SOLUCIONES FEBRERO 2019

PROBLEMAS PARA BACHILLERATO Y PREPARACIÓN OME

Autor: Colectivo “Concurso de Primavera”. Comunidad de Madrid

Selección del XIX Concurso de Primavera de 2015

https://www.concursoprimavera.es/#concurso

Febrero 1: ¿Cuántos puntos (x, y) con coordenadas enteras tiene la curva $y = \frac{4x+8}{x-4}$?

Solución: Tenemos:

$$y = \frac{4x+8}{x-4} = 4 + \frac{24}{x-4}$$

Para que y sea entero debe cumplirse que x – 4 sea divisor de 24. Como los divisores de 24 son: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±8, ±12 y ±24, tenemos que existen 16 coordenadas enteras en la gráfica de la curva proporcionada.

Febrero 2-3: Un club de montaña organiza en cuatro sábados consecutivos cuatro excursiones teniendo todas la misma tasa de participación, el 80% de los miembros del club. ¿cuál es el menor porcentaje posible de socios que participaron en todas las excursiones?

Solución: Supongamos que el club tiene 100 socios. Como buscamos el porcentaje más bajo posible, hacemos que os participantes repitan lo menos posible. El primer día van 80, el segundo repiten 60 (y los otros 20 que no fueron el primer día), el tercero repiten 40 (más 40 de los que han faltado algún día) y el cuarto repiten 20. Así que el menor porcentaje de socios que han participado en las 4 excursiones es del 20%

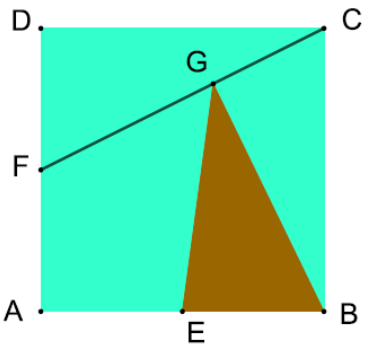
Febrero 4: ¿Hay alguna colección de naturales consecutivos tal que la proporción de números impares en ella sea de 9/20?

Solución: Si la colección tiene un número par de naturales consecutivos hay tantos pares como impares, luego en este caso la proporción de impares es ½ > 9/20. Si la colección tiene un número impar, 2n+1, de naturales consecutivos, el número de impares es n+1 (si la colección empieza por impar) o n (si la colección empieza por par). Si hay n+1 impares la proporción es: $\frac{n+1}{2n+1}$ que en mayor que ½ que, a su vez, es mayor que 9/20. Si hay n impares y exigimos que haya una proporción de 9/20 tenemos

$$\frac{n}{2n+1} = \frac{9}{20} \quad \Rightarrow \quad 2n = 18n + 9$$

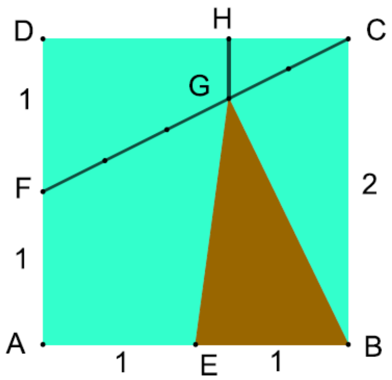
La última igualdad puede leerse par = impar (par + impar), que es un absurdo. Luego no hay ninguna colección de naturales consecutivos con proporción de impares 9/20

Febrero 5-6:



En un cuadrado ABCD, E y F son los puntos medios de los lados AB y AD respectivamente. Se toma el punto G de CF de tal modo que 3·CG = 2·GF. Si el lado del cuadrado es 2, ¿cuál es el área del triángulo ΔBEG?

Solución:



Trazamos por G la perpendicular GH al lado DC. Entonces, obviamente, ΔFDC ≈ ΔGHC (pues están en posición de Tales). De aquí:

$$\frac{1}{\mathrm{GH}} = \frac{5}{2} \Rightarrow \mathrm{GH} = \frac{2}{5}$$

Y la altura del ΔGEB por G es:

$$2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$$

Por último:

$$\mathrm{A}_{\Delta\mathrm{EGB}} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{1 \cdot \frac{8}{5}}{2} = \frac{4}{5}$$

Febrero 7: Hallar el número natural n tal que la suma de todos los naturales menores o iguales a n da un número de tres cifras iguales.

