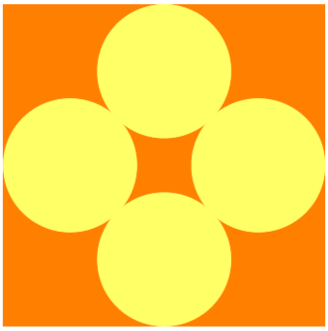
SOLUCIONES ABRIL 2019

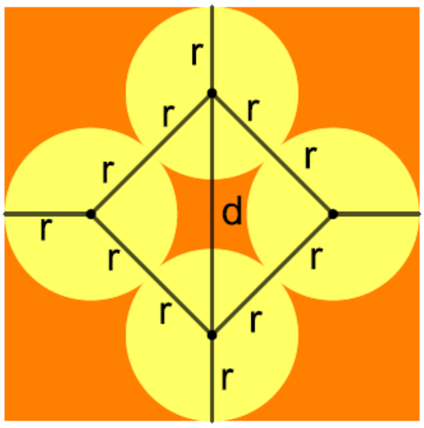
Colección para preparar la Olimpiada de Matemáticas de Secundaria (FESPM) de segundo ciclo de la E.S.O. en 2002 (Autor: José Colón Lacalle. Profesor jubilado)

Abril 1-2:



Una servilleta de 15 cm de lado tiene dibujados cuatro círculos iguales y tangentes entre sí y tangentes a los lados. Si al azar, un mondadientes cae de punta sobre ella, ¿cuál es la probabilidad de que caiga sobre algún círculo?

Solución:



De la figura tenemos:

$$d = \sqrt{4r^2 + 4r^2} = 2r\sqrt{2}$$

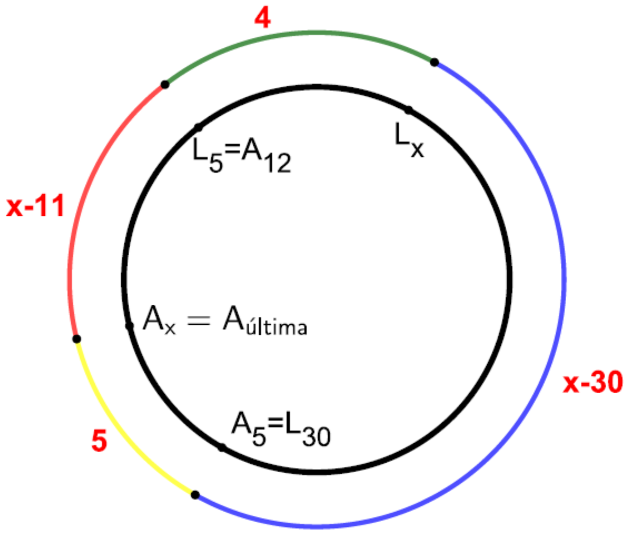
$$15 = 2r + d = 2r\left(\sqrt{2} + 1\right) \;\Rightarrow\; r = \frac{15}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}$$

$$\text{Área círculos} = 4\pi r^2 = \frac{15^2\pi}{3 + 2\sqrt{2}}$$

$$\text{Probabilidad} = \frac{\frac{15^2\pi}{3+2\sqrt{2}}}{15^2} = \frac{\pi}{3+2\sqrt{2}} \approx 0{,}5390$$

Abril 3-4: Alrededor de una plaza existen casas. Laia y Aitana dan una vuelta a la plaza en el mismo sentido y cuentan las casas. Como no comienzan a contar en la misma casa, la quinta casa de Laia es la décimo segunda de Aitana y la quinta casa de Aitana es la trigésima de Laia. ¿Cuántas casas existen alrededor de la plaza?

