# SOLUCIONES MARZO 2019

Problemas para la preparación de la OME (RSEM). Autor: Rafael Martínez Calafat (profesor jubilado)

**<u>Marzo 1-2:</u>**

Si x e y son números reales, hallar el mínimo valor de la expresión:

$$\sqrt{\mathbf{x}^2+\mathbf{4}}+\sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{7})^2+(\mathbf{y}-\mathbf{2})^2}+\sqrt{\mathbf{9}+(\mathbf{y}+\mathbf{1})^2}$$

Resolver en $\mathbb{R}$ : $\mathbf{x^5 - 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x + 12 = 0}$

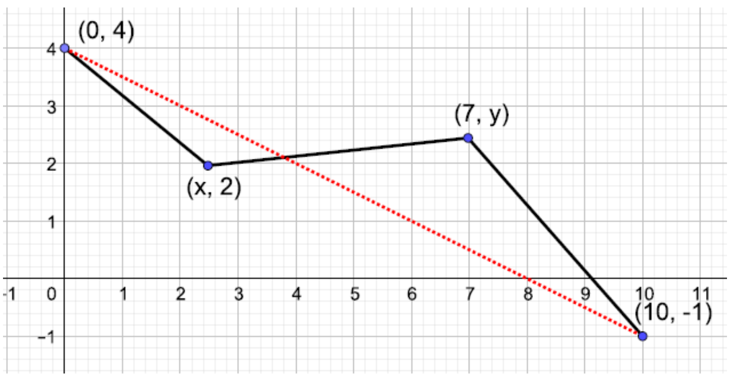
**<u>Solución:</u>** Para la primera parte: Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas. Entonces:

$$\sqrt{x^2+4} = d\big((0,4);\ (x,2)\big)$$

$$\sqrt{(x-7)^2+(y-2)^2} = d\big((x,2);\ (7,y)\big)$$

$$\sqrt{9+(y+1)^2} = d\big((7,y);\ (10,-1)\big)$$

El esquema siguiente, aclara la situación:




La suma de los tres radicales es la longitud de la poligonal. La longitud de la poligonal será mínima cuando los puntos (x, 2) y (7, y) estén sobre la recta que une (0, 4) y (10, – 1). En el dibujo ya se observa que x = 2 e y = ½

La ecuación de la recta que pasa por (0, 4) y (10, – 1) es:

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

Si (x, 2) está sobre esta recta

$$2 = -\frac{1}{2}x + 4 \ \Rightarrow\ x = 4$$

Si (7, y) está sobre esta recta

$$y = -\frac{1}{2}7 + 4 \ \Rightarrow\ y = \frac{1}{2}$$

Para estos valores de x e y la expresión del enunciado es mínima y su valor es

$$d\big((0,4);\ (10,-1)\big) = \sqrt{10^2+5^2} = 5\sqrt{5}$$

Para la segunda parte del enunciado, tenemos: Buscamos factorizar el polinomio expresándolo como producto de polinomios de grado 0, de grado 1 y de grado 2 con el discriminante negativo. Primero intentamos buscar las raíces racionales (recordemos que las posibles raíces racionales son las fracciones a/b donde a (b) son los divisores del término independiente (principal). Como en este caso el término principal es 1 aparecerán las raíces enteras. Buscamos entre los divisores del término independiente (12), es decir entre ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12. El único que cuadra es 3 pues:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -2 & -3 & -2 & 2 & 12 \\ 3 & & 3 & 3 & 0 & -6 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & -2 & -4 & 0 \end{array}$$

Luego:

$$x^5 - 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x + 12 = (x-3)(x^4 + x^3 - 2x - 4)$$

Ahora deberíamos intentar factorizar el polinomio de grado 4. La técnica descrita anteriormente (factorización por Ruffini) no da resultados. Intentamos factorizar el polinomio de grado 4 en dos polinomios de grado 2:

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 - 2x - 4 &= (x^2 + Ax + B)\cdot(x^2 + Cx + D) \\ &= x^4 + (A+C)x^3 + (B + AC + D)x^2 + (B + AD)x + BD \end{aligned}$$

Identificando coeficientes tenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{c} A + C = 1 \\ B + AC + D = 0 \\ B + AD = -2 \\ BD = -4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} C = 1 - A \\ B + A(1-A) + D = 0 \\ B + AD = -2 \\ BD = -4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} B + A - A^2 + D = 0 \\ A = -\dfrac{2+B}{D} \\ BD = -4 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} B - \dfrac{2+B}{D} - \dfrac{4 + 4B + B^2}{D^2} + D = 0 \\ BD = -4 \end{array}\right\} \quad BD^2 - 2D - BD - 4 - 4B - B^2 + D^3 = 0$$

$$-4D - 2D + 4 - 4 - 4B - B^2 + D^3 = 0$$

pues BD = - 4. Además:

$$-6D - 4B - B^2 + D^3 = 0 \quad \Rightarrow \left(B = -\frac{4}{D}\right) - 6D + \frac{16}{D} - \frac{16}{D^2} + D^3 = 0$$

$$D^5 - 6D^3 + 16D - 16 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & -6 & 0 & 16 & -16 \\ 2 & & 2 & 4 & -4 & -8 & 16 \\ \hline & 1 & 2 & -2 & -4 & 8 & 0 \end{array}$$

No necesitamos resolver el sistema sino sólo obtener una solución particular. Por tanto, nos quedamos con D = 2, con lo que B = - 2, A = 0, C = 1, y así:

$$\begin{aligned} x^5 - 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x + 12 &= (x-3)(x^4 + x^3 - 2x - 4) \\ &= (x-3)\cdot(x^2-2)\cdot(x^2+x+2) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 3 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2} \end{array}\right. \end{aligned}$$

**<u>Solución de Ignacio Larrosa (@ilarrosac):</u>**

$$x^5 - 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x + 12 = (x-3)(x^4 + x^3 - 2x - 4)$$

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 - 2x - 4 &= x(x^2-2) + (x^4 - 4) = x(x^2-2) + (x^2-2)\cdot(x^2+2) \\ &= (x^2-2)(x^2+x+2) \end{aligned}$$

**Marzo 3:** Hallar los enteros positivos n, k y p tales que:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{n^2} &= \mathbf{2k+1}\\ \mathbf{n^3} &= \mathbf{3p+2}\end{aligned}\right\}$$

**Solución:** Hallaremos las soluciones de la primera ecuación y luego veremos cuales de ellas cumplen la segunda ecuación. Puesto que las ecuaciones hablan de divisibilidad por 2 y por 3, estudiaremos las congruencias módulo 6

$$n = 0(6) \Rightarrow n^2 = 0(6) \Rightarrow n^2 = 0(2)$$

$$n = 1(6) \Rightarrow n^2 = 1(6) \Rightarrow n^2 = 1(2)$$

$$n = 2(6) \Rightarrow n^2 = 4(6) \Rightarrow n^2 = 0(2)$$

$$n = 3(6) \Rightarrow n^2 = 3(6) \Rightarrow n^2 = 1(2)$$

$$n = 4(6) \Rightarrow n^2 = 4(6) \Rightarrow n^2 = 0(2)$$

$$n = 5(6) \Rightarrow n^2 = 1(6) \Rightarrow n^2 = 1(2)$$

Antes de detallar las soluciones para k de la primera ecuación, veamos cuales de los valores hallados para n que son soluciones de la primera ecuación son soluciones de la segunda

$$n = 1(6) \Rightarrow n^3 = 1(6) \Rightarrow n^2 = 1(3) \quad \text{no son soluciones}$$

$$n = 3(6) \Rightarrow n^3 = 3(6) \Rightarrow n^2 = 0(3) \quad \text{no son soluciones}$$

$$n = 5(6) \Rightarrow n^3 = 5(6) \Rightarrow n^2 = 2(3) \quad \text{son soluciones}$$

