SOLUCIONES JUNIO 2019

Problemas para segundo ciclo de la E. S. O. Autores: Colectivo “Concurso de primavera”. Comunidad de Madrid.

https://www.concursoprimavera.es/#libros

Enunciados y soluciones extraídas de XIX Concurso de Primavera de 2015.

Junio 1: Del polinomio $P(x) = x^2 + mx + n$ se sabe que tiene por raíces a a y a 1/a. ¿Cuánto vale P(a + 1/a)?

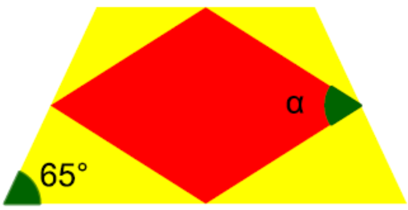
Solución: Dado $P(x) = x^2 + mx + n$ tenemos que la suma de raíces es -m y el producto de raíces es n. Por tanto:

$$P(x) = x^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)x + 1 \Rightarrow P\left(a + \frac{1}{a}\right) = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + 1 = 1$$

Junio 2: Halla el menor natural que es múltiplo de 72 y cuya suma de cifras es 72.

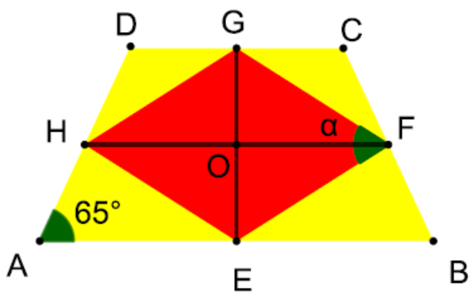
Solución: Como $72 = 8 \cdot 9 = 2^3 \cdot 3^2$, el número buscado debe ser múltiplo de 8 (las tres últimas cifras deben ser un múltiplo de 8) y de 9 (la suma de todas sus cifras ha de ser múltiplo de 9, que lo es). Como buscamos el menor de estos números cuantas más cifras 9 tenga mejor. El menor de los números cuya suma de cifras sea 72 es 99999999. Pero sus tres últimas cifras no son un múltiplo de 8. Como si lo es 888 podríamos sustituir los tres últimos nueves por ochos y para mantener que la suma sea 72 deberíamos añadir un tres. Queda así formado el número solicitado: 399999888.

Junio 3-4:



En un trapecio isósceles con tres lados iguales, inscribimos un rombo cuyos vértices son los puntos medios de los lados del trapecio. Hallar el valor del ángulo α

Solución:



Como el trapecio es isósceles, el ángulo en A y en B mide 65°, por lo que los ángulos en C y D miden 115°. Trazando las diagonales del rombo tenemos:

$$CF = FB = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}DC = GC$$

Por lo que ΔGFC es isósceles. Por tanto, sus ángulos en G y F miden:

$$\frac{180 - 115}{2} = \frac{65^\circ}{2}$$

Finalmente, como ∠OFC = ∠OFG + ∠GFC = ángulo en B (por tener lados paralelos o coincidentes) = 65°, tenemos:

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{65}{2}=65 \quad \Rightarrow \quad \alpha=65°$$

Junio 5: Escribimos los cuadrados de los naturales del 1 al 100: 1, 4, 9, 1, 6, 2, 5, 3, 6, …… ¿Qué cifra estará en la posición 100?

Solución: Hay tres cuadrados de una cifra: 1, 4, 9. Hay seis cuadrados (9 – 3) con dos cifras: 16, 25, 36, 49, 64, 81. Con tres cifras hay (31 – 9 =) 22: 100, 121, 144, 169, … , 900, 961. Para llegar a la posición 100 quedan: 100 – (3 + 2·6 + 3·22) = 100 – 81 = 19 cifras. Estas corresponderían a 4 cuadrados de cuatro cifras (32^2, 33^2, 34^2 y 35^2) y a tres cifras del siguiente cuadrado (36^2 = 1296). Luego la respuesta es 9.