Solución:



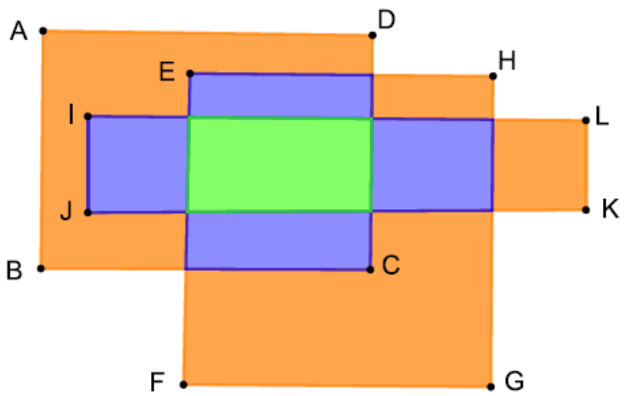
Sea x el número de casas de la plaza. Tenemos el siguiente diagrama de la izquierda. De él:

$$x - 11 + 5 + x - 30 + 4 = x$$

Es decir, x = 32

Abril 5-6: Tres alumnos resuelven cada uno de ellos exactamente sesenta problemas de una lista de cien. Todos los problemas fueron resueltos por al menos uno de los tres. Diremos que un problema es fácil si los tres lo resuelven y que es difícil si sólo uno de los tres lo resuelve. Si d es la cantidad de problemas difíciles y f la de fáciles, hallar d – f

Solución:



Utilizamos el siguiente diagrama de Venn. Los cuadriláteros ABCD, EFGH y IJKL representan los problemas resueltos por cada uno de los alumnos. La zona de color naranja será los problemas considerados difíciles (de área d) (los problemas resueltos únicamente por un alumno).

La zona de color azul será los problemas considerados semidifíciles (de área s) (los problemas resueltos exactamente por dos alumnos). Y la zona verde será los problemas fáciles (de área f) (los resueltos por los tres alumnos). Tendremos:

$$\left.\begin{array}{r} f + d + s = 100 \\ 2s + d + 3f = 60 \cdot 3 \end{array}\right\}$$

Restando la primera ecuación a la segunda, tenemos

$$\left.\begin{array}{r} f + d + s = 100 \\ s + 2f = 80 \end{array}\right\}$$

Y restando a la segunda ecuación la primera: $d - f = 20$

Abril 7-14: Laia va todos los días al trabajo en bicicleta por un camino paralelo a la vía del tren. Lleva una velocidad de 6 km/h y todos los días coincide en un cruce con un tren que lleva su sentido. Cierto día se retrasó 50 minutos con lo que el tren la alcanzó a seis km del cruce. Calcular el tiempo que tarda el tren en llegar al cruce después de sobrepasar a Laia

Solución de Petar P, en aquellos tiempos alumna de tercero de E.S.O. en el IES "Almadraba" de Tarifa (Cádiz): Cuando el tren llega a 6 km antes del cruce, lo podemos parar 50 minutos, para que así Laia avance lo que se ha dormido. Así en los 50 minutos justos Laia va a estar 10 minutos (1 km) antes del cruce. Pongamos otra vez en marcha el tren que la alcanza en el cruce en esos 10 minutos.

Abril 8-15: Para obtener el orden de exposición de un trabajo a toda la clase se prepara una bolsa con dos bolas negras y una bola blanca. Tres alumnos van sacando, por orden, una bola que no devuelven, quien saque la bola blanca empieza. ¿Quién tiene más probabilidad de empezar la exposición?

Solución: Tenemos:

P (gane el primero) = P (extraer bola blanca) = $\frac{1}{3}$

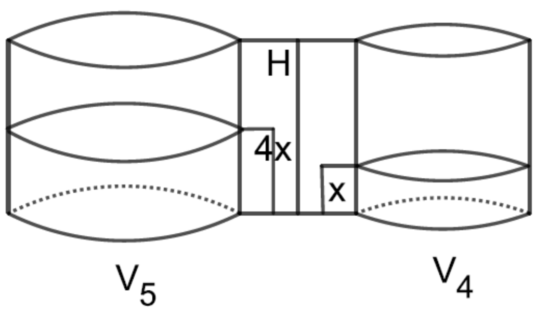
P (gane el segundo) = P (el primero extraer bola negra y el segundo bola blanca) = $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

P (gane el tercero) = P (el primero extraer bola negra y el segundo bola blanca) = $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

Luego el procedimiento es equitativo.

