SOLUCIONS OCTUBRE 2018

Col·lecció preparada per Mario Mestre. Institut "El Pont de Suert". Alta Ribagorça

Octubre 1: Resoldre les equacions:

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$$

$$1 - \cos 4x = \sin 4x$$

Solució: Per a la primera equació tenim:

$$\frac{\sin(2x+x)}{\sin x} - \frac{\cos(2x+x)}{\cos x} = 2$$

$$\frac{\sin(2x)\cos x + \cos(2x)\sin x}{\sin x} - \frac{\cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x}{\cos x} = 2$$

$$\frac{(2\sin x\cos x)\cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x}{\sin x} - \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - (2\sin x\cos x)\sin x}{\cos x} = 2$$

$$2\cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin^2 x = 2 \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Com l'última igualtat se compleix per a qualsevol angle, l'equació primigènia se compleix per a qualsevol angle.

Per a la segona equació, tenim de les relacions de l'angle mitat:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad \Rightarrow \quad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

I fent α = 4x junt amb l'equació proposada porta a:

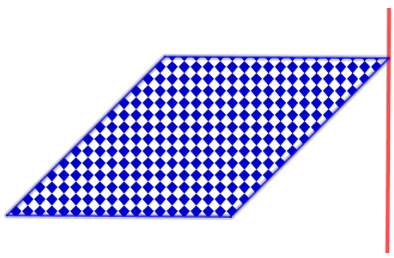
$$2\sin^2(2x) = \sin 4x \quad \Rightarrow \quad 2\sin^2(2x) = 2\sin(2x)\cos(2x)$$

$$2\sin(2x)[\sin(2x) - \cos(2x)] = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sin(2x) = 0 \\ \sin(2x) = \cos(2x) \end{cases}$$

La primera igualtat porta a $2x = k\pi \Rightarrow x = k\pi/2$ con $k \in \mathbb{Z}$

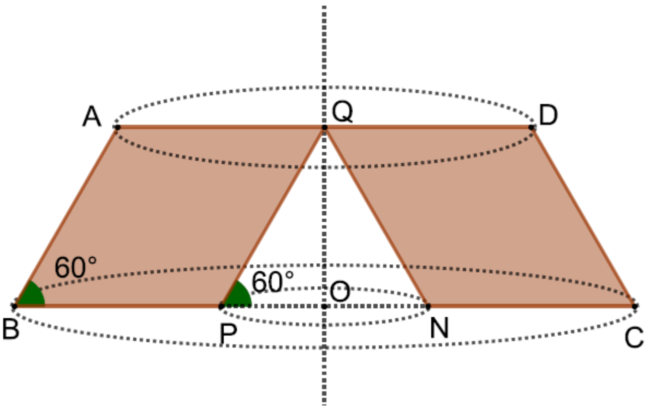
La segona igualtat porta a $tag(2x) = 1 \Rightarrow 2x = \pi/4 + k\pi \Rightarrow x = \pi/8 + k\pi/2$ con $k \in \mathbb{Z}$

Octubre 2-3:



Un rombe de costat 19 i angle agut 60° gira al voltant d'un vèrtex de l'angle agut i perpendicular al costat del rombe. Calcular l'àrea del cos de revolució.

Solució:



El sòlid és un tronc de con ABCD menys un con PNQ, complint-se: g = AB = 19, r = AQ = 19; R = OB = 19(1+cos 60) per què en ΔOPQ

$$OP = 19\cdot\cos 60 \;\Rightarrow\; R = OB = OP + PB = 19\cdot\cos 60 + 19 = 19(1+\cos 60)$$

L'àrea del sòlid serà la de la superfície lateral del con, més la superfície lateral del tronc de con, més la de les bases, menys la base del con

$$A_{\text{sòlid}} = A_{\text{Lcon}} + A_{\text{Ltronc}} + A_{\text{base grand}} + A_{\text{base petita}} - A_{\text{base con}}$$

$A_{\text{Lcon}} = \pi r g = \pi\cdot 19^2\cdot\cos 60$

$A_{\text{Ltronc}} = \pi g(R + r) = \pi\cdot 19\cdot[19\cdot(1 + \cos 60) + 19] = \pi\cdot 19^2\cdot(2 + \cos 60)$

$A_{\text{base grand}} = \pi\cdot OB^2 = \pi\cdot 19^2\cdot(1 + \cos 60)^2$

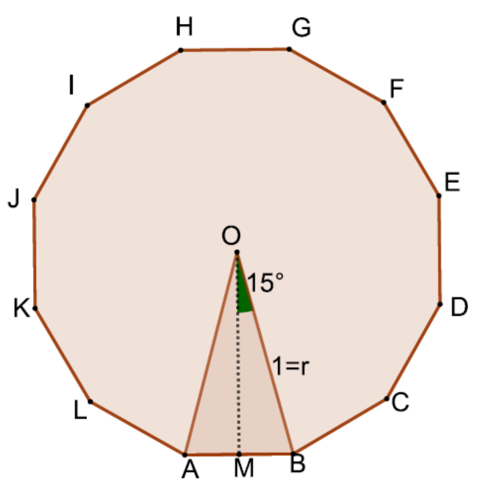
$A_{\text{base petita}} = \pi\cdot AQ^2 = \pi\cdot 19^2$

