: ¿Cuántos números podemos generar sumando un máximo de cinco doses y cinco sietes?

Solución: Nos preguntan por el rango de valores de 2n + 7 m con n,m $\in$ {0, 1, 2, 3, 4, 5} y no simultáneamente nulos.

m	2n + 7m	
0	2n	2, 4, 6, 8, 10
1	2n+7	7, 9, 11, 13, 15, 17
2	2n+14	14, 16, 18. 20, 22, 24,
3	2n+21	21, 23, 25, 27, 29, 31,
4	2n+ 28	28, 30, 32, 34, 36, 38,
5	2n+35	35, 37, 39, 41, 43, 45,

Luego el rango de valores llega hasta el 45 y los números que no podemos generar son: 1, 3, 5, 12, 17, 26, 33, 40, 42 y 44. En total se pueden generar (45 – 10 =) 35 números.

También con una hoja de cálculo:

		m					
	2n+7m	0	1	2	3	4	5
n	0		7	14	21	28	35
	1	2	9	16	23	30	37
	2	4	11	18	25	32	39
	3	6	13	20	27	34	41
	4	8	15	22	29	36	43
	5	10	17	24	31	38	45

Diciembre 7-8: Los números naturales se colocan como indica el esquema siguiente:

		1		
	2	3	4	
5	6	7	8	9
-	-	-	-	-

¿Cuánto vale la suma de todos los números de la fila donde se halla el 2018? ¿Qué número hay encima del 2018?

Solución: Echando un vistazo a la tabla tenemos que la fila n-ésima termina en n^2 y, puesto que, la fila $n – 1$ acaba en $(n – 1)^2$, la fila n empieza en $(n – 1)^2 + 1$. En otras palabras, la fila n-ésima empieza en $n^2 – 2n + 2$ y termina en n^2, y por tanto la fila n-ésima tiene $(n^2 – (n^2 – 2n + 1) =)\ 2n – 1$ números. Además, un número, en la fila n, es igual al que tiene arriba más $2n – 2$.

Como $44 < \sqrt{2018} < 45$ tenemos que el 2018 está en la fila 45 que empieza por $(\ (n – 1)^2 + 1 = 44^2 + 1 =)\ 1937$ y termina en $(n^2 = 45^2 =)\ 2015$. Los números en esta (y en cualquier otra) fila son una PA de primer término 1037 y diferencia 1 y último término $(45^2 =)\ 2025$ con $(2n – 1 = 2·45 – 1 =)\ 89$ sumandos. Por tanto:

$$S = \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n =\right) \frac{1937 + 2025}{2} \cdot 89 = 176309$$

Por último, el número que tiene encima el 2018 es x con:

$$x + (2n - 2) = x + (2 \cdot 45 - 2) = x + 88 = 2018 \quad \Rightarrow \quad x = 1930$$

Diciembre 9-16: El departamento de matemáticas del IES “La Plana” está compuesto por seis profesores, tres de cada uno de los posibles sexos. Cierto día, a la reunión de departamento, llegan aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que el orden de llegada tenga los sexos alternados?

Solución: El primer profesor en llegar puede ser cualquiera de los seis (casos favorables seis, casos posibles seis). La segunda persona ha de ser de sexo diferente al del primer profesor (casos favorables 3, casos posibles cinco). El tercer profesor ha de tener el mismo sexo que el primer profesor (casos favorables dos, casos posibles cuatro). El cuarto profesor ha de tener el mismo sexo que el segundo (casos favorables dos, casos posibles tres). El quinto profesor ha de ser del mismo sexo que el primero y el tercero (casos favorables uno, casos posibles dos). El sexto profesor ha de ser del mismo sexo que el segundo y el cuarto (casos favorables uno, casos posibles uno). Luego la probabilidad solicitada es:

$$P = \frac{6}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{10}$$

Diciembre 11: Resolver en $\mathbb{N}$:

$$\mathbf{x^3 + 2x + 16 = 3y + 5}$$

Solución: Tenemos:

$$x^3 + 2x = 3y - 11 \quad \Rightarrow \quad x^3 + 2x = 3(y-4) + 1 \qquad (*)$$

Podemos interpretar (*) como. ¿qué valores de x hacen que $x^3 + 2x$ de residuo 1 al dividir la expresión $x^3 + 2x$ por 3. Resolvamos $x^3 + 2x = 1(3)$

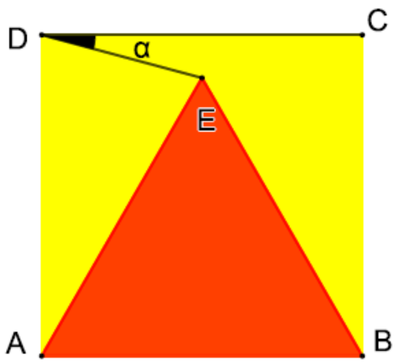
$$\text{Si } x = 0(3) \Rightarrow x^2 = 0(3) \Rightarrow x(x^2+2) = 0(3)$$

$$\text{Si } x = 1(3) \Rightarrow x^2 = 1(3) \Rightarrow x(x^2+2) = 0(3)$$

$$\text{Si } x = 2(3) \Rightarrow x^2 = 1(3) \Rightarrow x(x^2+2) = 0(3)$$

Como nunca $x^3 + 2x = 1(3)$, la ecuación propuesta no tiene soluciones enteras positivas