Solución: La suma de los n primeros naturales es $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ que debe ser 111·k. De aquí tendremos:

$$n \cdot (n+1) = k \cdot 111 \cdot 2 = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot k$$

De aquí obtenemos que al ser n y (n+1) naturales consecutivos uno debe ser múltiplo de 6 y el otro múltiplo de 37. Solo es posible n = 36 y n+1 = 37. (La suma de los 36 primeros naturales es 666).

Febrero 8-9: La suma de dos naturales, no necesariamente distintos, es veintiséis. Si añadimos otros dos, la suma pasa a ser cuarenta y uno y, si finalmente, añadimos otros dos a los cuatro existentes, la suma pasa a ser cincuenta y siete. ¿Cuál es el mínimo número de naturales pares que hay entre esos seis naturales?

Solución: Si a y b son los dos naturales iniciales, tenemos que a + b = 26, estos dos números podrían ser los dos impares. Como a + b + c + d = 41, tenemos que c + d = 15, de estos dos uno ha de ser par y el otro impar. Como a + b + c + d + e + f = 57 debe ser e + f = 16 y también pueden ser los dos impares. Por tanto, de entre los seis, al menos uno, debe ser par.

Febrero 10: Al sumar los naturales de 1 a n, ha habido uno que, por error, hemos sumado dos veces. Si la suma obtenida ha sido 857, ¿cuál es el número que hemos repetido?

Solución: Si k (≤ n) es el natural repetido en la suma debe cumplirse:

$$\frac{n(n+1)}{2}+k=857 \quad \equiv \quad n(n+1)+2k=1714 \quad \equiv \quad n^2+n-1714+2k=0 \quad \equiv \quad n = \frac{-1\pm\sqrt{6857-8k}}{2}$$

Como n debe ser natural despreciamos la solución negativa. Como $\sqrt{6857}=82{,}80\ldots$ y $\sqrt{6857-8k}$ debe ser impar (para que al restarle 1 sea divisible por 2 y así n sea natural) (*), el valor mayor que puede tomar el discriminante de la ecuación de segundo grado es 81^2. Con esto:

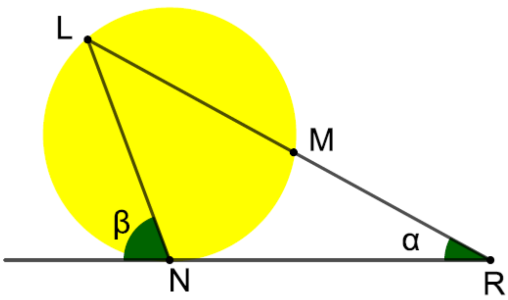
$$6857-8k=81^2 \ \Rightarrow \ \frac{6857-81^2}{8}=k=37 \text{ y } n=\frac{-1+81}{2}=40$$

Y se cumple n ≥ k.

Son posibles otros valores para el discriminante de la ecuación de segundo grado. De hecho, todos los cuadrados de impares menores o iguales a 81, proporcionan valores enteros para n y k pero sólo 81 proporciona valores a n y k que cumplen n ≥ k. Por ejemplo, el valor 79^2 del discriminante proporciona

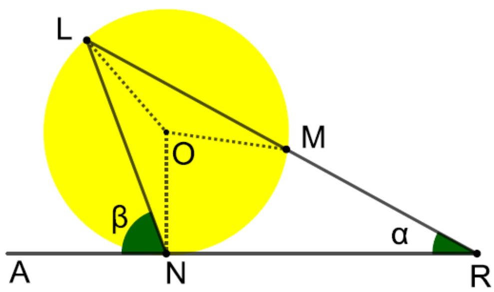
$$6857-8k=79^2 \ \Rightarrow \ \frac{6857-79^2}{8}=k=77 \text{ y } n=\frac{-1+79}{2}=39 \ngeq k=77$$

Febrero 11-12:



La circunferencia de la figura es tangente a NR en N. Las cuerdas LN y LM tienen la misma longitud. Hallar 3β - α