Luego las soluciones para n de las dos ecuaciones son n = 5(6), es decir n = 6t + 5 con t∈N. Ahora hallemos los valores de k que cumplen la primera y los valores de p que cumplen la segunda

$$n^2 = 2k+1 \Rightarrow k = \frac{n^2-1}{2} = \frac{(6t+5)^2-1}{2} = 18t^2 + 30t + 12$$

$$n^3 = 3p+2 \Rightarrow p = \frac{n^3-2}{3} = \frac{(6t+5)^3-2}{3} = 72t^3 + 180t^2 + 150t + 41$$

Es decir, las soluciones del sistema son:

$$\begin{gathered} t \in \mathbb{N} \\ n = 6t+5 \\ k = 18t^2 + 30t + 12 \\ p = 72t^3 + 180t^2 + 150t + 41 \end{gathered}$$

**Marzo 4:** Consideremos N **=12345678...210720182019**. Hallar el resto de dividir N entre 40

**Solución:** Tenemos 40 = 8·5

Puesto que un número es divisible por 8 sii lo es el número formado por las tres últimas cifras del original, tendremos N = 3(8). Además, N = 4(5) (N es múltiplo de 5 sii termina en 0 o 5). Con ello:

$$N = 8k + 3 = 8(k-1) + 11 = 8(k-2) + 19 = 8(k-2) + 15 + 4$$

Como $N-4=8(k-2)+15$ y N – 4 y 15 son múltiplos de 5, tendremos que 8(k – 2) es múltiplo de 5, es decir: 8(k – 2) =8·5·p. Y por último N = 40·p + 19 ⇒ N = 19(40).

De forma alternativa tenemos:

$$N=5q+4=5(q-1)+9=5(q-2)+14=5(q-3)+16+3$$

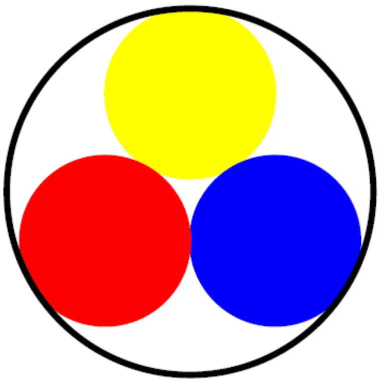
Con ello: $N-3=5(q-3)+16$, como N – 3 y 16 son múltiplos de 8, tendremos que 5(q – 3) es múltiplo de 8, es decir: 5(q – 3) = 5·8·k = 40k. Y por último N = 40k + 19 ⇒ N = 19(40).

**Solución 2:** Como 40 = 5·8 y el carácter de divisible por 5 y por 8 depende de la última y de las tres últimas cifras tendremos

$$2019-19=2000 \text{ es multiplo de 5 y de 8 } \Rightarrow N-19 = 123\ldots\ldots 20182000 \text{ es multiplo de 40}$$

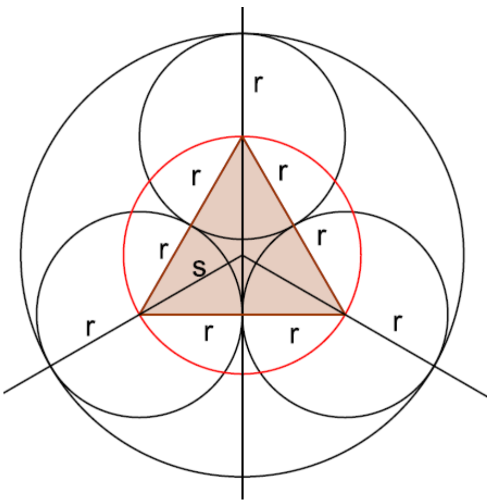
De aquí N – 19 = 40t ⇒ N = 19(40)

**Marzo 5:**



Se tienen tres círculos iguales de radio r tangentes exteriores dos a dos. Calcular el radio del círculo que los circunscribe

**Solución:**



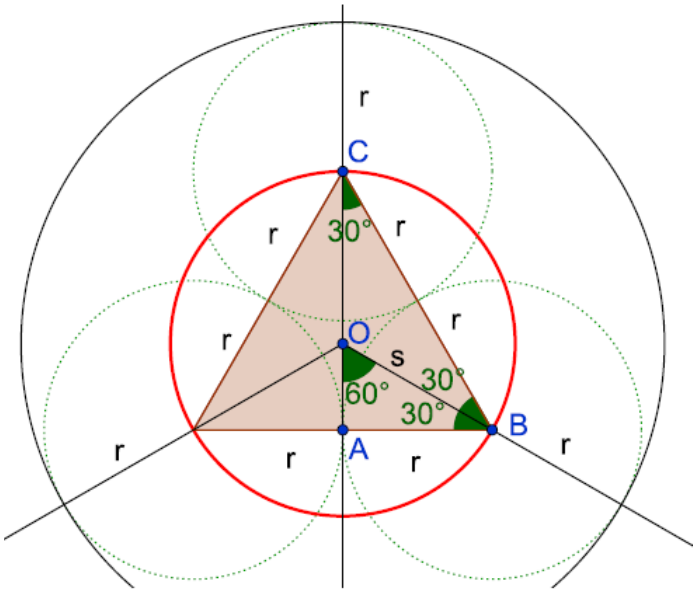

Sea r (R) el radio de las circunferencias interiores (exterior). Tendremos que en el interior de la circunferencia de radio s (= R – r) y mismo centro que la circunferencia exterior, está inscrito un triángulo de lado 2r y entonces:

$$s=\frac{2}{3}\left\{\begin{matrix}\text{altura del}\\ \text{triángulo equilátero}\\ \text{de lado 2r}\end{matrix}\right\}=\frac{2}{3}r\sqrt{3}$$

De donde:

$$R=r+\frac{2}{3}r\sqrt{3}=r\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)$$

**Solución 2:** Con la misma nomenclatura anterior, tenemos:




Tenemos que $\Delta CAB \approx \Delta OAB$ ya que los dos son triángulos 30°-60°-90° y sus lados están en la proporción $1:\sqrt{3}:2$ y de aquí:

$$\frac{2r}{\sqrt{3}r} = \frac{s}{r} \Rightarrow s = \frac{2}{\sqrt{3}}r$$

Y, por último:

$$R = s + r = \frac{2}{\sqrt{3}}r + r$$
$$= \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}r$$

**<u>Marzo 6:</u>** Hallar los enteros positivos que cumplen:

$$x^2+y^2+z^2 = 2xyz$$

**<u>Solución:</u>** Por la desigualdad entre media cuadrática y media geométrica tenemos:

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \sqrt{xyz}$$

Quitando raíces

$$x^2+y^2+z^2 \geq 3xyz > 2xyz$$

Luego no puede haber soluciones positivas.