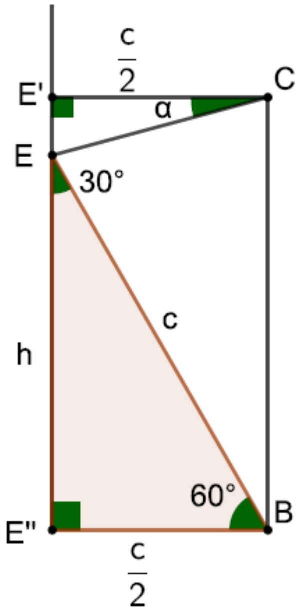
Diciembre 12:



En la figura ABCD es un cuadrado. Demostrar:

$$\mathbf{\Delta ABE \text{ es equilátero} \Leftrightarrow \alpha = 15°}$$

Solución:



$\Rightarrow$

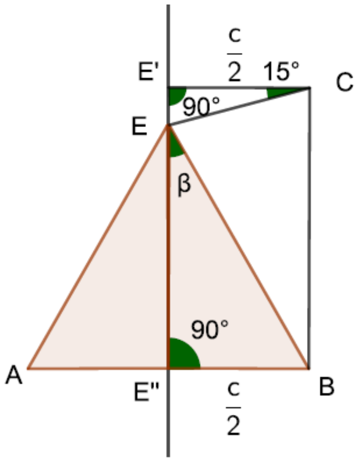
En la figura:

$$h = EE'' = \frac{E''B}{tag30} = \frac{c/_2}{\sqrt{3}/_3} = \frac{3c}{2\sqrt{3}} = \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

$$EE' = E'E'' - EE'' = c - \frac{c\sqrt{3}}{2} = c\frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

En $\Delta EE'C$

$$tag\alpha = \frac{EE'}{\frac{c}{2}} = \frac{\frac{c(2-\sqrt{3})}{2}}{\frac{c}{2}} = 2 - \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 15°$$



$\Leftarrow$

En ΔE'EC:

$$E'E = \frac{c}{2} \cdot tag15 = c \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

En ΔEE''B:

$$tag\beta = \frac{c/2}{EE''} = \frac{c/2}{c - E'E} = \frac{c/2}{c - c\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad \beta = 30°$$

$\Rightarrow$ $\angle$E''BE = 60° $\Rightarrow$ ΔABC es un triángulo 60°-60°-60°, es decir, es equilátero

Diciembre 13-20: El dispensador de "snacks" del instituto tiene 11 clases de "snacks", tres que cuestan 0,5 € cada uno, cuatro que cuestan 1 € cada uno y cuatro que cuestan 2 € cada uno. Aitana quiere invitar a Dani y Laia. ¿De cuántas maneras puede comprar Aitana tres "snacks" gastándose como máximo cuatro euros?

Solución: Tendremos la siguiente tabla de posibilidades:

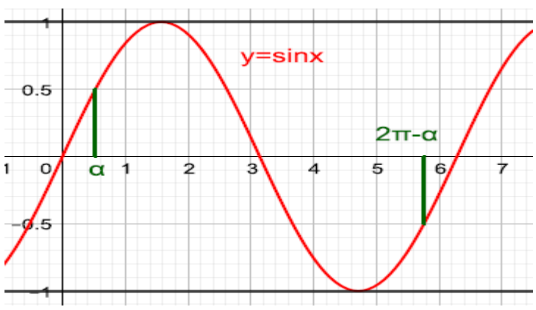
Precio de los snacks	posibilidades
2 – 1 – 0,5	4·4·3 = 48
2 – 1 – 1	4·4·4 = 64
2 – 0,5 – 0,5	4·3·3 = 36
1 – 1 – 1	4·4·4 = 64
1 – 1 – 0,5	4·4·3 = 48
1 – 0,5 – 0,5	4·3·3 = 36
0,5 – 0,5 – 0,5	3·3·3 = 27

En total (48 + 64 + 36 + 64 + 48 + 36 + 27 =) 323. Por ejemplo, si se elige gastarse 0,5 € en cada snack hay 3 oportunidades para el snack de Dani, 3 oportunidades para el snack de Laia y 3 oportunidades para el snack de Aitana.