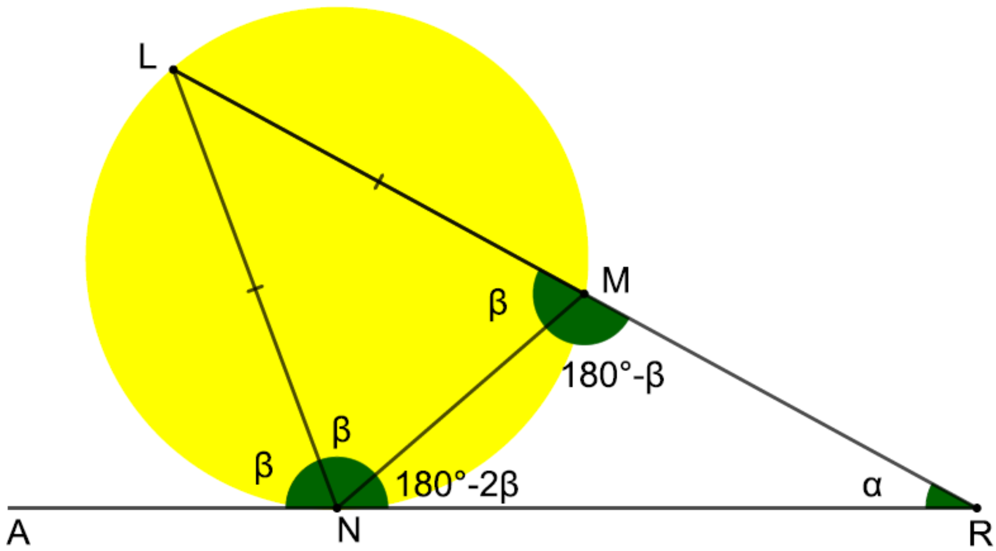
Solución:



Al ser LM = LN, si O es el centro de la circunferencia, resulta que los triángulos ΔOLN y ΔOLM son iguales. Por otra parte ∠ONA = 90°, por lo que ∠ONL =90°-β =∠OLN y ∠NLM = 2·(90°-β) = 180° – 2β. Así pues, los tres ángulos del triángulo ΔLNR miden 180° – 2β, 180° – β y α. Por tanto:

$360° - 3\beta + \alpha = 180° \Rightarrow 3\beta - \alpha = 180°$

Solución de Ignacio Larrosa (@ilarrosac):



En primer lugar $\angle LMN = \angle LNA \Rightarrow \angle LMN = \beta$ (*)

En segundo lugar ΔLNM es isósceles (pues LN = LM) $\Rightarrow \angle LNM = \beta$ (**)

De (*) $\angle NMR = 180° - \beta$. De (**) $\angle MNR = 180° - 2\beta$.

Por último, en ΔNMR la suma de los tres ángulos de un triángulo da 180°

$$180° = 180° - \beta + 180° - 2\beta + \alpha \Rightarrow 3\beta - \alpha = 180°$$

Febrero 13: ¿Cuántas listas de ceros y unos, de longitud 20, tienen todos los ceros consecutivos o todos los unos consecutivos o ambas cosas a la vez?

Solución: Tenemos:

Listas de 20 ceros $\Rightarrow$ una única lista

Listas de 19 ceros y un uno $\Rightarrow$ 20 listas (el 1 en cualquiera de las 20 posiciones posibles)

Listas de 18 ceros y dos unos $\Rightarrow$ (19 + 1 =) 20 listas (los unos juntos en cualesquiera de las 19 posiciones posibles más los unos separados y entre ellos los ceros juntos)

Listas de 17 ceros y tres unos $\Rightarrow$ (18 + 2 =) 20 listas

…….

Listas de 2 ceros y 18 unos $\Rightarrow$ (1 + 19=) 20 listas

Listas de 1 cero y 19 unos $\Rightarrow$ 20 listas

Listas de 20 unos $\Rightarrow$ una única lista.

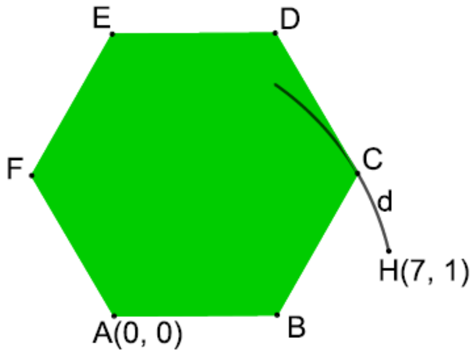
En total $(1 + 19 \cdot 20 + 1 =)$ 382 listas

Febrero 14-15: Lanzamos un dado no cargado con las caras numeradas desde el uno al seis, tres veces consecutivas y resulta que el resultado del tercer lanzamiento coincide con la suma de resultados del primer y segundo lanzamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que el número dos no haya aparecido en ninguno de los tres lanzamientos?

