SOLUCIONES ENERO 2019.

PROBLEMAS PARA PRIMER CICLO DE LA E.S.O.

Autor: Colectivo "Concurso de Primavera". Comunidad de Madrid

Selección del XIX Concurso de Primavera de 2015

https://www.concursoprimavera.es/#concurso

Enero 1: Dani entrena a un equipo de escolares. Primero hizo grupos de cuatro y le sobraron dos, luego grupos de cinco y le sobró uno. Si en el grupo hay quince chicas y hay más chicas que chicos, ¿cuántos chicos hay en el equipo?

Solución: Sea x los grupos de 4, z los grupos de 5 y y el total de escolares, entonces:

$$\left.\begin{matrix} 4x + 2 = y \\ 5z + 1 = y \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4x + 2 = 5z + 1 \Rightarrow 4x + 1 = 5z$$

Por tanto, 4x + 1 acaba en 0 o 5. De donde 4x acaba en 9 o en 4. Como ningún múltiplo de 4 acaba en 9, debe ser que 4x acaba en 4. Repasando las tablas de multiplicar tenemos que el único múltiplo de 4 que acaba en 4 es (6·4 =) 24. Luego x = 6. Y entonces y = 4·6 + 2 = 26. Como hay quince chicas debe haber (26 – 15 =) 11 chicos.

Enero 2-3:

Laia y Aitana juegan a colocar fichas una detrás de otra por turnos. Laia tiene tres círculos, uno rojo, otro negro y el tercero amarillo y Aitana tiene tres cuadrados, uno rojo, otro amarillo y el tercero negro. ¿Cuántas configuraciones distintas se pueden formar?

Solución: Supongamos que empieza Laia: Laia tiene tres posibilidades para la primera pieza. Aitana tiene tres posibilidades para la segunda pieza. Laia tiene dos posibilidades para la tercera pieza. Aitana tiene dos posibilidades para la cuarta pieza. Laia tiene una posibilidad para la quinta pieza y por último Aitana tiene una posibilidad para la sexta pieza. En total (3·3·2·2·1·1 =)36 maneras de colocar las seis piezas. Como el mismo razonamiento sirve para el caso de empezar Aitana, hay en total (2·36 =) 72 configuraciones.

Enero 4: Hoy es viernes y faltan cien días para mi cumpleaños. ¿En qué día de la semana caerá mi cumpleaños este año?

Solución: Buscamos el múltiplo de 7 más cercano por defecto a 100, que es 98. Dentro de 98 días será viernes, luego viene un sábado y luego un domingo. El cumpleaños caerá en domingo.

Enero 5-6: Laia tiene veinticuatro canicas azules, treinta verdes y dieciocho plateadas. Quiere meterlas en bolsas iguales y con el mismo número de canicas en cada una de ellas, pero, como es muy matemática, no quiere mezclar canicas de distintos colores en la misma bolsa, ¿Cuántas bolsas necesitará como mínimo?

Solución: Puesto que mcd(24, 30, 18) = 2·3 = 6 necesitaremos como mínimo (24:6 =) 4 bolsas para las canicas azules; (30:6 =) 5 bolsas para las canicas verdes y (18:6 =)3 bolsas para las canicas plateadas. En total (4 + 5 + 3 =) 12 bolsas.

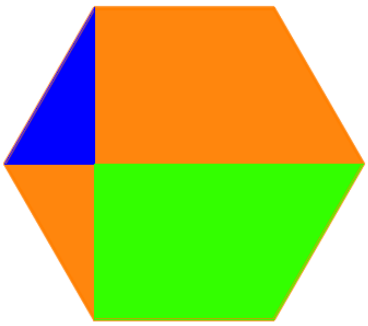
Enero 7-8: Laia escribió en la pizarra todos los números enteros desde el uno al cien y de repente apareció Aitana que borró todos aquellos números que eran múltiplos de tres menos los que tenían un siete en sus cifras. ¿Cuántos números quedaron en la pizarra después de la actuación de Aitana?