Junio 6: Sean x, y y z reales positivos que verifican

$$\mathbf{x\cdot y=1;\ \ x\cdot z=2;\ \ y\cdot z=8}$$

Hallar $x+y+z$

Solución: Multiplicando miembro a miembro la segunda y tercera ecuación tenemos:

$$x\cdot y\cdot z^2=16$$

Y puesto que (primera ecuación) $x\cdot y=1$, tenemos:

$$z^2=16 \quad \Rightarrow \quad z=\pm 4$$

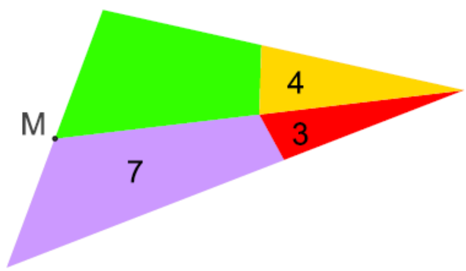
Y puesto que solo interesan soluciones positivas z = 4. Sustituyendo en las dos últimas ecuaciones:

$$4x=2 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{2}$$
$$4y=8 \quad \Rightarrow \quad y=2$$

Por último:

$$x+y+z=\frac{1}{2}+2+4=\frac{13}{2}$$

Junio 7-8:}



En la figura M es el punto medio del lado de un triángulo. Están indicadas las áreas de tres de los cuatro polígonos que forman el triángulo inicial, ¿puedes calcular el área del cuarto polígono?

Solución: La mediatriz divide al triángulo en dos triángulos de igual área (pues los dos tienen la misma base y la misma altura). Como uno de esos triángulos tiene área (7 + 3 =) 10, el otro también ha de tener área 10 (= 4 + x). Luego el área de la zona verde es (10 – 4 =) 6.

Junio 9: ¿Cuántas parejas de naturales de dos cifras verifican que su producto es un número de tres cifras iguales?

Solución: Buscamos a, b, c, d $\in\mathbb{N}$ tales que:

$$(10a+b)\cdot(10c+d)=k\cdot 111=k\cdot 3\cdot 37 \quad \text{con } k\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

Donde 3·k·37 deben agruparse en dos factores de dos cifras cada uno. Por tanto, no pueden darse los valores 1, 2 o 3 a k (pues ello generaría dos factores uno de dos cifras y otro de sólo una). Parece pues que haya seis soluciones (que surgen para k = 4, 5, 6, 7, 8 y 9):

37 y 12 (con producto 444)

37 y 15 (con producto 555)

37 y 18 (con producto 666)

37 y 21 (con producto 777)

37 y 24 (con producto 888)

37 y 27 (con producto 999)

Pero a estas seis soluciones hay que añadir otra que proporciona un producto 888:

37.24 = 37·2·12 = 74·12 (con producto 888)

En total hay siete parejas de números de dos cifras tales que su producto es un número de tres cifras iguales

Junio 10: Si $a_1=1$, $a_2=-1$ y $a_n=a_{n-1}\cdot a_{n-2}$ para todo n posterior a 2, hallar la suma de los 2019 primeros términos de la sucesión.

Solución: La sucesión es: 1, - 1, - 1, 1, - 1, - 1, 1, …….(el periodo 1, - 1, -1 se repite indefinidamente) donde los unos están en las posiciones de los múltiplos de tres. Hasta 2019 hay (2019:3 =) 673 múltiplos de tres, es decir habrá en la sucesión 673 unos y el doble (673·2=) 1346 de – 1. Por tanto, la suma solicitada será 673 – 1346 = - 673.

Junio 11-12: Dos caminantes caminan por terreno llano a 4 km/h cada uno. Al iniciar una prolongada subida el primero le saca 12 km de ventaja al segundo. Si ambos caminan a 3 km/h en la subida, ¿qué distancia separará a los caminantes cuando ambos estén subiendo?