Solución: Hay 15 casos en los que el tercer lanzamiento coincide con la suma del primer y segundo lanzamiento: (1, 1, 2); (1, 2, 3); (2, 1, 3); (1, 3, 4); (3, 1, 4); (2, 2, 4); (2, 3, 5); (3, 2, 5); (1, 4, 5); (4, 1, 5); (2, 4, 6); (4, 2, 6); (1, 5, 6), (5, 1, 6); (3, 3, 6).

En siete de ellos no aparece el 2, luego la probabilidad pedida es 7/15

Febrero 16:



Calcular el área del hexágono regular, siendo d un arco de circunferencia de centro A(0, 0)

Solución: Tenemos:

$$\mathrm{AC} = \mathrm{d(A, C)} = \mathrm{d(A, H)} = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$$

Si x es el lado del hexágono regular, tenemos al aplicar el teorema de los cosenos al triángulo ∆ABC:

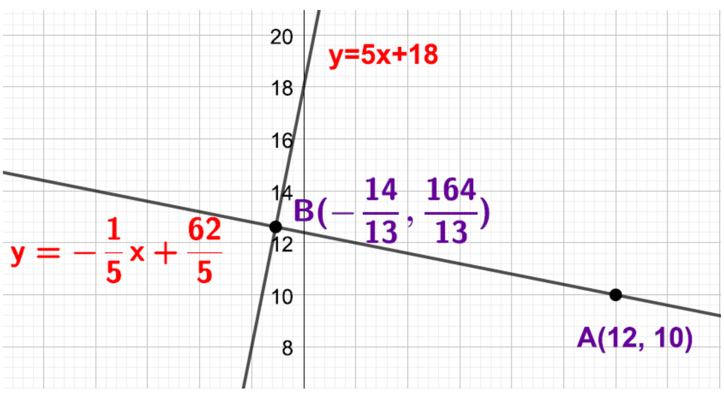
$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2 \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} \cdot \cos \mathrm{B} \quad \Rightarrow 50 = x^2 + x^2 - 2x^2\cos(120°) = 3x^2 \ \Rightarrow \ x = \sqrt{\frac{50}{3}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$$

De aquí:

$$\mathrm{A_{ABCDEF}} = 6 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{\frac{50}{3} \cdot \sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$$

Febrero 17: Hallar el punto de la recta y = 5x + 18 cuya distancia al punto (12, 10) es mínima.

Solución:



En primer lugar (12, 10) no está en la recta y = 5x + 18, pues:

10 ≠ 5·12 + 18 = 78

Calculemos la recta ⊥ a y = 5x + 18 que pasa por (12, 10). Sea y =m x + n la recta buscada, entonces:

$$(m' = 5) \ m \cdot m' = -1 \ \Rightarrow m = -\frac{1}{5}$$

Obligando a que la recta pase por A(12, 10):

$$10 = -\frac{1}{5} \cdot 12 + n \;\Rightarrow\; n = \frac{62}{5}$$

El punto de corte de las dos rectas es:

$$\left.\begin{array}{r} y = 5x + 18 \\ y = -\frac{1}{5}x + \frac{62}{5} \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; 5x + 18 = --\frac{1}{5}x + \frac{62}{5} \;\Rightarrow\; x = -\frac{14}{13} \;\; y = \frac{164}{13}$$

La distancia buscada es:

$$d(A, B) = \sqrt{\left(12 + \frac{14}{13}\right)^2 + \left(10 - \frac{164}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{28900}{169} + \frac{1156}{169}} = \frac{34\sqrt{26}}{13} \approx 13{,}33 \ldots ..$$

Febrero 18: La suma de dieciocho naturales consecutivos es un cuadrado perfecto, ¿cuál es el menor valor posible para esta suma?

Solución: Sean a – 8, a – 7, a – 6,……, a, a + 1, a + 2, ……., a + 9 los dieciocho naturales consecutivos (a > 8). Su suma vale: 18·a + 9 = 9(2·a + 1) que según el enunciado es un cuadrado perfecto. Como 9 lo es, también debe serlo (2·a + 1) y como a > 8, el menor cuadrado posible es 25 (= 2·12 + 1). Luego el menor valor posible buscado es 9·25 = 225.