**<u>Marzo 7:</u>** Demostrar que si m y n no son múltiplos de tres entonces $n^4 + m^4$ no es múltiplo de seis

**<u>Solución:</u>** Si n no es múltiplo de 3 entonces n no da resto 3 al ser dividido por 6, ni es múltiplo de seis, pues si fuese múltiplo de 6 lo sería de 3, y si n = 3(6) entonces n = 6p + 3 = 3 (2p + 1), es decir es múltiplo de 3. Por lo tanto, si n y m no son múltiplos de 3, dan resto 1, 2, 4, 5 al ser divididos por 6.

Por último, tenemos

| n\m | 1(6) | 2(6) | 4(6) | 5(6) |
|---|---|---|---|---|
| 1(6) | 2(6) | 5(6) | 5(6) | 2(6) |
| 2(6) | 5(6) | 2(6) | 2(6) | 2(6) |
| 4(6) | 5(6) | 2(6) | 2(6) | 5(6) |
| 5(6) | 2(6) | 2(6) | 5(6) | 2(6) |

En donde, en cada celda se ha escrito el resultado de la operación $n^4 + m^4$. Por lo tanto, $n^4 + m^4$ no es múltiplo de 6

**<u>Marzo 8:</u>** Resolver en los reales:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{x^2+y^2+xy=1}\\ \mathbf{y^2+z^2+zy=1}\\ \mathbf{x^2+z^2+zx=2}\end{aligned}\right\}$$

**Solución de Ignacio Larrosa (@ilarrosac):** Restando las dos primeras ecuaciones, tenemos:

$$x^2-z^2+xy-zy=0 \;\Rightarrow\; (x+y+z)(x-z)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases}x+y+z=0\\ x=z\end{cases}$$

Si $x+y+z=0$ entonces $y=-(x+z)$ y de la primera ecuación:

$$1=x^2+y^2+xy=x^2+(x+z)^2-x(x+z)=x^2+z^2+xz=\begin{Bmatrix}\text{tercera}\\ \text{ecuación}\end{Bmatrix}=2$$

que es un absurdo.

Si x = z, la primera y la segunda ecuación coinciden y nos queda el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{aligned}x^2+y^2+xy=1\\ x^2+x^2+x^2=2\end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{aligned}x^2+y^2+xy=1\\ x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\end{aligned}\right\}$$

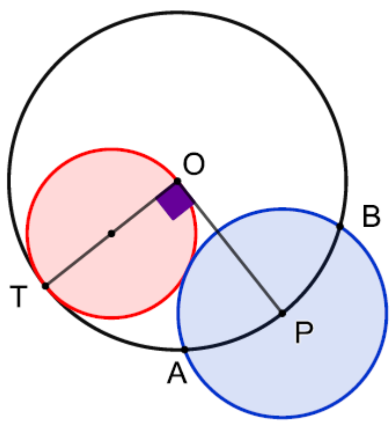
Si $z=x=\sqrt{\frac{2}{3}}$, entonces:

$$\frac{2}{3}+y^2+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y=1 \;\Rightarrow\; 3y^2+\sqrt{6}y-1=0 \;\Rightarrow\; y=-\frac{1\pm\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$$

Si $z=x=-\sqrt{\frac{2}{3}}$, entonces:

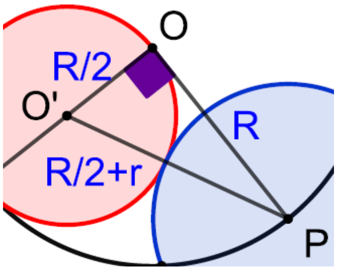
$$\frac{2}{3}+y^2-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y=1 \;\Rightarrow\; 3y^2-\sqrt{6}y-1=0 \;\Rightarrow\; y=\frac{1\pm\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$$

**Marzo 9-10:**



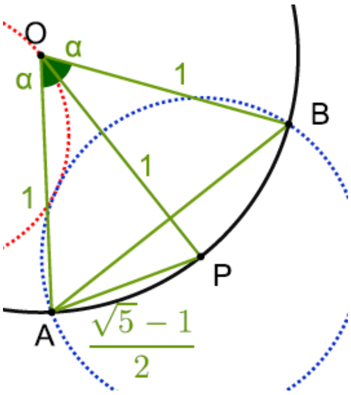

Sea una circunferencia de centro O y radio R. Se dibuja la circunferencia tangente interior a la primera con diámetro R. Se dibuja un radio OP perpendicular al OT. Con centro en P se dibuja una circunferencia tangente exterior a la segunda. Sean A y B los cortes de la primera y tercera circunferencias. Calcular el radio de la tercera circunferencia y demostrar que el lado del pentágono regular inscrito en la primera circunferencia es AB

**Solución:**




Sea O' el centro de la segunda circunferencia. Queda formado el triángulo ΔO'OP rectángulo en O. Aplicando Pitágoras tenemos:

$$\sqrt{\frac{R^2}{4}+R^2}=\frac{R}{2}+r \quad \Rightarrow \quad r=R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$



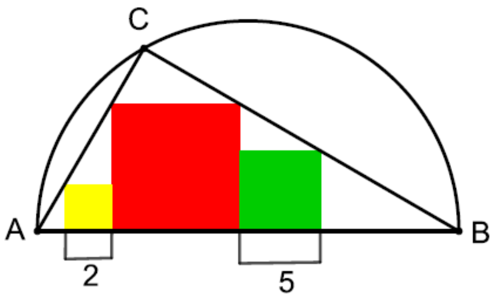

Tomemos R = 1. Aplicando el teorema de los cosenos al triángulo ΔOPA, tenemos:

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2=1^2+1^2-2\cdot 1\cdot 1\cdot \cos\alpha$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha=36° \quad \Rightarrow \quad 2\alpha=72°$$

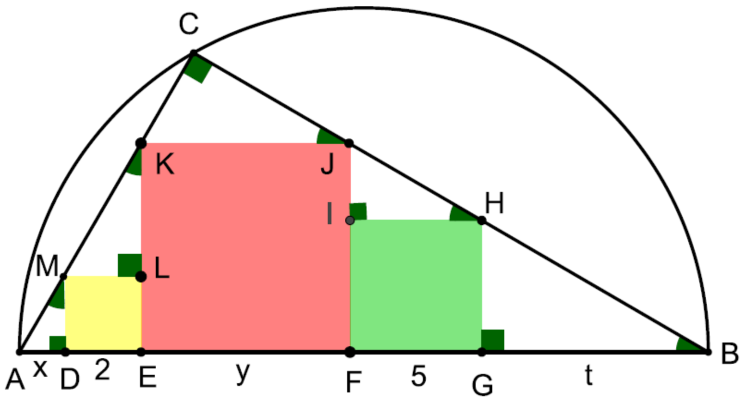
Por lo tanto, AB es el lado de un pentágono regular

**Marzo 11-12:**




Sea AB un arco de circunferencia de diámetro AB. Se coge C sobre el arco y se construye el triángulo ΔABC. Se inscriben dentro del triángulo tres cuadrados, los dos más pequeños de lados 5 y 2 (mirar figura). Hallar el perímetro y área del triángulo ΔABC

**Solución:** En primer lugar, el triángulo ΔABC es rectángulo en C. En segundo lugar, todos los triángulos dibujados sobre los catetos AC y CB son semejantes pues todos tienen un ángulo recto y el ángulo marcado en la figura