Solución: Entre 1 y 100 hay 33 múltiplos de 3 (el primero es 3·1 = 3 y el último es 3·33= 99). De ellos contienen la cifra 7, sólo seis números: el 27, el 57, el 72, el 75, el 78 y el 87 (encontrarlos es fácil: un número de dos cifras es múltiplo de 3 sii la suma de sus cifras es múltiplo de tres. Buscamos los múltiplos de tres con un 7, es decir buscamos los múltiplos de tres de la forma a7 o 7b con a, b = 2, 5 o 8). Aitana ha borrado (33 – 6 =)27 números y han quedado en la pizarra (100 – 27 =)73 números.

Enero 9: La media aritmética de cien números es ochenta y seis y la media aritmética de ochenta de ellos es ochenta y cuatro, ¿cuál es la media aritmética de los veinte que faltan?

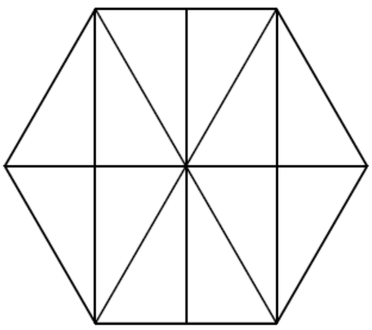
Solución: La suma de los 100 números es (86·100 = 8600). La suma de los 80 elegidos es (84·80 =) 6720. La suma de los veinte no elegidos es (8600 – 6720 =)1880 y su media será: (1880:20 =)94.

Enero 10-11:



En un hexágono regular se sabe que el área del trapecio de color verde es 420 cm^2. ¿Cuál es el área del triángulo de color azul?

Solución:



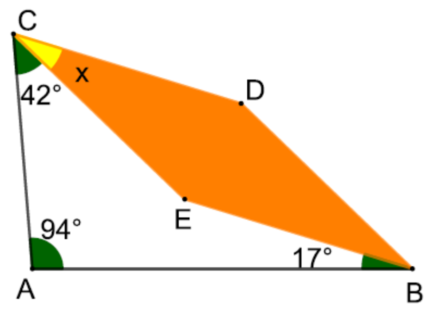
Un hexágono regular se compone de seis triángulos equiláteros de lado la arista del hexágono o (dividiendo cada triángulo equilátero en dos triángulos 30°-60°-90°) en doce triángulos 30°-60°-90° de área A_t cada uno de ellos. Como el trapecio de color verde consta de 5 triángulos 30°-60°-90°, tendremos $5·A_t = 420$. De donde A_t (=420:5 =) 84 cm^2

Enero 12: Si $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ y $\frac{b}{c} = \frac{8}{5}$ ¿cuánto vale $\frac{a}{b+c}$?

Solución: Tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a = b \\ \frac{b}{c} = \frac{8}{5} \Rightarrow c = \frac{5b}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow c = \frac{10a}{8} \Rightarrow b + c = 2a + \frac{10a}{8} = \frac{26a}{8} \Rightarrow \frac{8}{26} = \frac{a}{b+c} = \frac{4}{13}$$

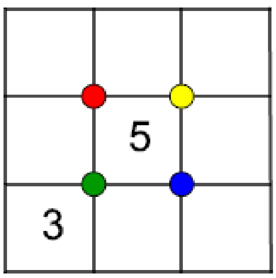
Enero 13:



CEBD es un rombo. Hallar x

Solución: En el cuadrilátero ABEC tenemos, ∠BEC = 360° – (94° + 42° + 17°) = 207°. En el rombo CEBD, ∠BEC = y = 360° – 207° = 153°. Y de aquí: 2x + 2y = 360° ⇒ x + y = 180° ⇒ x = 180° – 153° = 27°.

Enero 14-21:



En las celdas del cuadrado de la figura hemos de escribir los naturales desde el uno al nueve de manera que los números de las celdas que tienen en común el punto rojo, amarillo, verde o azul sumen 20. ¿Cómo estarán repartidos los números?