$A_{\text{base con}} = \pi\cdot OP^2 = \pi\cdot 19^2\cdot\cos^2 60$

$A_{\text{sòlid}} = \pi\cdot 19^2\cdot[\cos 60 + 2 + \cos 60 + 1 + 2\cos 60 + \cos^2 60 + 1 - \cos^2 60] = \pi\cdot 19^2\cdot[4\cdot\cos 60 + 4] = 4\cdot\pi\cdot 19^2\cdot(1 + \cos 60) = 2166\cdot\pi$

Octubre 4: S'escull a l'atzar un punt de l'interior d'un cercle de radi 1. Quina és la probabilitat que estigui fora del dodecàgon inscrit en el cercle?

Solució:



Tindrem:

OM = apotema =cos 15

AB = costat dodecàgon = 2·sin 15

$$A_{\text{dodecàgon}} = \frac{\text{Perímetre}\cdot\text{apotema}}{2} = \frac{24\cdot\sin 15.\cos 15}{2} = 12\cdot\sin 15\cdot\cos 15 = 6\cdot\sin 30 = 3$$

$$A_{\text{exterior dodecàgon}} = A_{\text{cercle}} - A_{\text{dodecàgon}} = \pi \cdot 1^2 - 3 = \pi - 3$$

I, per tant:

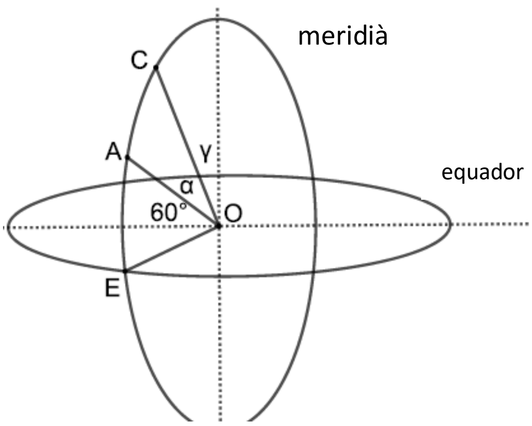
$$\text{probabilitat} = \frac{\pi - 3}{\pi}$$

Octubre 5-6: Dues ciutats A i B estan situades en el mateix paral·lel de l'esfera terrestre, mentre que la ciutat C es troba en el mateix meridià que A. La latitud de A és $\varphi = 60°$ nord.

a) Si la ciutat C està a 300 km al nord de A, calcula la seva latitud considerant que el radi de la Terra és, aproximadament, 6.371 km.

b) Si les ciutats A i B tenen de longitud $\lambda_A = 60°$ oest i $\lambda_B = 40°$ est, respectivament, quina distància els separa?

Solució: Per a a) tenim:



R = OA = OC = 6371 km

$\angle EOA = 60°$

$\angle EOC = \alpha$ =latitud de C = $60° + \gamma$

$\angle AOC = \gamma$

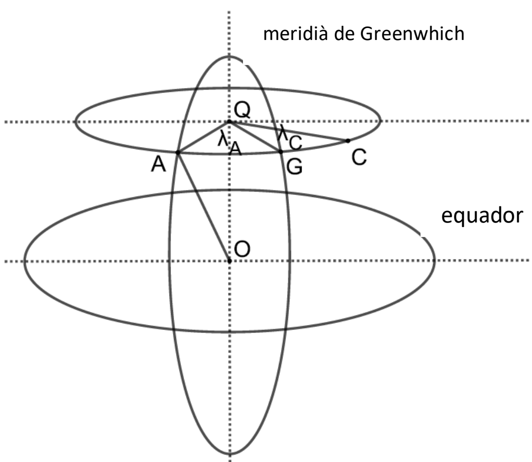
arc AC = $\widehat{AC}$= 300 km

$$\widehat{AC_{km}} = \gamma_{rad} \cdot \frac{R_{km}}{1_{rad}} \Rightarrow 300 = \left(\alpha - 60\frac{\pi}{180}\right)6371 \Rightarrow \alpha = \frac{300}{6371} + \frac{\pi}{3} \approx 1{,}0942\ldots \text{rad}$$

I, per últim:

$$1{,}094286\ldots \cdot \frac{180}{\pi} \approx 62{,}69..° \approx 62°\,41'\,52{,}67''\text{nort}$$

Per a b)



$\angle AQG = \lambda_A = 60°$ oest

$\angle CQG = \lambda_C = 40°$ est. $\lambda = \lambda_A + \lambda_C = 100$

r = QA = QG = QC

distància entre A i C $=\widehat{AC} = 100°\frac{\pi}{180°} \cdot r$

ΔAQO (rectangle en Q) $OA^2 = AQ^2 + QO^2$

$\angle OAQ = 90° - 60° = 30°$

$$\sin 30 = \frac{AQ}{OA} = \frac{r}{R} \Rightarrow r = 6371 \cdot \sin 30 = 3185{,}5 \text{ km}$$