Sea x = AD, y = EF y t = GB, Tendremos de la semejanza de triángulos que

$$\frac{x}{2}=\frac{2}{y-2}=\frac{y-5}{5}=\frac{5}{t}$$

De la igualdad central, tenemos:

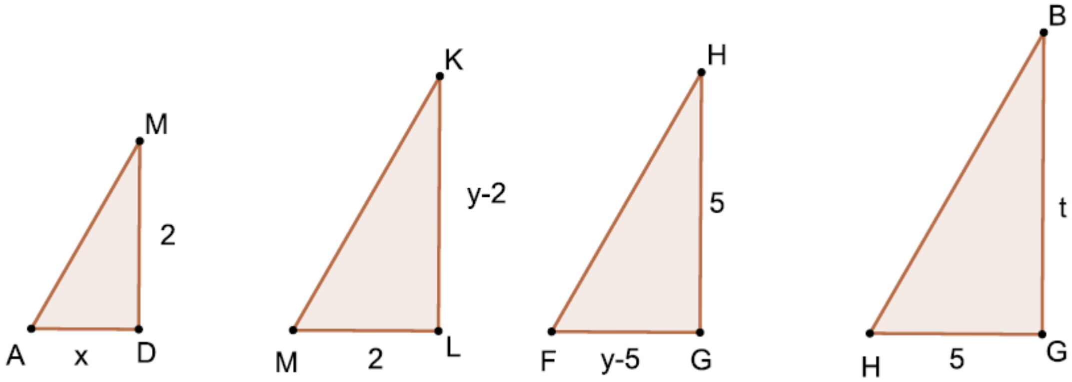
$$10 = (y-5)(y-2) \quad \Rightarrow \quad y = 0\ (\mathrm{No})\ y = 7$$

De la primera igualdad:

$$\frac{x}{2} = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{5}$$

De la última igualdad:

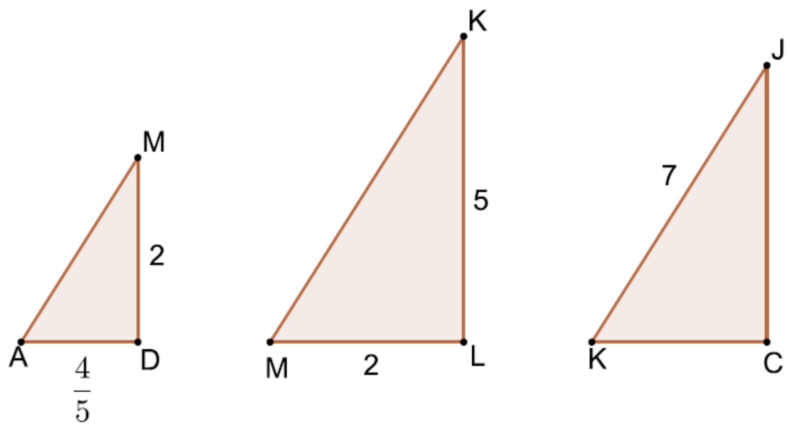
$$\frac{2}{5} = \frac{5}{t} \quad \Rightarrow \ t = \frac{25}{2}$$




Por tanto:

$$AB = \frac{4}{5} + 2 + 7 + 5 + \frac{25}{2} = \frac{273}{10} = 27{,}3$$

Para el cateto AC tenemos:




$$AM = \sqrt{4 + \frac{16}{25}} = \frac{2\sqrt{29}}{5}; \qquad MK = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

De la semejanza de los dos últimos triángulos

$$\frac{KC}{2} = \frac{7}{\sqrt{29}} \quad \Rightarrow \quad KC = \frac{14\sqrt{29}}{29}$$

$$AC = AM + MK + KC = \frac{2\sqrt{29}}{5} + \sqrt{29} + \frac{14\sqrt{29}}{29} = \frac{273\sqrt{29}}{145}$$

Para el cateto CB tenemos:

En el $\Delta$CKJ

$$\mathrm{CJ} = \sqrt{49 - \frac{14^2 \cdot 29}{29^2}} = \frac{35 \cdot \sqrt{29}}{29}$$

En el $\Delta$GHB

$$\mathrm{HB} = \sqrt{25 + \frac{25^2}{4}} = \frac{5\sqrt{29}}{2}$$

$$\mathrm{CB} = \mathrm{CJ} + \mathrm{JH} + \mathrm{HB} = \frac{35 \cdot \sqrt{29}}{29} + \sqrt{29} + \frac{5\sqrt{29}}{2} = \frac{273\sqrt{29}}{58}$$

Por lo tanto:

$$\text{Perímetro} = \frac{273}{10} + \frac{273\sqrt{29}}{145} + \frac{273\sqrt{29}}{58} = \frac{7917 + 1911\sqrt{29}}{290}$$

$$\text{Área} = \frac{\mathrm{AC} \cdot \mathrm{CB}}{2} = \frac{\frac{273\sqrt{29}}{145} \cdot \frac{273\sqrt{29}}{58}}{2} = \frac{74529}{580}$$

**Marzo 13:** Hallar los enteros positivos n, k y p tales que:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{n^2 = 5k + 4} \\ \mathbf{n^3 = 5p + 3} \end{array}\right\}$$

**Solución:** Hallaremos las soluciones de la primera ecuación y luego exigiremos que se cumpla la segunda ecuación. Puesto que las ecuaciones hablan de divisibilidad por 5 consideraremos congruencias módulo 5. Tendremos.

$$\mathrm{n} = 0(5) \;\Rightarrow\; \mathrm{n}^2 = 0(5)$$

$$\mathrm{n} = 1(5) \;\Rightarrow\; \mathrm{n}^2 = 1(5)$$

$$\mathrm{n} = 2(5) \;\Rightarrow\; \mathrm{n}^2 = 4(5)$$

$$\mathrm{n} = 3(5) \;\Rightarrow\; \mathrm{n}^2 = 4(5)$$

$$\mathrm{n} = 4(5) \;\Rightarrow\; \mathrm{n}^2 = 1(5)$$

Luego soluciones de la primera ecuación son.

$$\mathrm{n} = 5\mathrm{t} + 2, \qquad \mathrm{k} = \left(\frac{\mathrm{n}^2 - 4}{5} =\right) 5\mathrm{t}^2 + 4\mathrm{t}, \quad \mathrm{t} \in \mathbb{N}$$

$$\mathrm{n} = 5\mathrm{t} + 3, \qquad \mathrm{k} = \left(\frac{\mathrm{n}^2 - 4}{5} =\right) 5\mathrm{t}^2 + 6\mathrm{t} + 1, \qquad \mathrm{t} \in \mathbb{N}$$

Y ahora veamos cuales de estos valores cumplen la segunda ecuación:

Si n = 5t +2

$$\mathrm{p} = \frac{\mathrm{n}^3 - 3}{5} = \frac{(5\mathrm{t} + 2)^3 - 3}{5} = 25\mathrm{t}^3 + 30\mathrm{t}^2 + 12\mathrm{t} + 1$$

Si n = 5t + 3

$$p = \frac{n^3 - 3}{5} = \frac{(5t+3)^3 - 3}{5} = 25t^3 + 45t^2 + 27t + \frac{24}{5}, \qquad \text{No sol.}$$