Solución: Como la suma de números colocados en las celdas encima y a la derecha de la casilla donde está escrito el 3, deben sumas 12, los números de estas celdas pueden ser 9 y 3 (que no es posible pues el 3 ya está utilizado), 8 y 4 o 7 y 5 (que no es posible pues el 5 ya está utilizado). Sólo puede ser 8 y 4

8	5	
3	**4**	

⇒

1	**6**	
8	5	
3	4	

⇒

1	6	**7**
8	5	**2**
3	4	**9**

Una vez colocados el 8 y el 4. Nos fijamos en las celdas que hay encima de las celdas que tienen al 8 y al 5. Puesto que estas han de sumar 20 hemos de añadir un total de 7 puntos. Sólo es posible colocar 1 y 6 . De forma idéntica se completan las 3 celdas de la tercera columna.

9	2	7
4	5	6
3	8	1

Aparentemente, hay soluciones diferentes de la obtenida como la expuesta a la izquierda. Pero la diferencia es sólo aparente: la primera columna de esta es la tercera fila de la anterior. La segunda columna de esta es la segunda fila de la anterior. Y la primera columna de esta es la tercera columna de la anterior

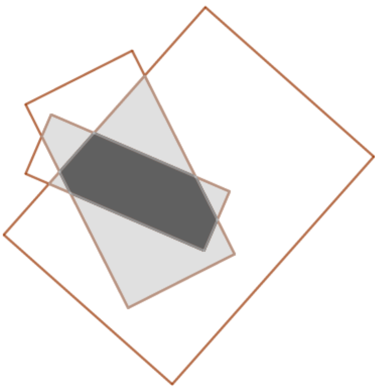
Enero 15-16: Dani ha dividido un cuadrado de 81 cm^2 de área en 81 cuadraditos, y los ha recolocado formando dos rectángulos. Sabiendo que uno tiene doble área que el otro y que sus perímetros difieren en 34 cm, hallar las dimensiones de los rectángulos.

Solución: Como 81:3 = 27, un rectángulo tiene área 27 cm^2 y el otro, el doble, 54 cm^2. Para el rectángulo de área 27 cm^2 tenemos las siguientes posibilidades:

Lado menor	Lado mayor	Perímetro	Perímetro + 34
1	27	56	90
3	9	24	58

Así pues, el perímetro del grande puede ser 90 cm o 58 cm y, por lo tanto, la suma de sus lados podría ser 45 o 29. Como los lados sólo pueden ser 1 y 54, 2 y 27, 3 y 18 o 6 y 9, vemos que la única solución posible es que los rectángulos sean 3 x 9 y de 2 x 27.

Enero 17-24:



Aitana ha comprado tres alfombras rectangulares cuyas áreas suman 20 m^2 y las ha tirado a lo largo del comedor de su casa. La superficie cubierta ha sido de 14 m^2 y la superficie cubierta por la superposición de sólo dos alfombras ha sido de 2 m^2. ¿Qué área, en m^2, ha quedado cubierta por la superposición de las tres alfombras?

Solución: Sea A_1 el área de la zona cubierta con una sola alfombra (en blanco en la figura), sea A_2 el área de la zona cubierta con dos alfombras (en gris en la figura) y A_3 el área de la zona cubierta con las tres alfombras (en negro en la figura). Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} A_1 + A_2 + A_3 = 14 \\ A_1 + 2A_2 + 3A_3 = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (A_2 = 2) \quad \left.\begin{array}{r} A_1 + A_3 = 12 \\ A_1 + 3A_3 = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A_3 = 2$$

Enero 18-19: Ayer fue el día de las mascotas en mi instituto. De los cuatrocientos cincuenta alumnos, doscientos cuarenta y uno llevamos una mascota, ochenta y siete llevamos dos mascotas, algunos llevaron tres mascotas y el resto no llevo ninguna. Si en total había quinientas cincuenta y tres mascotas, ¿cuántos alumnos no llevaron ninguna?