Diciembre 14: Calcular razonadamente el valor de:

$$\mathbf{sin50° + sin110° + sin180° + sin250° + sin310°}$$

Solución: Tenemos de la gráfica de la función seno de un ángulo (en radianes):



que sin α = - sin (360° - α). Por lo tanto:

$$\sin(50°) = -\sin(360° - 50°) = -\sin(310°)$$

$$\sin(110°) = -\sin(360° - 110°) = -\sin(250°)$$

Además: sin (180°) = 0

De donde:

sin (50°) + sin (110°) + sin (180°) + sin (250°) + sin (310°) = - sin (310°) – sin (250°) + 0 + sin(250°) + sin (310°) = 0

Solución Jordi Herrero Martínez (3ESO. IES “Laurona”):

Como sin (180°) = 0 y $\sin(a) + \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$, la suma propuesta se reduce a:

$$\begin{aligned} &\sin 50° + \sin 110° + \sin 180° + \sin 250° + \sin 310° \\ &\quad = 2\sin(80°) \cdot \cos(30°) + 2\sin(280°) \cdot \cos(30°) \\ &\quad = 2 \cdot \cos(30°)\big(\sin(80°) + \sin(280°)\big) \\ &\quad = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \big(\sin(80°) + \sin(280°)\big) = 0 \end{aligned}$$

pues sin (x) + sin (360 – x) = 0 (sustituyendo x por 80°)

Diciembre 15: ¿Cuántos de los primeros 2019 enteros positivos son múltiplos de 5 o de 11 o de 23?

Solución: Tendremos:

$$A = \{x \in N \mid x \le 2019 \text{ y } x = \dot{\widehat{5}}\} \Rightarrow \text{Card}(A) = \left\lfloor \frac{2019}{5} \right\rfloor = 403$$

$$B = \{x \in N \mid x \le 2019 \text{ y } x = \dot{\widehat{11}}\} \Rightarrow \text{Card}(B) = \left\lfloor \frac{2019}{11} \right\rfloor = 183$$

$$C = \{x \in N \mid x \le 2019 \text{ y } x = \dot{\widehat{23}}\} \Rightarrow \text{Card}(C) = \left\lfloor \frac{2019}{23} \right\rfloor = 87$$

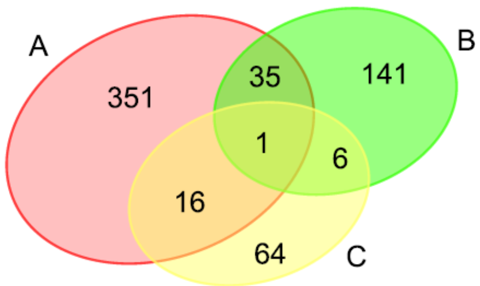
$$A \cap B = \{x \in N \mid x \le 2019 \text{ y } x = \dot{\widehat{5 \cdot 11}} = \dot{\widehat{55}}\} \Rightarrow \text{Card}(A \cap B) = \left\lfloor \frac{2019}{55} \right\rfloor = 36$$

$$A \cap C = \{x \in N \mid x \le 2019 \text{ y } x = \dot{\widehat{5 \cdot 23}} = \dot{\widehat{115}}\} \Rightarrow \text{Card}(A \cap C) = \left\lfloor \frac{2019}{115} \right\rfloor = 17$$

$$B \cap C = \{x \in N \mid x \le 2019 \text{ y } x = \dot{\widehat{11 \cdot 23}} = \dot{\widehat{253}}\} \Rightarrow \text{Card}(B \cap C) = \left\lfloor \frac{2019}{253} \right\rfloor = 7$$

$$A \cap B \cap C = \{x \in N \mid x \le 2019 \text{ y } x = 5 \cdot \dot{\widehat{23 \cdot 11}} = \dot{\widehat{1265}}\} \Rightarrow \text{Card}(A \cap B \cap C) = \left\lfloor \frac{2019}{1265} \right\rfloor = 1$$

Y ahora:



Vamos rellenando el diagrama de Venn mirando de abajo arriba el razonamiento anterior es decir $A \cap B \cap C \to 1$; $B \cap C \to 7 - 1 = 6$; $A \cap C \to 17 - 1 = 16$, ...

Por último:

351 + 35 + 1 + 16 + 6 + 141 + 64 = 614

O bien, aplicamos la conocida fórmula:

Card (A∪B∪C) = Card (A) + Card (B) + Card (C) – Card (A∩B) – Card (A∩C) – Card (C∩B) + Card (A∩B∩C) = 403 + 183 + 87 – 36 – 17 – 7 +1 = 614

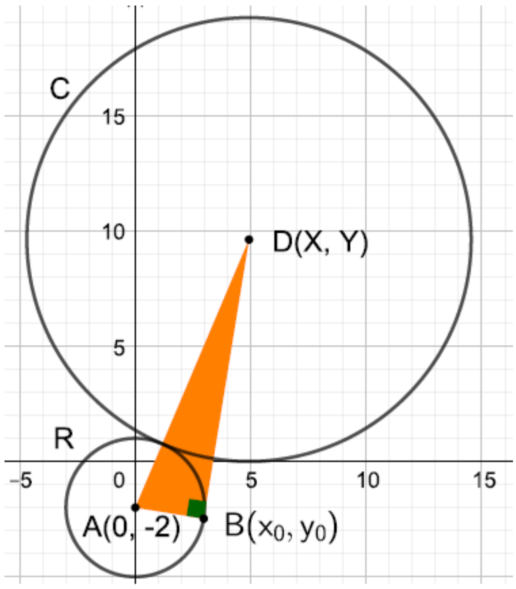
Diciembre 17-18: Sea R el círculo $x^2 + (y + 2)^2 = 9$. Sea S el conjunto de todos los círculos del plano tales que para cada círculo C en S tenemos:

1.- C está en el primer cuadrante fuera de R.