Luego las soluciones del sistema considerado son:

$$n = 5t + 2, \qquad k = 5t^2 + 4t, \quad p = 25t^3 + 30t^2 + 12t + 1, \qquad t \in \mathbb{N}$$

**<u>Marzo 14:</u>** Hallar los enteros positivos x, y y z tales que:

$$\mathbf{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1}$$

**<u>Solución:</u>** Si x = y = z entonces

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{z} = 1 \;\; \Rightarrow \;\; x = y = z = 3$$

Si dos incógnitas, pongamos x y z, son iguales, tendremos

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1 \;\; \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{x-2}{x} \;\; \Rightarrow \;\; x = y(x-2) \;\; \Rightarrow \;\; 2y = x(y-1)$$

Por la unicidad de la descomposición factorial en primos tenemos tres posibilidades

$$\begin{cases} x = 1 \;\; \Rightarrow \;\; 2y = y - 1 \;\; \Rightarrow y = -1 \text{ que no es entero positivo} \\ \quad x = 2 \;\; \Rightarrow \;\; y = y - 1 \;\; \Rightarrow \;\; -1 = 0 \;\text{ que es un absurdo} \\ \qquad x = 2y \;\; \Rightarrow \;\; y - 1 = 1 \;\; \Rightarrow \;\; y = 2, \quad\; x = z = 4 \end{cases}$$

Supongamos, para finalizar que $z \neq x \neq y \neq z$ y puesto que ninguno de los tres denominadores puede ser 1 podemos suponer

$$1 < x < y < z \;\; \Rightarrow \;\; \frac{1}{x} > \frac{1}{y} > \frac{1}{z}$$

De aquí:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x} > \left(\frac{1}{x} > \frac{1}{y}\right) \frac{1}{y} + \frac{1}{x} > \left(\frac{1}{y} > \frac{1}{z}\right) \frac{1}{z} + \frac{1}{x} > \left(\frac{1}{x} > \frac{1}{y}\right) \frac{1}{z} + \frac{1}{y}$$

Y de nuevo

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x} > \left(\frac{2}{x} > \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} > \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x} > \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} > \left(\frac{1}{x} > \frac{1}{y}\right) \frac{1}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 1$$

De aquí:

$$\frac{3}{x} > 1 \;\; \Rightarrow \;\; 3 > x$$

Y como x > 1 sólo queda la posibilidad de que x = 2. Por tanto:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$$

Como

$$\frac{1}{y} > \frac{1}{z} \;\; \Rightarrow \left(\frac{1}{y} > \frac{1}{z}\right) \; \frac{2}{y} > \frac{1}{z} + \frac{1}{y} \;\; \Rightarrow \;\; 4 > y$$

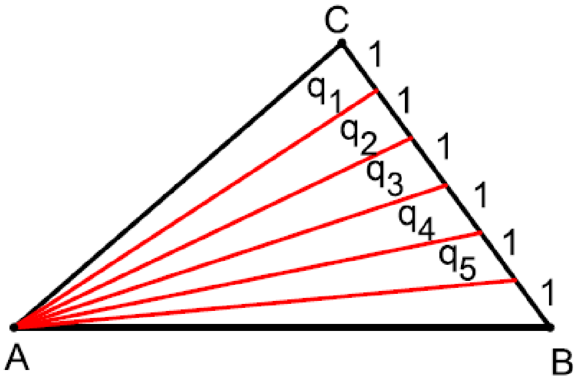
Que junto con (1 < x < y < z) x = 2 < y lleva a que y = 3, que lleva a:

$$\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\right)\ \frac{1}{3}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad z=6$$

En resumidas cuentas, las soluciones de la ecuación planteada son:

$(x,y,z)$
$\in\{(3,3,3);\ (4,4,2);\ (2,4,4);\ (4,2,4);\ (2,3,6);\ (2,6,3);\ (3,2,6);\ (3,6,2);\ (6,2,3);\ (6,3,2)\}$

**Marzo 15-16:**




En el triángulo $\Delta ABC$ tenemos AB = 7, BC = 6 y AC = 5. En el lado CB escogemos cinco puntos equidistantes entre ellos y dibujamos los segmentos $q_j$ tal como indica la figura. Calcular:

$$\mathbf{q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2+q_5^2}$$

**Solución:** Aplicamos reiteradamente el teorema del coseno tomando como ángulo, el ángulo $\angle ACB=\theta$. Tenemos:

$$49=25+36-60\cdot\cos\theta\quad\Rightarrow\quad\cos\theta=\frac{25+36-49}{60}=\frac{1}{5}$$

$$q_1^2=25+1-10\cdot\cos\theta=25+1-10\cdot\frac{1}{5}=24$$

$$q_2^2=25+4-20\cdot\cos\theta=25+4-20\cdot\frac{1}{5}=25$$

$$q_3^2=25+9-30\cdot\cos\theta=25+9-30\cdot\frac{1}{5}=28$$

$$q_4^2=25+16-40\cdot\cos\theta=25+16-40\cdot\frac{1}{5}=33$$

$$q_5^2=25+25-50\cdot\cos\theta=25+25-50\cdot\frac{1}{5}=40$$

Y, por último, sumando:

$$\sum_{i=1}^{5}q_1^2=150$$

**Marzo 17:** ¿Cuántos naturales son menores que el primer número con únicamente dos ochos que es primo?

**Solución:** Los números con sólo dos ochos ordenados de menor a mayor son:

88, 808, 818, ········, 878, 880, 881, 882, 883, ········

De todos ellos, los de color morado terminan en cifra par y por lo tanto no son primos. Como 881 no es divisible por los primos menores o iguales que $\sqrt{881}$ (= 29,68….) tenemos que 881 es primo. Luego hay 880 naturales menores o iguales que el primer número primo con únicamente dos ochos.

**Marzo 18:** Demostrar que si m y n no son múltiplos de 3 entonces **$n^4+m^4+1$** es múltiplo de 3

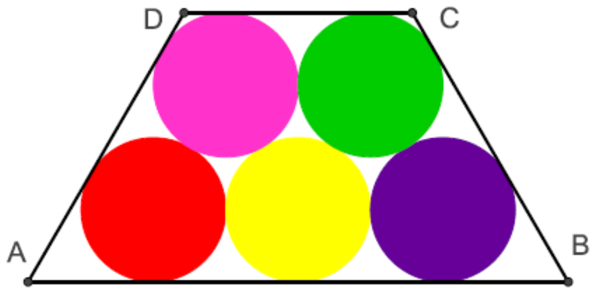
**Solución:** Si n no es múltiplo de 3, tenemos:

$$n = 1(3) \Rightarrow n^2 = 1(3) \Rightarrow n^4 = 1(3)$$
$$n = 2(3) \Rightarrow n^2 = 1(3) \Rightarrow n^4 = 1(3)$$

Luego:

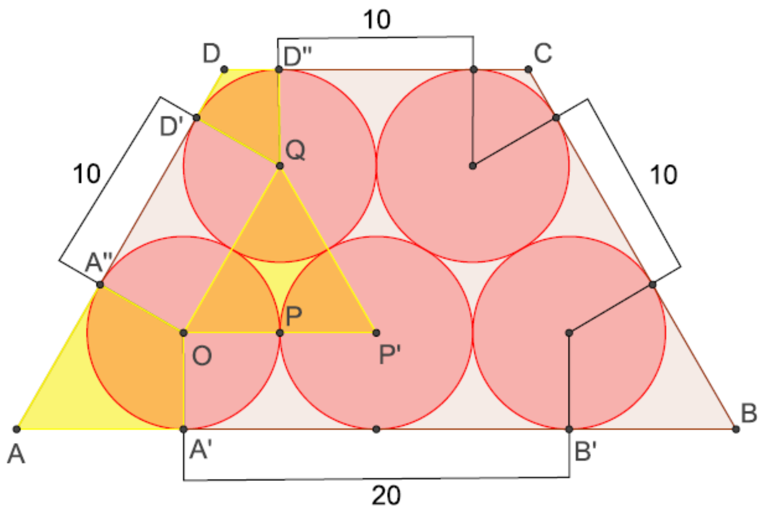
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} n = 1(3) \\ m = 1(3) \end{array}\right\} \Rightarrow n^4 + m^4 = 2(3) \\ \left.\begin{array}{r} n = 1(3) \\ m = 2(3) \end{array}\right\} \Rightarrow n^4 + m^4 = 2(3) \\ \left.\begin{array}{r} n = 2(3) \\ m = 2(3) \end{array}\right\} \Rightarrow n^4 + m^4 = 2(3) \end{array}\right\} \Rightarrow n^4 + m^4 + 1 = 0(3)$$

**Marzo 19-20:**




Cinco círculos de radio cinco son tangentes externos dos a dos, como indica la figura. Calcular el perímetro y área del cuadrilátero ABCD

**Solución:** En primer lugar (por simetría) tendremos que el cuadrilátero es un trapecio isósceles. Además:

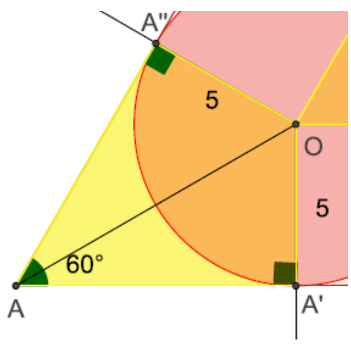



El triángulo ΔOQP' es equilátero de lado (2·5 =) 10, por lo que

OQ = 10

OP = 5

QP = $\sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$

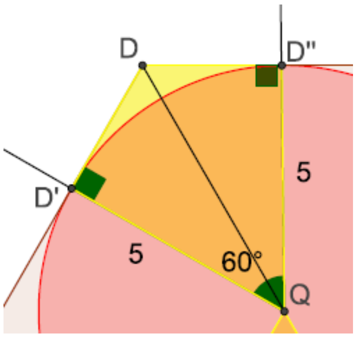



Puesto que A''A//OQ y AA'//OP' y ∠QOP' =60° tendremos que ∠A''AA' = 60°

El segmento OA es la bisectriz pues la distancia de O a la recta AA'' coincide con la distancia entre O y la recta AA'. Por tanto ∠AOA' = 60° y ΔAA'O es un triángulo 30°-60°-90°. De donde

AO = (2·5 =) 10

AA' = AA'' = $5\sqrt{3}$




Puesto que $\angle A''AA' = 60°$ y ABCD es un trapecio isósceles, tendremos que $\angle D'DD'' = 120° \Rightarrow \angle D'QD'' = 60°$.

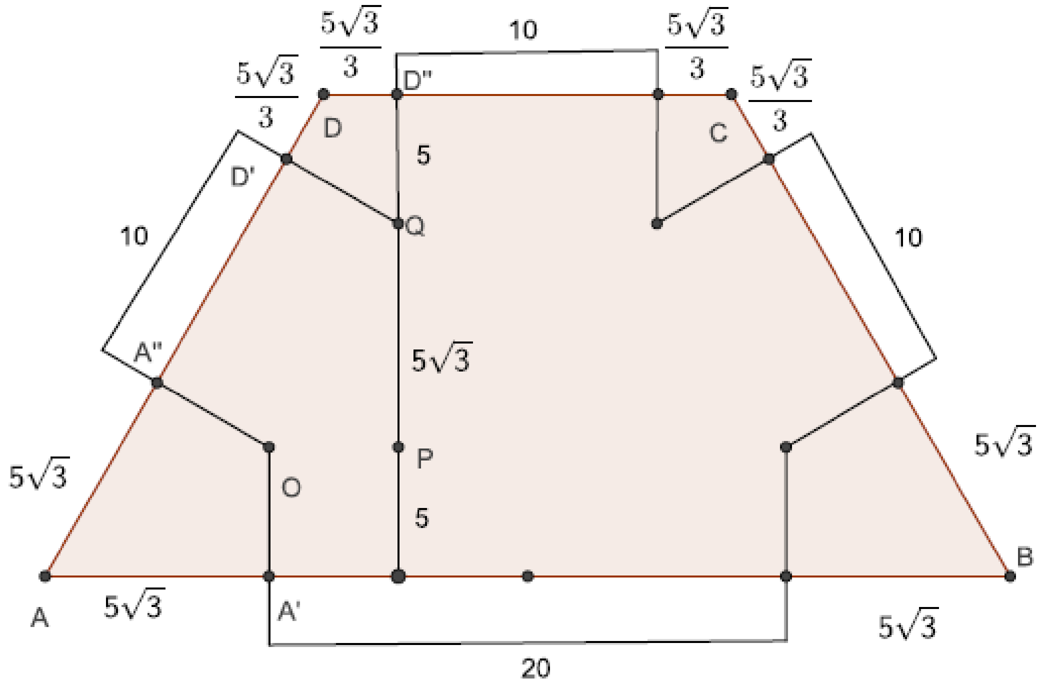
Además, DD’ = DD’’ pues los segmentos que delimitan las dos tangentes a una circunferencia por un mismo punto exterior (D) miden lo mismo. Luego DQ es la bisectriz del ángulo $\angle D'QD'' = 60°$. Luego $\Delta DD'Q$ es un triángulo 30°-60°-90°. Por tanto, $\Delta DD'Q \approx \Delta AA'O$, de donde:

$$\frac{DQ}{10} = \frac{D'D}{5} = \frac{D'Q}{5\sqrt{3}}$$

Por lo tanto:

$$D'D = DD'' = \frac{5\sqrt{3}}{3}, \qquad DQ = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

Por último:




Con lo que:

$$\text{Perímetro} = 2\,\frac{20\sqrt{3}+30}{3} + \frac{30+10\sqrt{3}}{3} + 20 + 10\sqrt{3} = \frac{80\sqrt{3}+150}{3} = 96{,}18802..$$

$$\text{Área} = \frac{20+10\sqrt{3}+\dfrac{30+10\sqrt{3}}{3}}{2}\cdot\left(10+5\sqrt{3}\right) = \frac{1500+850\sqrt{3}}{6} = 495{,}3738\ldots$$

**Marzo 21:** Hallar los enteros positivos que cumplen:

$$\mathbf{a^2 - b = b^2 - a + 2018}$$

**Solución:** Tenemos:

$$a^2 - b^2 = b - a + 2018 \;\;\Rightarrow\;\; (a+b)(a-b) + (a-b) = 2\cdot 1009$$

$$(a+b+1)(a-b) = 2\cdot 1009$$

De la unicidad de la descomposición factorial en números primos y puesto que

$$a - b < a + b + 1$$

caben dos posibilidades:

$$\left.\begin{array}{r} a-b=1 \\ a+b+1=2018 \end{array}\right\} \Rightarrow \ b=1008, a=1009$$