(Los dieciocho naturales consecutivos son: (a = 12) 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21)

Febrero 19: ¿Para cuántos números reales x se verifica que

$$\sqrt{\mathbf{120 - \sqrt{x}}}$$

es un número entero?

Solución: Buscamos los valores de x que hacen que $120 - \sqrt{x}$ sea un cuadrado perfecto (menores que 120, naturalmente). Como hay 11 cuadrados perfectos menores que 120 (0, 1, 4, 9, ……., 100) hay 11 valore de x que hacen que

$$\sqrt{\mathbf{120 - \sqrt{x}}}$$

sea un entero. Estos 11 valores de x son:

$$120 - \sqrt{x} = 0 \;\Rightarrow\; x = 120^2 = 14400$$

$$120 - \sqrt{x} = 1 \;\Rightarrow\; x = 119^2 = 14161$$

$$120 - \sqrt{x} = 4 \;\Rightarrow\; x = 116^2 = 13456$$

$$120 - \sqrt{x} = 9 \;\Rightarrow\; x = 111^2 = 12321$$

$$120 - \sqrt{x} = 16 \;\Rightarrow\; x = 104^2 = 10816$$

$$120 - \sqrt{x} = 25 \;\Rightarrow\; x = 95^2 = 9025$$

$$120 - \sqrt{x} = 36 \;\Rightarrow\; x = 84^2 = 7056$$

$$120 - \sqrt{x} = 49 \;\Rightarrow\; x = 71^2 = 5041$$

$$120 - \sqrt{x} = 64 \;\Rightarrow\; x = 56^2 = 3136$$

$$120-\sqrt{x}=81 \quad \Rightarrow \quad x=39^2=1521$$

$$120-\sqrt{x}=100 \quad \Rightarrow \quad x=20^2=400$$

Febrero 20-21: ¿Cuántos números N de cuatro cifras verifican que al borrar en N la cifra de las unidades de millar se obtiene otro número de tres cifras que es un noveno de N?

Solución: Si N = $\overline{\mathrm{abcd}}$, el enunciado dice:

$$\overline{\mathrm{bcd}}=\frac{1}{9}\overline{\mathrm{abcd}} \quad \Leftrightarrow \quad 9\cdot\overline{\mathrm{bcd}}=\overline{\mathrm{abcd}} \quad \Leftrightarrow \quad 9(100\mathrm{b}+10\mathrm{c}+\mathrm{d})=1000\mathrm{a}+100\mathrm{b}+10\mathrm{c}+\mathrm{d}$$

Y simplificando:

$$100\mathrm{b}+10\mathrm{c}+\mathrm{d}=125\mathrm{a}$$

Así pues, la cifra a podrá tomar los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7dando lugar a siete números diferentes.

Febrero 22: Si cos x = 0, hallar el menor ángulo z tal que cos (x + z) = 0

Solución: Tenemos:

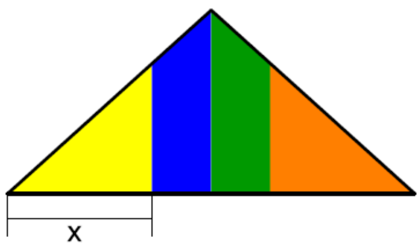
$$\cos x=0 \ \Leftrightarrow \mathrm{x}=\pm\mathrm{k}\frac{\pi}{2}\ (\mathrm{k}\in\mathbb{N}) \ \Rightarrow \ \sin x=\pm 1$$

$$0=\cos(\mathrm{x}+\mathrm{z})=\cos x\cdot\cos z-\sin x\cdot\sin z=-\sin x\cdot\sin z=\mp\sin z$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{z}=0 \quad \mathrm{o} \quad \mathrm{z}=\pm\frac{2\mathrm{k}+1}{2}\pi \ \ (\mathrm{k}\in\mathbb{N})$$

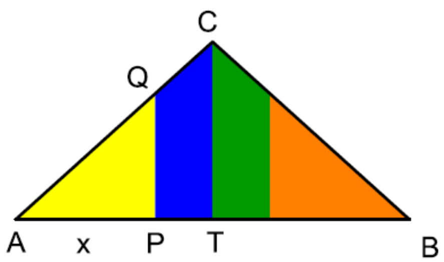
Luego no existe un menor ángulo z que cumpla el enunciado