Abril 9-10: Ayer por la noche, mientras estudiaba, se fue la luz. Inmediatamente encendí dos cirios y seguí trabajando hasta que arreglaron la avería. Al día siguiente quise averiguar cuanto duró el apagón, pero no sabía cuándo empezó, ni cuándo terminó. Solamente recuerdo que el primer cirio duraba cinco horas y el segundo cuatro. ¿Cuánto duró el apagón si el primer cirio se había quedado cuatro veces más largo que el segundo?

Solución:



La función que da la altura del cirio después de t horas es:

$$V_5 = H\left(\frac{5-t}{5}\right); \quad V_4 = H\left(\frac{4-t}{4}\right)$$

Cuando termina el apagón la altura de la V_5 es cuatro veces la altura del cirio V_4, es decir:

$$V_5 = 4V_4 \Rightarrow H\left(\frac{5-t}{5}\right) = 4H\left(\frac{4-t}{4}\right) \Rightarrow (5-t) = 5(4-t) \Rightarrow t = 3{,}75 \text{ h} = 3\text{h } 45\text{m}$$

Abril 11-12: Una cuadrilla de pintores tenía que pintar dos paredes, una de doble superficie que la otra. Toda la cuadrilla estuvo pintando la pared grande durante cuatro horas. Después la mitad de la cuadrilla pinto en la pared pequeña y la otra mitad en la pared grande durante otras cuatro horas. Al finalizar la jornada sólo les quedó un poco por pintar de la pared pequeña, para la cual sólo fue necesario un pintor durante ocho horas. ¿Cuántas personas componen la cuadrilla?

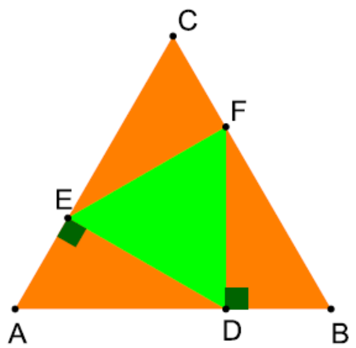
Solución: Sea x el número de pintores de la cuadrilla, S_1 (S_2) la superficie de la pared grande (pequeña). Tenemos: $S_1 = 2 \cdot S_2$ (*).

Por otra parte, la pared grande necesita x pintores durante 4 horas más x/2 pintores durante otras 4 horas, haciendo un total de 6x horas. La pared pequeña necesita x/2 pintores durante 4 horas más 1 pintor durante 8 horas, haciendo un total de 2x + 8 horas.

Recordando (*), tenemos:

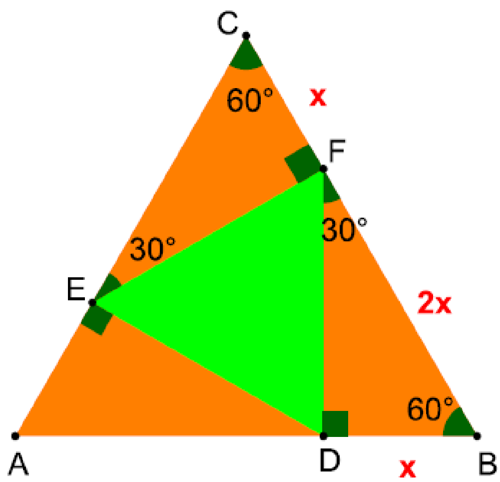
$$6x = 2 \cdot (2x + 8) \quad \Rightarrow \quad x = 8$$

Abril 13-20:



Tenemos un triángulo equilátero ΔABC de lado 6 cm. Inscribimos en él un nuevo triángulo equilátero ΔDEF de modo que DE es perpendicular a AC, EF es perpendicular a BC y FD es perpendicular a AB. Hallar la longitud del lado del triángulo ΔDEF

Solución:



Los ángulos en A, B y C son de 60°. Por lo tanto, el ángulo en F (en ΔFDB) es de 30° y el ángulo en E (en ΔCEF) es de 30°. Por tanto, ΔCEF y ΔFDB son iguales (EF = FD) y son triángulos 30°-60°-90°, de donde el cateto pequeño es la mitad de la hipotenusa. De aquí:

$$x + 2x = 3x = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

Aplicando Pitágoras al ΔDFB, tenemos:

$$\text{lado} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Abril 16-17: Un orador habló durante sesenta minutos a un auditorio lleno. El 20% de la audiencia oyó todo el discurso y el 10% se durmió durante todo el discurso. La mitad de los oyentes restantes oyó la tercera parte del discurso y la otra mitad de los oyentes restantes oyó las dos terceras partes del discurso. ¿Cuál es el número promedio de minutos del discurso que los miembros de la audiencia oyeron?