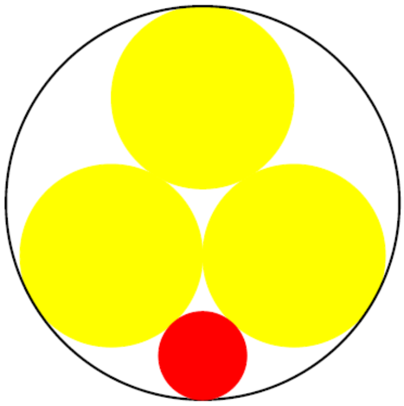
$$\left.\begin{array}{r} a-b=2 \\ a+b+1=1009 \end{array}\right\} \Rightarrow \ b=503, a=505$$

**Marzo 22:** Probar que si n no es múltiplo de cinco entonces **$n^4+4$** es múltiplo de cinco

**Solución:** Puesto que se habla de divisibilidad por 5 estudiamos congruencias módulo 5. Tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} n=1(5) \ \Rightarrow \ n^4=1(5) \\ n=2(5) \ \Rightarrow \ n^4=1(5) \\ n=3(5) \ \Rightarrow \ n^4=1(5) \\ n=4(5) \ \Rightarrow \ n^4=1(5) \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ n^4+4=0(5)$$

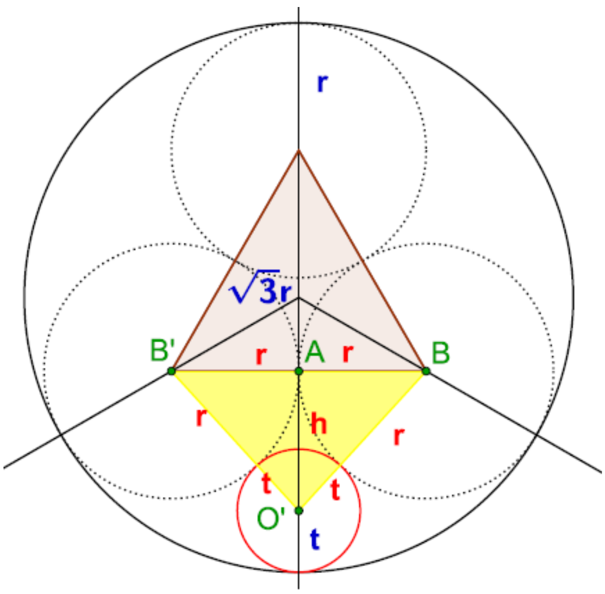
**Marzo 23-24:**



Se tienen tres círculos iguales de radio r tangentes exteriores dos a dos (mirar figura). Sea R el radio de la circunferencia que los circunscribe y t el radio de la circunferencia tangente exterior a dos de los tres círculos iguales y tangente a la circunferencia exterior. Hallar t

**Solución:** La relación existente entre R y r es (ver problema de 5 de marzo)

$$R = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} r$$




Consideremos el triángulo rectángulo (pues ΔBB'O' es isósceles al ser O'B' = O'B = r + t y B'B = 2r) ΔO'AB (rectángulo en A). Como:

$$2R = r + \sqrt{3}r + h + t$$

Tendremos:

$$2\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} r = \left(1+\sqrt{3}\right) r + h + t$$

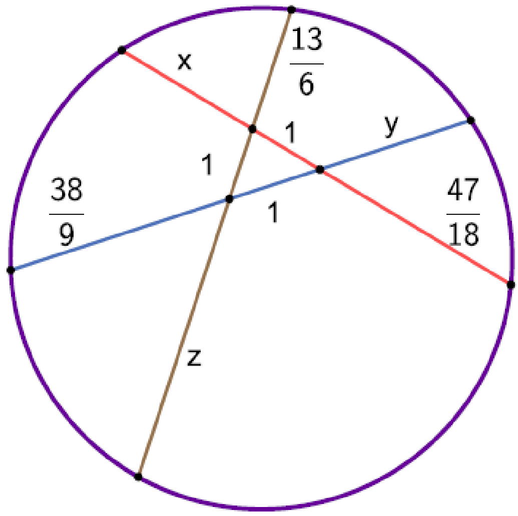
Y al operar:

$$\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} r - t = h$$

También podemos aplicar Pitágoras en ΔAO'B, y entonces:

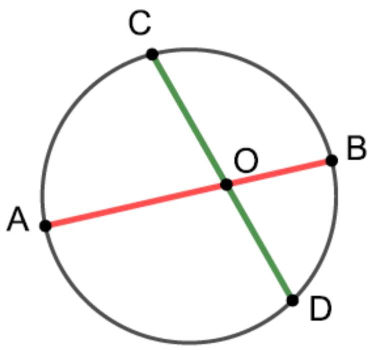
$$\mathrm{h}^2+\mathrm{r}^2=(\mathrm{r}+\mathrm{t})^2 \;\Rightarrow\; \left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\mathrm{r}-\mathrm{t}\right)^2+\mathrm{r}^2=(\mathrm{r}+\mathrm{t})^2 \;\Rightarrow\; \mathrm{t}=\frac{4\sqrt{3}+6}{6+12\sqrt{3}}\mathrm{r} =\frac{9+4\sqrt{3}}{33}\mathrm{r}$$

**Marzo 25-26:**



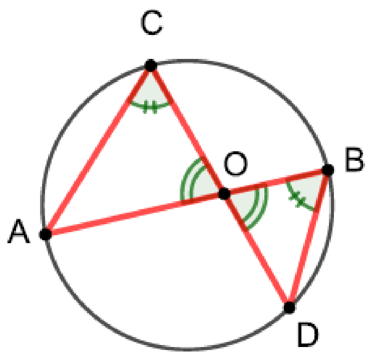

Tres cuerdas de una circunferencia se cortan formando los segmentos cuyas longitudes se detallan en la figura. Calcular las longitudes x, y y z

**Solución:** Aplicaremos el llamado teorema de las cuerdas concurrentes




Lema: Si dos cuerdas, AB y CD, de una misma circunferencia se cortan en O, se tiene que AO·OB = CO·OD

La demostración es bastante simple. Al trazar los segmentos AC y DB quedan formados dos triángulos (ΔCAO y ΔODB) que son semejantes




pues los ángulos en O son iguales por ser opuestos por el vértice y los ángulos en C y B también son iguales (al abarcar los dos el mismo arco: AD). Por tanto:

$$\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{OB}}=\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OD}} \;\Rightarrow\; \mathrm{CO}\cdot\mathrm{OD}=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}$$

Aplicando este resultado a cada punto del triángulo que generan las tres cuerdas concurrentes tenemos:

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{38}{9}(1+y) & = & z\left(\frac{13}{6}+1\right) \\ (x+1)\frac{47}{18} & = & \left(1+\frac{38}{9}\right)y \\ \frac{13}{6}(z+1) & = & x\left(\frac{47}{18}+1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} 152+152y & = & 114z \\ 47x+47 & = & 94y \\ 39z+39 & = & 65x \end{array}\right\} \Rightarrow x=3;\;\; y=2;\;\; z=4$$

**Marzo 27:** Consideremos las colecciones de enteros $a_1$, $a_2$,..., $a_k$ que cumplen las condiciones: el último coincide con 2018, entre dos términos consecutivos ha de haber menos de 125 unidades y el primero es un entero entre -25 y 25. ¿Cuántos múltiplos de 4 contiene la colección que minimiza la suma de todos ellos?