Febrero 23-24:



En el triángulo isósceles de la figura el lado desigual es 12 y está dividido en cuatro polígonos de igual área por segmentos perpendiculares al lado desigual. Hallar el valor de x

Solución:



Los triángulos ∆APQ y ∆ATC son semejantes pues están en posición de Tales y puesto que el área de uno es el doble de la del otro la razón de proporcionalidad de las áreas es 2, por lo que la razón de semejanza de longitudes es $\sqrt{2}$. Así que:

$$\frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{x}}=\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x}=\frac{\mathrm{AT}}{\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

Febrero 25: Por $\overline{xy}$ designamos al número de dos cifras que tiene x decenas e y unidades. ¿Cuántos números $\overline{ab}$ verifican

$$\mathbf{3 \cdot \overline{ab} < \overline{ba}?}$$

Solución: Lo exigido por el enunciado es equivalente a

$$3(10a + b) < 10b + a \iff 30a + 3b < 10b + a \iff 29a < 7b$$

Como 29·a < 7·9 = 63, debe cumplirse:

$$a < \frac{63}{29} = 2{,}17\ldots \Rightarrow a = 1 \text{ o } a = 2$$

Si a = 1

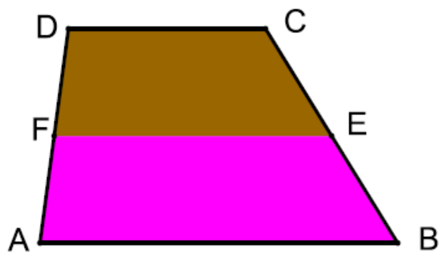
$$29 < 7b \Rightarrow \frac{29}{7} < b \Rightarrow 4{,}1\ldots. < b \Rightarrow b \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

Si a = 2

$$58 < 7b \Rightarrow \frac{58}{7} < b \Rightarrow 8{,}28\ldots. < b \Rightarrow b \in \{9\}$$

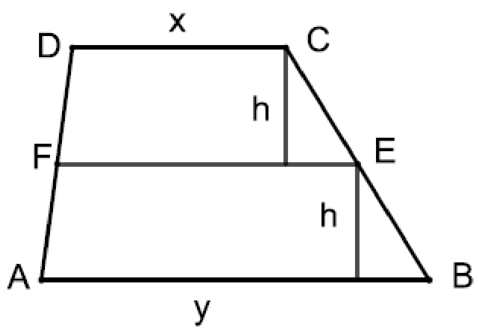
Los números buscados son: 15, 16, 17, 18, 19 y 29. En total seis números.

Febrero 26-27:



En el trapecio ABCD de bases AB y CD, E es el punto medio de BC y F es el punto medio de AD. Si el área del cuadrilátero ABEF es el doble del área del cuadrilátero FECD, hallar el cociente AB/DC

Solución:



En la figura tendremos, que los cuadriláteros ABEF y FECD son trapecios en donde

$$FE = \frac{x + y}{2}$$

Así pues:

$$\frac{y + \frac{x + y}{2}}{2} \cdot h = 2 \cdot \frac{x + \frac{x + y}{2}}{2} \cdot h$$

De donde:

$$y = 5x \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{AB}{DC} = 5$$

Febrero 28: Los naturales a, b y c verifican que a·b·c=240; a·c+b=46 y a+b·c=64; ¿cuál es el valor de a+b+c?

Solución Ignacio Larrosa (@ilarrosac): Tendremos:

$$\left.\begin{array}{r} abc = 240 \\ ac + b = 46 \\ a + bc = 64 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \\ \underset{\cdot b}{\rightarrow} \\ \underset{\cdot a}{\rightarrow} \end{array} \left.\begin{array}{r} abc = 240 \\ acb + b^2 = 46b \\ a^2 + acb = 64a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} b^2 - 46b + 240 = 0 \\ a^2 - 64a + 240 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} b = 40, & b = 6 \\ a = 60, & a = 4 \end{array}$$

Y por último:

a	b	c	
40	60	$\frac{1}{10}$	no
40	4	$\frac{3}{2}$	no
6	60	$\frac{2}{3}$	no
6	4	10	si