Solución: Cuando el segundo comience la subida habrán pasado tres horas desde que lo hizo el primero. Como el primero sube a 3 km/h, la distancia que hay entre los dos, en ese momento es de (3·3 =) 9 km.

Junio 13: Hallar los reales x tales que

$$\mathbf{x^3 < 64 < x^2}$$

Solución: Tendremos:

$$\mathrm{x}^3 < 64 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{x} < 4 \;\; (*)$$

$$64 < x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\infty;\, -8[\cup]8;\, +\infty[\; (**)$$

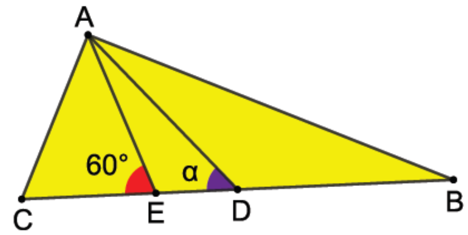
Puesto que deben de verificarse conjuntamente las dos condiciones (*) y (**) debe cumplirse:

$$x < -8 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\infty;\, -8[$$

Junio 14: ¿Cuántos naturales n, menores o iguales a 100 cumplen que n^n sea un cuadrado perfecto?

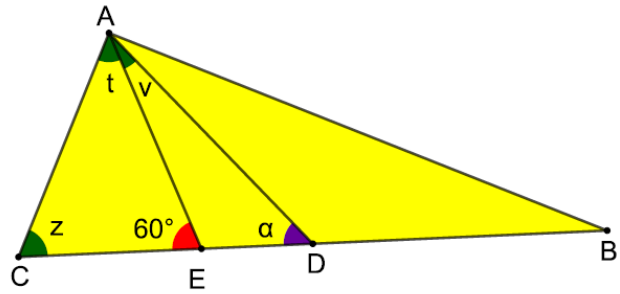
Solución: Si n es par, pongamos, n = 2k, entonces $n^n = (n)^{2k} = (n^k)^2$, por lo tanto, ya hay 50 naturales que cumplen lo exigido. Por otra parte, si n es impar, pongamos n = 2k + 1, tendremos: $n^n = (n)^{2k+1} = (n^k)^2 \cdot n$, por lo que n^n será un cuadrado perfecto sii lo es n, es decir sii n es 1, 9, 25, 49 o 81. En definitiva hay (50 + 5 =) 55 naturales que verifican la condición del enunciado.

Junio 15-16:



En el triángulo ΔABC, D es el punto medio de CB, AD = CD y AE es la bisectriz del ángulo ∠CAB. Si ∠CEA = 60°, ¿cuánto mide el ángulo ∠CDA = α?

Solución:



Sean v = ∠EAD, t = ∠CAE y z = ∠DCA = ∠DAC. Tenemos que CD = AD = DB por lo que ΔDAC y ΔDAB son isósceles. Por tanto ∠DAB = ∠DBA = $\frac{\alpha}{2}$, $t = v + \frac{\alpha}{2}$, $z = v + t$, α + v = 60° y z + t = 120°. La segunda y cuarta ecuación llevan a:

$$t = 60 - \frac{v}{2}$$

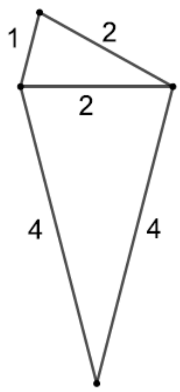
De la primera:

$$60 - \frac{v}{2} = v + \frac{\alpha}{2} \;\Rightarrow\; 2 \cdot 60 = 3v + \alpha \;\Rightarrow (60 = v + \alpha)\; 2 \cdot (v + \alpha) = 3v + \alpha \;\Rightarrow\; \alpha = v$$

Y de la tercera: $\alpha = v = 30°$

Junio 17-18: Las longitudes de dos lados de un cuadrilátero son 1 y 4 cm. Si una de sus diagonales, de longitud 2 cm, divide al cuadrilátero en dos triángulos isósceles, ¿cuál es, en cm, el perímetro del cuadrilátero?