Solución: Calcularemos la proporción de sujetos de cada grupo y el tiempo que estuvieron escuchando al orador cada grupo. Según el enunciado:

El 20% oyeron todo el discurso $\Rightarrow\ \mathrm{p}_1 = 0{,}2;\ \ \mathrm{t}_1 = 60\ \mathrm{m}$

El 10% se durmieron durante todo el discurso $\Rightarrow\ \mathrm{p}_2 = 0{,}1;\ \ \mathrm{t}_2 = 0\ \mathrm{m}$

El 35% oyeron una tercera parte del discurso $\Rightarrow\ \mathrm{p}_3 = 0{,}35;\ \ \mathrm{t}_3 = \left(\frac{1}{3}\cdot 60 =\right) 20\ \mathrm{m}$

El 35% oyeron dos terceras partes del discurso $\Rightarrow\ \mathrm{p}_4 = 0{,}35;\ \ t_4 = \left(\frac{2}{3}\cdot 60 =\right) 40\ \mathrm{m}$

Por lo tanto, la media resulta ser:

$$\mathrm{media} = 0{,}2\cdot 60 + 0{,}1\cdot 0 + 0{,}35\cdot 20 + 0{,}35\cdot 40 = 33\ \mathrm{minutos}$$

Abril 18-19: Cuatro vasos, suficientemente grandes, contienen el mismo volumen de líquido. El primer vaso contiene café solo y los otros tres sólo leche. Se vierte la cuarta parte del contenido del primer vaso en el segundo. Se hace la mezcla homogénea y, a continuación, se vierte la cuarta parte del contenido del segundo en el tercero. Se hace la mezcla homogénea y se vierte la cuarta parte del contenido en el último vaso. ¿Cuál es la razón entre los volúmenes de café y leche en este cuarto vaso?

Solución: Tomamos como unidad de volumen, el volumen de líquido de cada uno de los cuatro vasos. Al hacer el trasvase entre el primer y el segundo vaso tenemos que el volumen del segundo vaso pasa a ser de $\frac{5}{4}$ siendo $\frac{1}{4}$ de café y 1 de leche. Un cuarto de esta mezcla contendrá $\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} =\right)\frac{1}{16}$ de café y $\left(\frac{1}{4}\cdot 1 =\right)\frac{1}{4}$ de leche. Al trasvasar esta cantidad de líquido al tercer vaso tendremos que el tercer vaso contendrá un volumen de $\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16} =\right)\frac{21}{16}$ unidades de volumen, de los cuales $\frac{1}{16}$ es de café y el resto $\left(\frac{5}{4}\right)$ de leche. Un cuarto de esta mezcla contendrá $\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16} =\right)\frac{1}{64}$ de café y $\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{4} =\right)\frac{5}{16}$ de leche. Al trasvasar esta cantidad de mezcla al cuarto vaso tendremos que el cuarto vaso contendrá un volumen de $\left(1+\frac{5}{16}+\frac{1}{64} =\right)\frac{85}{64}$ de los cuales $\frac{1}{64}$ son de café y $\left(1+\frac{5}{16} =\right)\frac{21}{16}$ son de leche. Por tanto, la razón entre los volúmenes de café y leche en este cuarto vaso es:

$$\frac{\text{volumen de café}}{\text{volumen de leche}} = \frac{\frac{1}{64}}{\frac{21}{16}} = \frac{1}{84}$$

Es decir, hay una parte de café por cada 84 partes de leche.

Abril 21-28: Un condenado quedará en libertad cuando alcance el final de una escalera de 100 escalones. Pero no puede avanzar a su antojo, puesto que está obligado a subir un solo escalón cada día de los meses impares y a bajar un escalón cada día de los meses pares. Comienza el 1 de enero de 2001. ¿Qué día quedará en libertad?