2.- C es tangente a R y al eje X.

¿Qué objeto geométrico trazan los centros de los círculos de S?

Solución:



En la figura sea C una de las circunferencias tangentes al eje X y tangente a la circunferencia R. Sea D(X, Y) el centro de C y DB la tangente a R por D(X, Y). Queda generado el triángulo ΔABD, rectángulo en B. Al variar B por la circunferencia R se genera, por D, el lugar geométrico buscado

$$R \equiv x^2 + (y-2)^2 = 9$$

Ecuación de la recta BD:

$$2x + 2(y+2)y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y+2} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{pendiente} \\ \text{de BD}\end{matrix}\right\} - \frac{x_0}{y_0+2}$$

$$Y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0+2}(X - x_0)$$

Por otra parte D está en la circunferencia de centro A(0, - 2) y radio 3+Y:

$$(X-0)^2 + (Y+2)^2 = (Y+3)^2 \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{X^2}{2} - \frac{5}{2}$$

Esta última es la ecuación del lugar geométrico. El resto servirá para saber las restricciones que hay sobre el punto B de la circunferencia dada, R. Las coordenadas del punto D son las soluciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{l}X^2+(Y+2)^2=(Y+3)^2\\ Y-y_0=-\dfrac{x_0}{y_0+2}(X-x_0)\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{r}Y=\dfrac{X^2-5}{2}\\ Y-y_0=-\dfrac{x_0}{y_0+2}(X-x_0)\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{X^2}{2}-\frac{5}{2}-y_0$$

$$=-\frac{x_0}{y_0+2}(X-x_0)\quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}X^2+\frac{x_0}{y_0+2}X-\frac{5}{2}-y_0-\frac{x_0^2}{y_0+2}=0$$

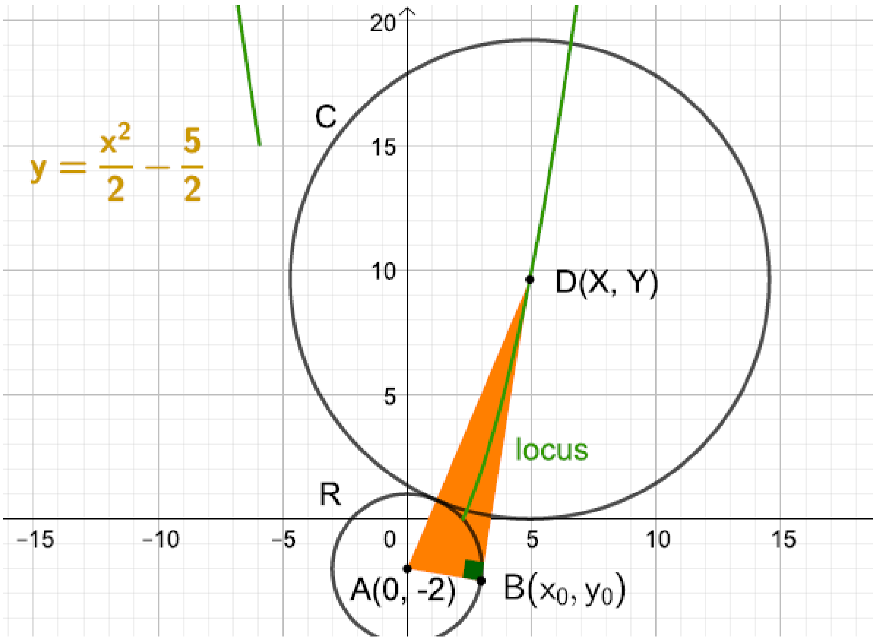
$$\Rightarrow\ X=-\frac{x_0}{y_0+2}\pm\frac{\sqrt{5(y_0+2)^2+2y_0(y_0+2)^2+2x_0^2y_0+5x_0^2}}{y_0+2}$$

$$=-\frac{x_0}{y_0+2}\pm\frac{\sqrt{5\cdot 9+2y_0\cdot 9}}{y_0+2}=\frac{-x_0\pm 3\sqrt{5+2y_0}}{y_0+2}$$

pues:

$$x_0^2+(y_0-2)^2=9$$

la raíz correspondiente al signo menos (más) corresponde a la rama del lugar geométrico de la izquierda (derecha). Las restricciones sobre las coordenadas de B son: $5 + 2y_0 \geq 0$ y $y_0 \neq -2$. En el caso $y_0 = -2$, D es (3, 2)



Diciembre 19: ¿Cuál es el mayor valor de n tal que 22^n es un divisor de 2018!?

Solución: Tendremos $22^n = 2^n \cdot 11^n$. Luego n será igual al mayor exponente con que aparezca el 2 o el 11 en la descomposición factorial de 2018!. Como entre múltiplos sucesivos de 11 hay, al menos, 5 múltiplos de 2, habrá muchos más múltiplos de 2 que de 11. En definitiva, el mayor valor de n tal que 22^n es divisor de 2018! es el exponente del factor 11 en la descomposición factorial de 2018!