**Solución:** Construiremos la sucesión que minimiza la suma de todos sus términos y luego veremos cuántos múltiplos de 4 contiene. La colección la construimos mediante el proceso de "marcha atrás". Por propia exigencia $a_k$ = 2018, el término anterior a de distar menos de 125 unidades. De todos los números que cumplen esta exigencia es menor es $a_{k-1}$ = (2018 – 124 =) 1894, el anterior ha de distar menos de 125 unidades, de entre todos ellos el que aporta menor suma (el más pequeño) es (1894 – 124 =) 1770. Continuamos de esta manera construyendo la colección. Como al dividir 2018 entre 124 da cociente 16 y resto 34, tendremos que hemos construido una PA de 16 términos que empieza con 16 y termina con 2018 (de diferencia 124). A esta colección hemos de añadirle el primer término pues los construidos hasta ahora no cumplen la última condición. Como queremos que la suma sea mínima elegimos como primer elemento a $a_1$ = – 24. La colección queda pues:

– 24, 34, 158, 282, …….. , 1894, 2018

Con suma

$$\sum = -24 + \frac{34 + 2018}{2} \cdot 16 = 16392$$

Veamos cuántos múltiplos de 4 hay en la colección. Desde luego – 24 es múltiplo de 4. Los demás términos obedecen a la fórmula:

$$a_n = 34 + 124(n-1) = 124n - 90 = 2(2 \cdot 31n - 3^2 \cdot 5)$$

Si suponemos que $2\cdot31n - 3^2\cdot5$ es múltiplo de 2, tendremos que $3^2\cdot5$ es múltiplo de 2, que es un absurdo pues el factor 2 no aparece en su factorización en primos. Es decir, la colección $a_2$, $a_3$, ….. , $a_{16}$ son pares, pero no múltiplos de 4.

En definitiva, en la colección sólo hay un múltiplo de 4

**Marzo 28-29:** Dado un número de tres cifras, M, definimos eli(M) como el número de dos cifras que resulta de eliminar la cifra de las centenas de M (por ejemplo, si M = 347 eli(M) = 47). Hallar los enteros de tres cifras de manera que su eli más diez veces la cifra eliminada es igual al producto de su eli por la cifra eliminada

**Solución:** Si N tiene a x como cifra de las centenas, a y como cifra de las decenas y a z como cifra de las unidades; tendremos que la información del enunciado se transforma en:

$$10x + \mathrm{eli}(N) = x \cdot \mathrm{eli}(N);\ \ (\mathrm{eli}(N) = 10y + z) \Rightarrow 10x + 10y + z = x(10y + z)$$
$$\Rightarrow\ (x-1)\cdot(10y+z) = 2 \cdot 5 \cdot x$$

Y ahora, por la unicidad de la descomposición factorial en números primos, tenemos:

$$x - 1 = 1 \ \Rightarrow\ x = 2 \ \Rightarrow 10y + z = 2 \cdot 5 \cdot 2 = 20 \ \Rightarrow\ y = 2, z = 0$$

$$x - 1 = 2 \ \Rightarrow\ x = 3 \ \Rightarrow 10y + z = 5 \cdot 3 = 15 \ \Rightarrow\ y = 1, z = 5$$

$$x - 1 = 5 \ \Rightarrow\ x = 6 \ \Rightarrow 10y + z = 2 \cdot 6 = 12 \ \Rightarrow\ y = 1, z = 2$$

$$x - 1 = 2x \ \Rightarrow\ x = -1 \ \Rightarrow \text{no solución}$$

$$x - 1 = 5x \;\Rightarrow\; 4x = -1 \;\Rightarrow \text{no solución}$$

$$x - 1 = 10x \;\Rightarrow\; 9\,x = 2 - 1 \;\Rightarrow \text{no solución}$$

Así, que, los números de los que habla el enunciado son: 220, 315 y 612.

**Marzo 30:** Consideremos el número N=12345......201720182019 que tiene ordenados todos los naturales desde el 1 al 2019. Calcular el resto de la división de N entre 24.

**Solución:** Como 24 = $3{\cdot}2^3$ = 3·8, estudiaremos la divisibilidad de N por 3 y por 8. Recordemos que un número es divisible por 8 sii lo es el número formado por las tres últimas cifras del número inicial. Como:

$$123\ldots.20182019 = 123\ldots\ldots20182016 + 3 = 8k + 3$$

Tenemos que N = 3(8). Veamos que N es divisible por 3. Tenemos

$$\sum_{123\ldots.20182019} = \frac{1 + 2019}{2} \cdot 2019 = 1010 \cdot 2019 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 673$$

Por lo que 123 ….. 20182019 es múltiplo de 3. Por último:

$$N = 8k + 3 = 8(k - 1) + 11 = 8(k - 2) + 19 = 8(k - 3) + 27$$

Como N es múltiplo de 3 y 27 es múltiplo de 3, tendremos que 8(k – 3) es múltiplo de 3, es decir 8(k – 3) = 8·3·P' y entonces:

$$N = 8(k - 3) + 27 = 24 \cdot P' + 24 + 3 = 24(P' + 1) + 3$$

Es decir: N = 3(24).

**Marzo 31:** Hallar los enteros positivos que cumplen:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{m^2} &= \mathbf{8k} \\ \mathbf{m^3} &= \mathbf{8p} \end{aligned}\right\}$$

**Solución:** Hallaremos los m, k que cumplen la primera ecuación y luego exigiremos que se cumpla la segunda ecuación. Puesto que las ecuaciones hablan de múltiplos de 8 utilizaremos congruencias módulo 8. Tenemos:

$$m = 0(8) \;\Rightarrow\; m^2 = 0(8)$$

$$m = 1(8) \;\Rightarrow\; m^2 = 1(8)$$

$$m = 2(8) \;\Rightarrow\; m^2 = 4(8)$$

$$m = 3(8) \;\Rightarrow\; m^2 = 1(8)$$

$$m = 4(8) \;\Rightarrow\; m^2 = 0(8)$$

$$m = 5(8) \;\Rightarrow\; m^2 = 1(8)$$

$$m = 6(8) \;\Rightarrow\; m^2 = 4(8)$$

$$m = 7(8) \;\Rightarrow\; m^2 = 1(8)$$

Luego las soluciones de la primera ecuación son:

$$m = 8t, k = 8t^2, m = 8t + 4, k = 8t^2 + 8t + 2 \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{N}$$

Y ahora exigimos que estas verifiquen la segunda ecuación.

$$\text{Si } m = 8t \;\Rightarrow\; m^3 = 8^3t^3 = 8 \cdot 64t^3 = \{p = 64t^3\} = 8p$$

$$\text{Si } m = 8t + 4 \quad \Rightarrow \quad m^3 = (8t+4)^3 = 512t^3 + 768t^2 + 384t + 64$$
$$= 8 \cdot (64t^3 + 96t^2 + 48t + 8) = 8p$$

Es decir, las soluciones del sistema son:

$$m = 8t, k = 8t^2, p = 64t^3 \text{ o } m = 8t + 4, k = 8t^2 + 8t + 2, p$$
$$= 64t^3 + 96t^2 + 48t + 8 \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{N}$$