Solución: La única posibilidad es:



Pues las otras posibilidades no generan cuadrilátero al no cumplirse la desigualdad triangular.

Por tanto, el perímetro es (4 + 4 + 1 + 2 =) 11 cm

Junio 19: ¿Cuántas cifras tiene el número **$16^8 \cdot 5^{25}$**?

Solución: Tenemos:

$$16^8 \cdot 5^{25} = (2^4)^8 \cdot 5^{25} = 2^{32} \cdot 5^{25} = (2 \cdot 5)^{25} \cdot 2^7 = 128 \cdot 10^{25}$$

Por lo tanto, el número tiene (3 + 25 =) 28 cifras.

Junio 20: El número 33^{33} lo podemos escribir como suma de 33 impares consecutivos. ¿Cuál es el mayor de todos ellos?

Solución: La suma de 33 impares consecutivos es igual a 33 veces el de en medio. Así el de en medio es:

$$\frac{33^{33}}{33} = 33^{32}$$

y el mayor, que estará 16 lugares mas allá, diferirá del de en medio en 32 unidades. Por tanto, el número preguntado en el problema es:

$$33^{32} + 32$$

Junio 21-22: En el conjunto de los primeros 26 números naturales borramos dos de ellos, de manera que su producto es igual a la suma de los 24 restantes. ¿Cuál es el menor múltiplo común de los dos que hemos borrado?

Solución Ignacio Larrosa Cañestro (@ilarrosac): Del enunciado, tendremos que si a y b son los dígitos eliminados (a, b $\leq$ 26)

$$\mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = (1 + 2 + 3 + \cdots + 26) - (\mathrm{a} + \mathrm{b}) = \frac{26 \cdot 27}{2} - (\mathrm{a} + \mathrm{b}) = 351 - (\mathrm{a} + \mathrm{b})$$

Si suponemos a < b, tenemos:

$$\mathrm{a}^2 < \mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = 351 - (\mathrm{a} + \mathrm{b}) < 351 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{a} < \sqrt{351} = 18{,}79 \ldots \quad \Rightarrow \quad \mathrm{a} \leq 18$$

Por otra parte:

$$\mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = 351 - (\mathrm{a} + \mathrm{b}) > 551 - 2 \cdot 26 = 299 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{a} > \frac{299}{\mathrm{b}} \geq \frac{299}{26} = 11{,}5 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{a} \geq 12$$

En definitiva $12 \leq \mathrm{a} \leq 18$ y

$$\mathrm{a} \cdot \mathrm{b} + \mathrm{b} = 351 - \mathrm{a} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{b} = \frac{351 - \mathrm{a}}{\mathrm{a} + 1}$$

a	$b = \frac{351 - a}{a + 1}$
12	$\frac{339}{13}$
13	$\frac{169}{7}$
14	$\frac{337}{15}$
15	21

16	$\frac{335}{17}$
17	$\frac{167}{9}$
18	$\frac{333}{19}$

Luego a = 15 y b = 21. Por tanto m.c.m. (15, 21) = 105

Junio 23: Si

(1 + 3 + 5 + ... + p) + (1 + 3 + 5 + ... + q) = 1 + 3 + 5 +.....+ 25

hallar p y q

Solución: Recordemos:

$$\text{Si } (a_n)_1^{\infty} \text{ es una PA } \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$

con lo que:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + k = \frac{1 + k}{2} \cdot \frac{1 + k}{2} = \left(\frac{1 + k}{2}\right)^2$$

de donde, la ecuación propuesta es equivalente a:

$$\left(\frac{1 + p}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + q}{2}\right)^2 = \left(\frac{1 + 25}{2}\right)^2 = 169 = 13^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 13^2$$