Imaginemos todos los factores de 2018!

$$2018! = 1\cdot2\cdot3\cdot2^2\cdot5\cdot(2\cdot3)\cdot7\cdot2^3\cdot3^2\cdot(2\cdot5)\cdot11\cdot(2^2\cdot3)\cdot13\cdot(2\cdot7)\cdot\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \cdot(2\cdot1009)$$

Cada grupo de 11 factores contiene un factor 11. Cada grupo de 11^2 factores contiene otro factor 11. Cada grupo de 11^3 factores contiene otro factor 11 y así sucesivamente.

Por tanto, factores 11 en la descomposición factorial de 2018! hay ($1331 = 11^3 < 2018 < 11^4 = 14641$)

$$\left\lfloor\frac{2018}{11}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2018}{11^2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2018}{11^3}\right\rfloor = 183+16+1=200$$

La mayor potencia de 22 que es divisor de 2018! es 22^{200}

Diciembre 21: Hallar los enteros positivos que cumplen:

$$\mathbf{x^3+y^3+z^3=1099}$$

Solución: Supongamos $0 < x \leq y \leq z$. Entonces:

$$3z^3 \geq x^3+y^3+z^3 = 1099 \quad \Rightarrow \quad z \geq \left\lfloor\sqrt[3]{\frac{1099}{3}}\right\rfloor = 7$$

$$z^3 \leq x^3+y^3+z^3 = 1099 \quad \Rightarrow \quad z \leq \left\lfloor\sqrt[3]{1099}\right\rfloor = 10$$

Es decir, z puede valer 7, u 8, o 9 o 10.

Si $z = 10$, $x^3 + y^3 = 99$

$$\left.\begin{aligned} 2y^3 \geq x^3+y^3 = 99 \quad &\Rightarrow \quad y \geq \left\lfloor\sqrt[3]{\frac{99}{2}}\right\rfloor = 3 \\ y^3 \leq x^3+y^3 = 99 \quad &\Rightarrow \quad y \leq \left\lfloor\sqrt[3]{99}\right\rfloor = 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad y = 3 \text{ o } y = 4$$

$$\text{Si } y = 3 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 99-27 = 72 \quad \Rightarrow x = \sqrt[3]{72} \notin \mathbb{N}$$

$$\text{Si } y = 4 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 99-64 = 35 \quad \Rightarrow x = \sqrt[3]{35} \notin \mathbb{N}$$

Si $z = 9$, $x^3 + y^3 = 370$

$$\left.\begin{aligned} 2y^3 \geq x^3+y^3 = 370 \quad &\Rightarrow \quad y \geq \left\lfloor\sqrt[3]{\frac{370}{2}}\right\rfloor = 5 \\ y^3 \leq x^3+y^3 = 370 \quad &\Rightarrow \quad y \leq \left\lfloor\sqrt[3]{370}\right\rfloor = 7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad y = 5 \text{ o } y = 6 \text{ o } y = 7$$

$$\text{Si } y = 5 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 370-125 = 245 \quad \Rightarrow x = \sqrt[3]{245} \notin \mathbb{N}$$

$$\text{Si } y = 6 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 370-216 = 154 \quad \Rightarrow x = \sqrt[3]{154} \notin \mathbb{N}$$

$$\text{Si } y = 7 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 370-343 = 216 \quad \Rightarrow x = \sqrt[3]{216} = 6 \quad \Rightarrow \quad z = 9, y = 7 \text{ y } x = 6$$

Si $z = 8$, $x^3 + y^3 = 587$

$$\left.\begin{aligned} 2y^3 \geq x^3+y^3 = 587 \quad &\Rightarrow \quad y \geq \left\lfloor\sqrt[3]{\frac{587}{2}}\right\rfloor = 6 \\ y^3 \leq x^3+y^3 = 587 \quad &\Rightarrow \quad y \leq \left\lfloor\sqrt[3]{587}\right\rfloor = 8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad y = 6 \text{ o } y = 7 \text{ o } y = 8$$

$$\text{Si } y = 6 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 587-216 = 371 \quad \Rightarrow x = \sqrt[3]{371} \notin \mathbb{N}$$

$$\text{Si } y = 7 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 587-343 = 244 \quad \Rightarrow x = \sqrt[3]{244} \notin \mathbb{N}$$

$$\text{Si } y = 8 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 587-512 = 75 \quad \Rightarrow x = \sqrt[3]{75} \notin \mathbb{N}$$

Si z = 7, $x^3 + y^3 = 756$

$$\left.\begin{array}{l} 2y^3 \geq x^3 + y^3 = 756 \;\Rightarrow\; y \geq \left\lfloor \sqrt[3]{\dfrac{756}{2}} \right\rfloor = 7 \\ y^3 \leq x^3 + y^3 = 756 \;\Rightarrow\; y \leq \left\lfloor \sqrt[3]{756} \right\rfloor = 9 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; 7 \leq y \leq z = 7 \;\Rightarrow\; y = 7$$

$$\text{Si } y = 7 \;\Rightarrow\; x^3 = 756 - 343 = 413 \;\Rightarrow x = \sqrt[3]{413} \notin \mathbb{N}$$