Solución: El número de mascotas de los alumnos que llevan una o dos mascotas es:

(241·1 + 87·2 =) 415. Por lo que el número de mascotas llevadas por los alumnos que llevan 3 mascotas es: (553 – 415 =) 138. De aquí que el número de alumnos que llevan 3 mascotas es: (138:3 =) 46. Por tanto, el número de alumnos que llevaron mascotas al instituto es: (241 + 87 + 46 =) 374. Y de aquí, el número de alumnos que no llevaron ninguna mascota al instituto es: (450 – 374 =) 76

Enero 20: Tengo tres caramelos de fresa, dos de menta y uno de limón. ¿De cuántas maneras diferentes puedo rellenar una bolsita con tres caramelos?

Solución: Representando por F (M, L) que el caramelo sea de sabor fresa (menta, limón), las combinaciones posibles son: FFF, FFM, FFL, FMM, FML, MML. Es decir, hay seis maneras diferentes de rellenar una bolsa con tres caramelos.

Enero 22: Escribimos los naturales del 1 al 100 todos seguidos:

1234567891011121314.....100

¿qué dígito nos encontramos en la posición cien?

Solución: Para número de dos cifras, a partir del 10, encontramos que la primera de sus cifras está en posición par, así que, en la posición cien, se hallará la primera cifra de cierto número, n de dos cifras. No es difícil ver que, al escribir desde el 1 hasta el 49, ocupamos (9 + 20·4 =) 89 posiciones y como la decena de los cincuenta ocupa 20 posiciones, concluimos que en la posición 100 encontramos la cifra 5.

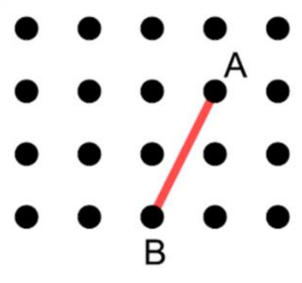
Enero 23: Halla los números primos de dos cifras cuyos dígitos sean también primos.

Solución: Sólo hay cuatro números con esas condiciones: 23, 37, 53 y 73

Enero 25: Aitana tiene un 40% más de pentágonos que Laia. ¿Qué fracción de sus pentágonos debe regalar Aitana a Laia para que las dos tengan el mismo número de pentágonos?

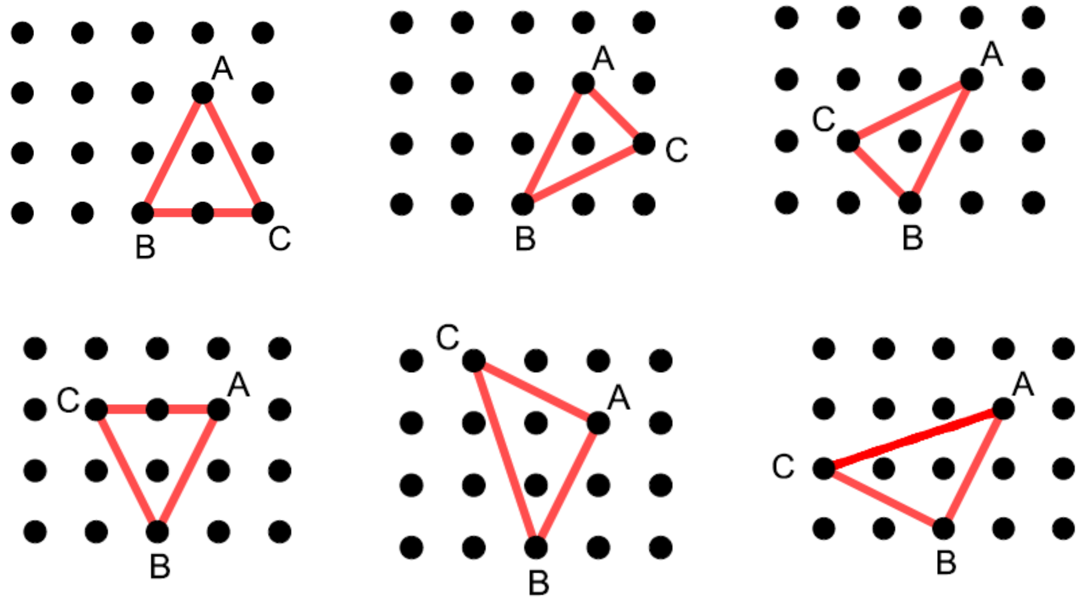
Solución: Supongamos que Laia tiene 100 pentágonos, entonces Aitana tiene 140 pentágonos, por lo que Aitana debe darle a Laia 20 y así las dos tendrán la misma cantidad (120). Aitana debe regalar (20:140 =) uno de cada siete de sus pentágonos a Laia.