que se trata de un caso particular de ecuación diofántica: las ternas pitagóricas. Ya demostró Euclides en sus Elementos, que las soluciones de la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ son: $x = m^2 - n^2, y = 2mn$ y $z = m^2 + n^2$. Como en este caso 13 sólo se puede poner como una única suma de cuadrados: $(13 = 3^2 + 2^2)$, las únicas soluciones para p y q en la ecuación planteada son:

$$\frac{1 + p}{2} = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 \quad \Rightarrow \quad p = 9$$

$$\frac{1 + q}{2} = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12 \quad \Rightarrow \quad q = 23$$

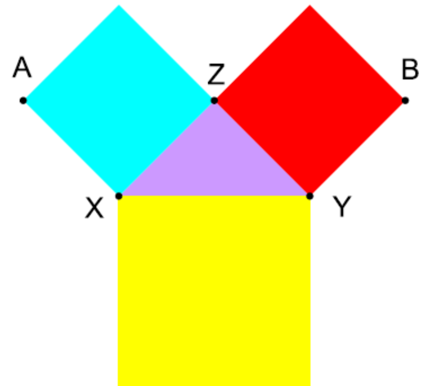
(o viceversa).

Junio 24: ¿Cuántos números de cuatro dígitos con un seis en las unidades de millar y un 4 en las decenas son divisibles por 36?

Solución: Los números tienen el formato: 6a4b. Para que sean múltiplos de 36 (= 9·4) lo han de ser de 9 y 4. Para serlo de 4, las dos últimas cifras han ser múltiplos de 4, lo cual lleva a las posibilidades: 6a40, 6a44 y 6a48. Exigiendo que la suma de las cifras sea múltiplo de 9

6a40	6 + a + 4 + 0 = 10 + a = 18 $\Rightarrow$ a=8	6840
6a44	6 + a + 4 + 4 = 14 + a = 18 $\Rightarrow$ a=4	6444
6a48	6 + a + 4 + 8 = 18 + a = 18 $\Rightarrow$ a=0 6 + a + 4 + 8 = 18 + a = 27 $\Rightarrow$ a=9	6048 6948

Junio 25-26:



ΔXYZ es un triángulo rectángulo isósceles. Sobre sus lados se construyen cuadrados. Si d(A, B) = 16, ¿cuál es el área total de la figura?

Solución: Al ser el triángulo isósceles d(X, Z) = d(Z, Y). Por tanto, el cuadrado azul y el cuadrado rojo son iguales. De donde d(A, Z) = 8. Si c es el cateto del triángulo isósceles, al aplicar Pitágoras conseguimos:

$$c^2 + c^2 = 64 \quad \Rightarrow c = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Por lo tanto, el área total de la figura es (d(X, Y) = d(A, Z)):

$$A = \left(4\sqrt{2}\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 + \frac{\left(4\sqrt{2}\right)^2}{2} + 8^2 = 144$$

Junio 27: Si a, b y c son naturales tales que abc + ab + ac + bc + a + b + c = 104, ¿cuánto vale $a^2 + b^2 + c^2$?

Solución: Notemos en primer lugar que los tres naturales han de ser pares (Si, por ejemplo, a es el único impar la suma del enunciado tiene seis sumandos pares y uno impar luego la suma debe ser impar. Si, por ejemplo, a y b son los únicos impares, la suma del enunciado tiene cuatro sumandos pares y tres impar luego la suma debe ser impar. Si los tres naturales son impares, la suma del enunciado tiene todos los siete sumandos impares luego la suma debe ser impar). Luego, abc, ab, ac, bc, a + b + c, deben ser múltiplos de 4 (ya que 104 lo es). No puede darse a + b + c = 8 (a =2, b = 4; c = 2, por ejemplo) pues entonces la suma vale 44. Veamos que ocurre si a + b + c = 12. Si a = 4, b = 4 y c = 4 tenemos que la suma es 124. Si a =2, b = 4, c = 6, por ejemplo, entonces la suma del enunciado es 104. Por tanto $a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 = 56$. Otras posibilidades se descartan de igual manera: a = 2, b = 2, c = 8, o a = 2, b = 2, c =12.