Luego hay una única solución: x = 3, y = 7 y z = 9 y sus permutaciones

Diciembre 22-23: Al menos 50 alumnos del IES "La Plana" se van a graduar en el curso que termina en 2019. Cada graduado puede invitar a lo sumo a diez personas. En total son invitadas 445 personas al acto de graduación. Para los invitados se dispone de 25 filas con 25 asientos cada una. ¿Podemos asegurar que cada grupo de personas invitadas por cada alumno podrán sentarse juntas en una misma fila?

Solución: Ordenamos los grupos de invitados de manera que empezamos por los grupos más numerosos y terminando por los grupos menos numerosos:

$$10 \geq N_1 \geq N_2 \geq N_3 \geq \cdots\cdots \geq N_k \geq \cdots\cdots$$

Empezaremos sentando a los grupos en la primera fila hasta que un grupo entero no quepa en la primera fila. Ese grupo será situado en la segunda fila. Seguiremos así, hasta que un grupo no quepa entero en la segunda fila. Si ese grupo cabe entero en la primera fila será situado allí. Si no cabe entero en la primera fila será situados en la tercera y así sucesivamente. Supongamos que actuando así llegamos a un grupo que no cabe entero en una misma fila. Sea ese grupo el k-ésimo y supongamos que consta de N_k personas. Entonces:

$k \geq 51$ (pues en cada una de las 25 filas caben al menos 2 grupos y $2 \cdot 25 = 50$)

$N_k \cdot k \leq 445$ (pues los $k - 1$ grupos anteriores tienen al menos N_k miembros cada uno de ellos).

De la última desigualdad tenemos:

$$N_k \leq \frac{445}{k} \leq \frac{445}{51} = 8{,}7254\ldots < 9$$

Es decir, $N_k \leq 8$. Si 8 personas no caben juntes en alguna fila, entonces en cada fila hay al menos (25 – 7 =) 18 personas, pero: $18 \cdot 25 = 450 > 445$ y ya hemos llegado al absurdo.

Diciembre 24-31: Resolver en $\mathbb{Z}^+$:

$$x^4 + 2x^2 + 18 = 5y - 12$$

Solución: Tendremos:

$$x^2(x^2 + 2) = 5y - 30 \;\Rightarrow\; x^2(x^2 + 2) = 5(y - 6)$$

Podemos interpreta la última ecuación como, ¿qué valores de x hacen que $x^2(x^2 + 2) = 0(5)$? Resolvemos $x^2(x^2 + 2) = 0(5)$

$$x = 0(5) \;\Rightarrow\; x^2 = 0(5) \;\Rightarrow\; x^2(x^2 + 2) = 0(5)$$

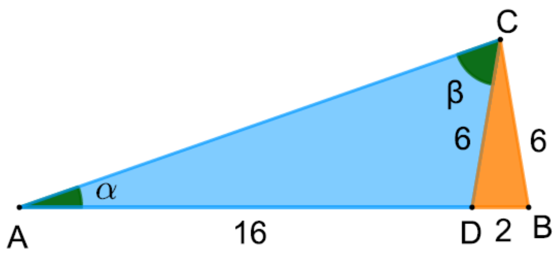
$$x = 1(5) \;\Rightarrow\; x^2 = 1(5) \;\Rightarrow\; x^2(x^2 + 2) = 3(5)$$

$$x = 2(5) \;\Rightarrow\; x^2 = 4(5) \;\Rightarrow\; x^2(x^2+2) = 4(5)$$
$$x = 3(5) \;\Rightarrow\; x^2 = 4(5) \;\Rightarrow\; x^2(x^2+2) = 4(5)$$
$$x = 4(5) \;\Rightarrow\; x^2 = 1(5) \;\Rightarrow\; x^2(x^2+2) = 3(5)$$

Las soluciones para x son los valores de x que dan residuo 0 al dividirlos por 5 es decir, son: $x = 5\cdot n$ con $n \in \{1, 2, 3, \ldots\ldots\}$. Las soluciones para y son:

$$x^2(x^2+2) = 5(y-6) \;\Rightarrow\; 25n^2(25n^2+2) = 5(y-6) \;\Rightarrow\; 5n^2(25n^2+2)+6 = y$$

Diciembre 25-26:



En la figura adjunta se tiene: AD = 16, DB = 2, DC = BC = 6.