Solución de Mohamed Blanca, en aquellos tiempos alumno de 4 ESO en el I.E.S. "Ausiàs March" (Manises-València): Analicemos mes a mes el primer año:

mes	escalones	Total
Enero	+ 31	+31
Febrero	-28	3
Marzo	+31	34
Abril	-30	5
Mayo	+31	35
Junio	-30	5
Julio	+31	36
Agosto	-31	5
Septiembre	+30	35
Octubre	-31	4
Noviembre	+30	34
Diciembre	-31	3

Y lo mismo ocurrirá en cada año no bisiesto, cada año no bisiesto subirá en total 3 escalones, alcanzando un máximo de 36 en julio. En los años bisiestos subirá un escalón menos totalizando 2 en total y alcanzando un máximo de 35 en julio. Por lo tanto tendremos:

Periodo	Escalones	total
2001-2004	+11	11
2005-2008	+11	22
2009-2012	+11	33
2013-2016	+11	44
2017-2020	+11	55
2021-2024	+11	66

Analicemos con detalle que pasa en el último periodo, pues si en algún día de ese periodo se llega a tener 64 escalones puede (al añadirse el máximo anual: 36) alcanzar el escalón 100

Año	Escalones	Total
2021	+3	58
2022	+3	61

2023	+3	64

Al año siguiente, 2024, que es bisiesto no se alcanzan los 100 escalones pues en los años bisiestos el máximo que se alcanza es 35, con lo que se llegaría al escalón 99. Por lo tanto, llegará al final de la escalera al siguiente año al alcanzar por primera vez un total de 34. El preso conseguirá su libertad el 31 de marzo de 2025.

Abril 22-23: Si se escribe la edad de Laia y a continuación la edad de Aitana se obtiene un número de cuatro cifras que es un cuadrado perfecto. Si se hiciera lo mismo dentro de once años, se tendría de nuevo un cuadrado perfecto de cuatro cifras. Calcular las edades actuales de Laia y Aitana.

Solución de Nèstor Abad (@nabadvin): Sea $\overline{\mathrm{ab}} = 10\mathrm{a} + \mathrm{b}$ la edad de Laia y $\overline{\mathrm{cd}} = 10\mathrm{c} + \mathrm{d}$ la edad de Aitana. Las edades, concatenadas, son un cuadrado perfecto, es decir:

$$\overline{\mathrm{abcd}} = 1000\mathrm{a} + 100\mathrm{b} + 10\mathrm{c} + \mathrm{d} = \mathrm{n}^2$$

Según el enunciado, dentro de 11 años ocurrirá lo mismo, es decir:

$$100(10\mathrm{a} + \mathrm{b} + 11) + 10\mathrm{c} + \mathrm{d} + 11 = \mathrm{m}^2$$

$$1000\mathrm{a} + 100\mathrm{b} + 1100 + 10\mathrm{c} + \mathrm{d} + 11 = 1000\mathrm{a} + 100\mathrm{b} + 10\mathrm{c} + \mathrm{d} + 1111 = \mathrm{m}^2$$

De donde:

$$1111 = \mathrm{m}^2 - \mathrm{n}^2 = (\mathrm{m} + \mathrm{n}) \cdot (\mathrm{m} - \mathrm{n}) = 11 \cdot 101$$

Por la unicidad de la descomposición factorial en números primos y puesto que, también, m + n > m – n, debe cumplirse:

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{m} - \mathrm{n} = 11 \\ \mathrm{m} + \mathrm{n} = 101 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{m} = 56, \mathrm{n} = 45$$

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{m} - \mathrm{n} = 1 \\ \mathrm{m} + \mathrm{n} = 1111 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{m} = 556, \mathrm{n} = 555, \qquad \text{no solución}$$

Luego la edad de Laia es 20 y la edad de Aitana es 25 pues $45^2 = 2025$

Abril 24-25: Aitana, Laia, Carles, Dani, Clara y Ferran son coleccionistas de cuadros y dos de ellos son hermanos. Un día fueron juntos a una exposición y compraron de la siguiente forma: Aitana compró un cuadro, Laia dos, Carles tres, Dani cuatro, Clara cinco y Ferran seis. Los dos hermanos pagaron igual cantidad de dinero por cada uno de los cuadros que compraron. Los demás del grupo pagaron el doble por cada cuadro de los que pagaron los hermanos. En total pagaron cien mil euros. El precio de cada cuadro es un número entero de euros. ¿Quiénes son hermanos?