Solución de anónimo (JORDI @JRDI53680678):

$$\begin{aligned} abc + ab + ac + bc + a + b + c &= ab(c+1) + c(a+b) + a + b + c \\ &= ab(c+1) + (c+1)(a+b) + c = (c+1)(ab+a+b) + c = 104 \end{aligned}$$

$$(c+1)(ab+a+b)+c+1=105=(c+1)(ab+a+b+1)$$
$$=(c+1)(a(b+1)+b+1)=(c+1)(a+1)(b+1)=3\cdot 5\cdot 7$$

Luego a, b y c son 2, 4 y 6 en algún orden. De aquí: $a^2+b^2+c^2=2^2+4^2+6^2=56$.

<u>Solución Nèstor Abad (@nabadvin):</u>

$$(a+1)(b+1)(c+1)=abc+ab+ac+bd+a+b+c+1=104+1=105$$
$$=3\cdot 5\cdot 7\ \Rightarrow\ \{a,b,c\}=\{2,4,6\}\ \Rightarrow\ a^2+b^2+c^2=2^2+4^2+6^2=56$$

<u>Junio 28:</u> Hallar el área del polígono cuyos vértices son los puntos en los que se intersectan las curvas:

$$\mathbf{x^2 + y^2 = 25}$$

$$\mathbf{(x-4)^2 + 9y^2 = 81}$$

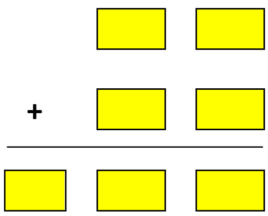
<u>Solución:</u> Hallemos los puntos de corte de las dos curvas resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=25 \\ (x-4)^2+9y^2=81 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -9x^2-9y^2=-9\cdot 25 \\ (x-4)^2+9y^2=8\ \end{array}\right\} \Rightarrow -8x^2-8x+160=0$$
$$\Rightarrow x^2+x-20=0 \ \Rightarrow x=\frac{-1\pm 9}{2}\begin{cases} =4 & \Rightarrow\ y=\pm 3 \\ =-5 & \Rightarrow\ y=0 \end{cases}$$

El polígono del enunciado resulta ser un triángulo (pues tiene tres vértices (4, 3); (4, - 3) y (- 5, 0)) y su área resulta ser:

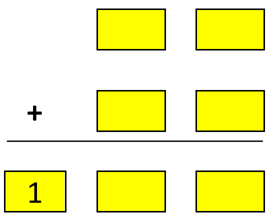
$$A=\frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}=\frac{d\big((4,-3);(4,3)\big)\cdot d((-5,0);(4,0))}{2}=\frac{6\cdot 9}{2}=27$$

<u>Junio 29-30:</u>

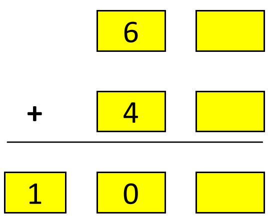


Utilizando todas las siete cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6 formamos la suma que se muestra al lado. ¿Cuál es el resultado de la suma?

<u>Solución:</u>



El 1 es fácil de colocar. Además, como la máxima suma que podemos obtener con los sumandos permitidos es (6 + 5 =) 11, la columna de las decenas debe ser 6 + 4 (= 10) o 4 + 6



Ya, solo, queda por colocar 2, 3 y 5; pero estas cifras se colocan de forma obvia 2 + 3 (=3 + 2) = 5

	6	2		6	3		4	2		4	3
+	4	3	+	4	2	+	6	3	+	6	2
1	0	5	1	0	5	1	0	5	1	0	5