Hallar AC y expresar β en función de α

Solución: Consideremos los triángulos ΔABC y ΔCDB; estos tienen en común el ángulo en B y además los lados adjuntos al vértice B en los dos triángulos son proporcionales:

En ΔABC

$$\frac{CB}{AB} = \frac{6}{16+2} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

En ΔCDB

$$\frac{BD}{BC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

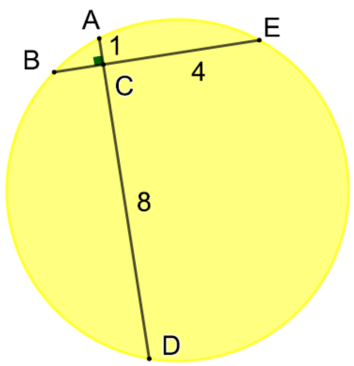
Por tanto, $\Delta ABC \approx \Delta CDB$ (pues tienen un ángulo igual y proporcionales los lados adyacentes al ángulo igual). Por tanto:

$$\left(\frac{\Delta ABC}{\Delta CDB}\right) \quad \frac{CB}{DB} = \frac{AC}{CD} = \frac{AB}{CB} \;\Rightarrow\; \frac{6}{2} = 3 = \frac{AC}{6} \;\Rightarrow\; AC = 18$$

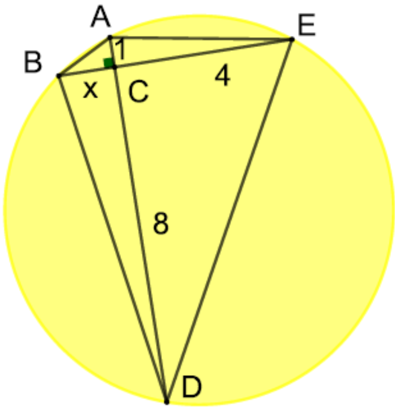
Para la última pregunta tenemos: Los dos triángulos son isósceles, por tanto:

$$\angle ABC = \frac{180-\alpha}{2} = \angle BCA = \alpha+\beta \;\Rightarrow\; \beta = \frac{180-\alpha}{2} - \alpha = \frac{180-3\alpha}{2}$$

Diciembre 27-28:



Sean AD y BE dos cuerdas perpendiculares de una circunferencia que se cortan en C. Supongamos que AC = 1, CE = 4 y CD = 8. Hallar área y perímetro del cuadrilátero ABDE



Respecto del área, tendremos:

$$A_{ABDE} = A_{\Delta ADE} + A_{\Delta ABD} = \left(\frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}\right)$$
$$= \frac{(1+8)\cdot 4}{2} + \frac{(1+8)\cdot x}{2}$$
$$= 18 + \frac{9x}{2}$$

Y respecto del perímetro:

$$\text{Perímetro} = AB + AE + ED + DB$$
$$= \sqrt{1^2 + x^2} + \sqrt{1^2 + 4^2}$$
$$+ \sqrt{4^2 + 8^2} + \sqrt{8^2 + x^2}$$

$$\text{Perímetro} = \sqrt{1^2 + x^2} + \sqrt{64 + x^2} + \sqrt{17} + 4\sqrt{5}$$

Tan sólo es necesario calcular x. Consideremos los triángulos ΔACE y ΔBCD. Los dos son rectángulos y además $\angle DBC = \angle DAE$ (pues ambos abarcan el arco que va desde D a E). Por lo tanto $\Delta ACE \approx \Delta BCD$, de donde:

$$\frac{1}{x} = \frac{4}{8} \Rightarrow x = 2$$

Por tanto:

$$A_{ABDE} = 18 + \frac{9x}{2} = 18 + 9 = 27, \text{Perímetro} = \sqrt{1^2 + x^2} + \sqrt{64 + x^2} + \sqrt{17} + 4\sqrt{5}$$
$$= 3\sqrt{17} + 5\sqrt{5}$$

Diciembre 29: De entre los enteros positivos con suma de dígitos igual a 32, ¿cuál o cuáles son los que tienen mayor producto de dígitos?

Solución: Designamos por Σ_{32} el conjunto de enteros positivos con suma de cifras igual a 32 y por Π_N el producto de las cifras del entero positivo N.

Si el 0 es una cifra de un número de Σ_{32}, N, tendremos que $\Pi_N = 0$ pues el 0 es un factor de los que participan en Π_N. Si N contiene al menos un 1 y un 2 (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) a partir de N generamos N_3 (N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9, $N_{5,5}$) formado por los mismos dígitos que N pero sustituyendo las parejas (1, 2) ((1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9)) por treses (cuatros , cincos, seises, sietes, ochos, nueves o dos cincos), entonces N_3 (N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9, $N_{5,5}$) es de Σ_{32}, pero aporta mayor producto de dígitos que N pues sustituye los pares de factores (1, 2) ((1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9)) por factores 3 (4, 5, 6, 7, 8, 9, 25). Con ello podemos suponer que los números de Σ_{32} que consideramos no tienen ni el dígito cero, ni el dígito 1.