Solución: Sea y = número total de cuadros comprados por los dos hermanos, z = número total de cuadros comprados por los demás y x = precio de cada cuadro comprado por los dos hermanos. Entonces, del enunciado:

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{xy} + 2\mathrm{xz} = 100000 \\ \mathrm{y} + \mathrm{z} = 21 \end{array}\right\}$$

pues 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21. De la segunda ecuación tenemos dos consecuencias: la primera: como (1 +2 =) $3 \le y \le 11$ (= 5 + 6), tenemos que $10 \le z \le 18$. La segunda que y = 21 – z. Y teniendo en cuenta esto último en la primera ecuación:

$$x(21-z)+2xz=100000;\ \ x(21+z)=100000$$

Por lo tanto, 21 + z es un divisor de 100000. En resumen: $10 \le z \le 18$ y 21 + z es un divisor de 100000.

Si z = 10, tenemos que 21 + z = 31 que no es un divisor de 100000. Luego $z \neq 10$.

Si z = 11, tenemos que 21 + z = 32 = 2^5 que es un divisor de 100000. En este caso:

$$x=\frac{100000}{21+z}=\frac{100000}{32}=3125\ y=21-z=21-11=10$$

y como y es suma de dos números de entre 1, 2, 3, 4, 5, 6 solo cabe la posibilidad y = 10 = 6 + 4. Luego Ferran y Dani son los hermanos.

Si z = 12, tenemos que 21 + z = 33 que no es un divisor de 100000. Luego $z \neq 12$.

Si z = 13, tenemos que 21 + z = 34 que no es un divisor de 100000. Luego $z \neq 13$.

Si z = 14, tenemos que 21 + z = 35 = 5·7 que es un divisor de 100000. Pero en este caso:

$$100000=(21+z)x$$

Y como (21 + x) contiene al factor 7, 100000 debe contener el factor 7 que constituye un absurdo. Luego z = 14 no es solución.

Si z = 15, tenemos que 21 + z = 36 que no es un divisor de 100000. Luego $z \neq 15$.

Si z = 16, tenemos que 21 + z = 37 que no es un divisor de 100000. Luego $z \neq 16$.

Si z = 17, tenemos que 21 + z = 38 que no es un divisor de 100000. Luego $z \neq 17$.

Si z = 18, tenemos que 21 + z = 39 que no es un divisor de 100000. Luego $z \neq 18$.

Abril 26-27: La torre Eiffel tiene 300 metros de altura y está construida enteramente de hierro, su peso total es de ocho millones de kilo. Deseo encargar una reproducción exacta y que pese sólo un kilo. ¿Qué altura tendrá?

Solución: Sea M y V (m y v) la masa y el volumen la torre Eiffel (de su reproducción). Puesto que ambas están hechas del mismo material (están hechas con material de la misma densidad) tendremos que:

$$\frac{M}{V}=d=\frac{m}{v}\ \Rightarrow\ \frac{8\cdot 10^6}{V}=\frac{1}{v}\ \Rightarrow 8\cdot 10^6\cdot v=V$$

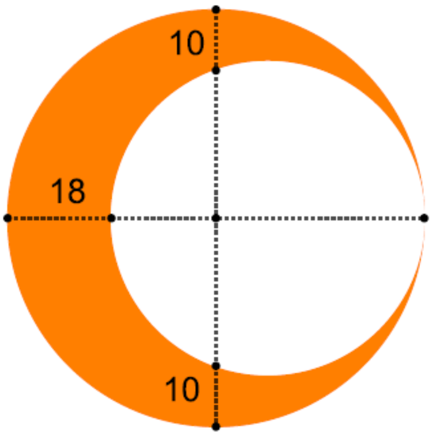
Es decir, la razón de proporcionalidad entre volúmenes es $8\cdot 10^6$. Por tanto, la razón de proporcionalidad entre longitudes será:

$$\sqrt[3]{8\cdot 10^6}=2\cdot 100$$

Es decir, si L (l) es la altura de la torre Eiffel (de su reproducción), tendremos:

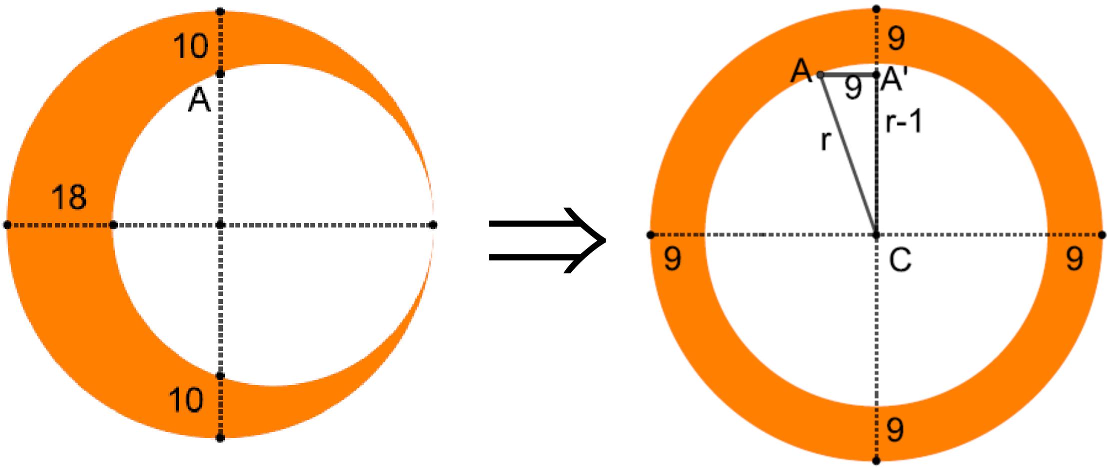
$$2 \cdot 100 \cdot l = L \quad \Rightarrow \quad l = \frac{L}{200} = \frac{300}{200} = 1{,}5 \text{ m}$$

Abril 29-30:



Dos círculos son tangentes interiores como muestra la ilustración. Calcular el área de la zona comprendida entre los dos círculos

Solución: Desplazamos el círculo interior a la izquierda 9 cm, entonces los centros de los dos círculos coincidirán:



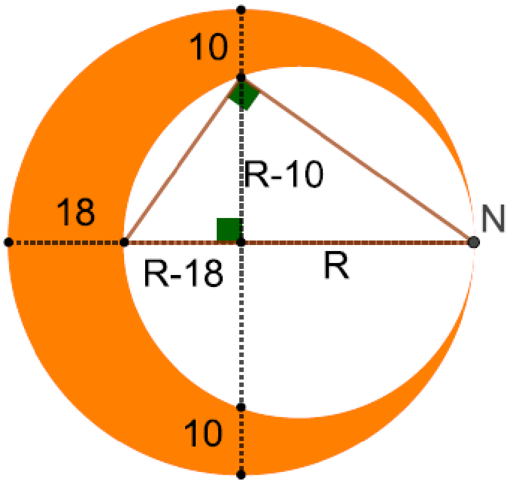
Queda formado el triángulo ΔAA'C, que es rectángulo en A'. Al aplicar Pitágoras, tendremos:

$$(r-1)^2 + 9^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad 82 = 2r \quad \Rightarrow \quad r = 41$$

El área de la corona circular coincide con el área buscada. Por tanto, el área buscada es:

$$\pi(41+9)^2 - \pi 41^2 = \pi(50^2 - 41^2) = 819 \cdot \pi \cong 2572{,}96 \ldots$$

Solución de @asitnof:



Si R (r) es el radio de la circunferencia grande (pequeña) tenemos:

$$\frac{R-10}{R-18}=\frac{R}{R-10} \quad \Rightarrow \quad R=50$$

Por tanto:

$$r=\frac{2\cdot 50-18}{2}=41$$

Y, por último:

$$A=\pi(50^2-41^2)=819\pi$$