Enero 26:



Hemos marcado el segmento AB en la rejilla. ¿De cuántas maneras puedes elegir el punto C para que el triángulo ΔABC sea isósceles?

Solución: Estos son los seis casos que hay



<u>Enero 27:</u> ¿Cuántos naturales iguales o menores que 999 son pares, pero no múltiplos de tres?

<u>Solución:</u> A los múltiplos de 2 les hemos de quitar los múltiplos de 2 que son también múltiplos de 3, es decir de 6. El número buscado es:

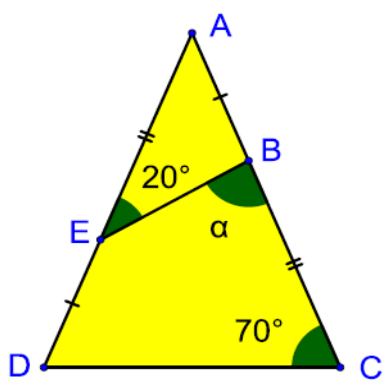
$$\left\lfloor \frac{999}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{6} \right\rfloor = 499 - 166 = 333$$

<u>Enero 28:</u> ¿De cuántas maneras se puede obtener suma 15 con cuatro sumandos naturales diferentes?

<u>Solución:</u> Hay seis posibilidades:

1 + 2 + 3 + 9 = 15	1 + 2 + 4 + 8 = 15	1 + 2 + 5 + 7 =15
1 + 3 + 4+ 7 = 15	1 + 3 + 5 + 6 = 15	2 + 3 + 4 + 6 = 15

<u>Enero 29:</u>



En el triángulo de la figura AB = ED y BC = EA. ¿Cuánto mide el ángulo α?

<u>Solución:</u> El triángulo ΔADC es isósceles (pues AE + ED = AB + BC) por lo que el ángulo en D mide 70°. De donde el ángulo en A mide (180° – 140° =) 40°. Ahora, en el triángulo ΔAEB, el ángulo en B mide (180° – (40° + 20°) =) 120°. Y por último α (180° – 120°) = 60°

Enero 30: El número N está formado por un uno, dos doses, tres treses, ………. , nueve nueves en algún orden. Hallar el resto de dividir N entre nueve.

Solución: Calculemos

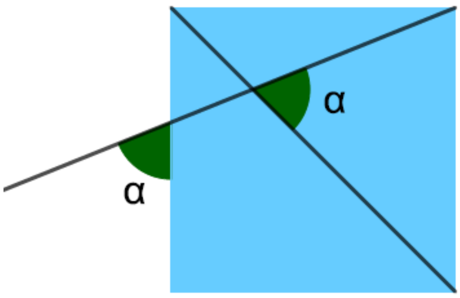
$$\sum_{\text{cifras de N}} = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 7 + 8 \cdot 8 + 9 \cdot 9 = 285$$

Volvemos a sumar las cifras del número obtenido:

$$\sum_{\Sigma_{N^{\cdot}}} = 15$$

Como al dividir 15 entre 9 obtenemos cociente 1 y resto 6, tenemos que el resto de dividir N entre 9 es seis

Enero 31:



En el dibujo tenemos un cuadrado. Hallar el valor de α

Solución: Consideremos el triángulo formado por la diagonal y la recta que pasa por el vértice superior derecho. El ángulo en el vértice de la diagonal mide 45° (pues se trata de un cuadrado). Los otros dos ángulos miden α (por ser opuestos por el vértice). Luego 45° + 2α = 180°. De donde α = 67° 30'