Si $N \in \Sigma_{32}$ y N contiene el dígito 4 (5, 6, 7, 8, 9) podemos suponer que N se sustituye por $N_{2,2}$ ($N_{3,2}$, $N_{3,3}$, $N_{2,5}$, $N_{4,4}$, $N_{3,3,3}$) formado por los mismos dígitos que N pero sustituyendo el dígito 4 (5, 6, 7, 8, 9) por dos doses, (un tres y un dos, dos treses, un dos y un cinco, dos cuatros, o tres treses) y el $N_{2,2}$ ($N_{3,2}$, $N_{3,3}$, $N_{2,5}$, $N_{4,4}$, $N_{3,3,3}$) $\in \Sigma_{32}$ pero aporta igual (mayor) producto de dígitos que el número N pues sustituye el factor 4 (5, 6, 7, 8, 9) por $2\cdot 2$ ($3\cdot 2 = 6$, $3\cdot 3 = 9$, $2\cdot 5 = 10$, $4\cdot 4 = 16$, $3\cdot 3\cdot 3 = 27$).

En definitiva, el número que buscamos podemos suponer que no tiene como cifras a 0, a 1, a 4, a 5, a 6, a 7, a 8 o a 9. Es decir, sólo está formado por doses y treses. Sea N formado por p doses y q treses. Planteamos la ecuación: $32 = 2p + 3q$

$q = 0 \Rightarrow 2p = 32 \Rightarrow$ 16 doses $\Rightarrow \Pi = 2^{16} = 65536$

$q = 1 \Rightarrow 2p = 32 - 3 = 29$. Imposible.

$q = 2 \Rightarrow 2p = 32 - 6 = 26 \Rightarrow$ 13 doses y 2 treses $\Rightarrow \Pi = 3^2 \cdot 2^{13} = 73728$

$q = 3 \Rightarrow 2p = 32 - 9 = 23$. Imposible.

$q = 4 \Rightarrow 2p = 32 - 12 = 20 \Rightarrow$ 10 doses y 4 treses $\Rightarrow \Pi = 3^4 \cdot 2^{10} = 82944$

$q = 5 \Rightarrow 2p = 32 - 15 = 17$. Imposible.

$q = 6 \Rightarrow 2p = 32 - 18 = 14 \Rightarrow$ 7 doses y 6 treses $\Rightarrow \Pi = 3^6 \cdot 2^7 = 93312$

$q = 7 \Rightarrow 2p = 32 - 21 = 11$. Imposible.

$q = 8 \Rightarrow 2p = 32 - 24 = 8 \Rightarrow$ 4 doses y 8 treses $\Rightarrow \Pi = 3^8 \cdot 2^4 = 104976$

$q = 9 \Rightarrow 2p = 32 - 27 = 5$. Imposible.

$q = 10 \Rightarrow 2p = 32 - 30 = 2 \Rightarrow$ 1 dos y 10 treses $\Rightarrow \Pi = 3^{10} \cdot 2 = 118098$

Luego esta última configuración es la que aporta el mayor producto de cifras. La solución son los números formados por 10 treses y un 2 (hay 11 de estos números: primero colocamos todos los treses y después colocamos el dos en cualquiera de las 11 posiciones posibles)

<u>Diciembre 30:</u> Hallar los enteros positivos x, y tales que:

$$\mathbf{x^3 - 2x + 10 = 8y - 15}$$

<u>Solución:</u> Tenemos:

$$x^3 - 2x + 10 = 8y - 15 \;\Rightarrow\; x^3 - 2x = 8y - 25 \;\Rightarrow\; x(x^2 - 2) = 8(y - 4) + 7$$

Podemos considerar la última ecuación como ¿qué valores de x hacen que $x^3 - 2x = 7(8)$. Para esta última ecuación tenemos:

Si $x = 0(8) \Rightarrow x^2 = 0(8) \Rightarrow x(x^2 - 2) = 0(8)$

Si $x = 1(8) \Rightarrow x^2 = 1(8) \Rightarrow x(x^2 - 2) = 7(8)$

Si $x = 2(8) \Rightarrow x^2 = 4(8) \Rightarrow x(x^2 - 2) = 4(8)$

Si $x = 3(8) \Rightarrow x^2 = 1(8) \Rightarrow x(x^2 - 2) = 5(8)$

Si $x = 4(8) \Rightarrow x^2 = 0(8) \Rightarrow x(x^2 - 2) = 0(8)$

Si $x = 5(8) \Rightarrow x^2 = 1(8) \Rightarrow x(x^2 - 2) = 3(8)$

Si $x = 6(8) \Rightarrow x^2 = 4(8) \Rightarrow x(x^2 - 2) = 4(8)$

Si $x = 7(8) \Rightarrow x^2 = 1(8) \Rightarrow x(x^2 - 2) = 1(8)$

Luego las soluciones de $x^3 - 2x = 7(8)$ son $x = 1(8)$, es decir $x \in \{1, 9, 17, \ldots\} = 8n - 7$, con n natural.

Si $x = 8n - 7$, entonces: $x(x^2 - 2) = (8n - 7)((8n - 7)^2 - 2) = 8(y - 4) + 7$.

De donde: $y = 64n^3 - 168n^2 + 145n - 38 \text{ con } n \in \mathbb{N}$.

En definitiva, las soluciones de la ecuación propuesta son:

$$x = 8n - 7; \;\; y = 64n^3 - 168n^2 + 145n - 38 \text{ con } n \in \mathbb{N}$$