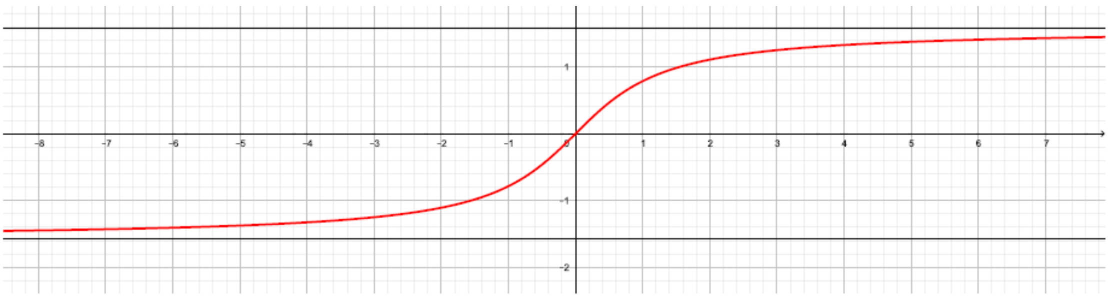
I, per últim:

Distància entre A i C $=\widehat{AC} = 100°\frac{\pi}{180°}\cdot r = 100°\cdot\frac{\pi}{180°}\cdot 3185{,}5 \approx 5559{,}746\ \mathrm{km}$

<u>**Octubre 7:**</u> Estudiant les seues propietats, representar la funció:

$$y = \mathrm{arctg}\ x^2$$

<u>**Solució:**</u> Recordem que f(x) = arctag x $\Leftrightarrow$ f(tag x) =x, x$\in$]-π/2, π/2[



Domini = R

Recorregut = [0, π/2[

Talls amb l'eix X: y = 0 $\Rightarrow$ x = 0

Talls amb l'eix Y: x = 0 $\Rightarrow$ f(0) = 0. Un únic tall: (0, 0)

Simetria respecte a l'eix Y dons f(x) = f(- x)

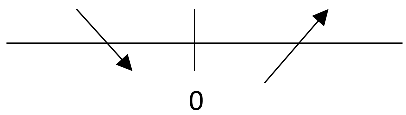
Asímptotes:

Com $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ hi ha una asímptota horitzontal $y = \frac{\pi}{2}$

No hi ha asímptotes verticals ni obliqües

Creixement, decreixement:

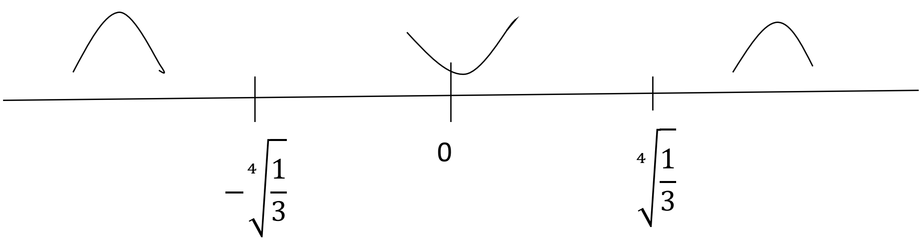
$$y' = \frac{2x}{1+x^4}$$

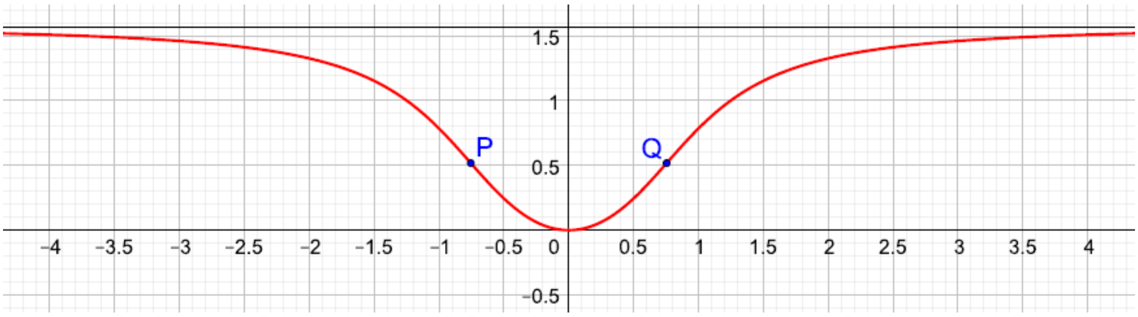


Mínim relatiu en (0, 0)

Concavitat, convexitat:

$$y'' = \frac{2(1+x^4) - 4x^3(2x)}{(1+x^4)^2} = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} \quad\Rightarrow\quad y''=0 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$$





<u>Octubre 8-9:</u> En un bosc en el qual hi ha mussols com a depredadors i ratolins com a víctimes, les poblacions varien d'acord amb els models:

$$M(t) = 180 + 30 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}\right), R(t) = 800 + 200 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

respectivament, on t ve mesurat en anys a partir de l'1 de gener de 2019. Quines són les poblacions de mussols i ratolins l'1 de gener de 2020? Quina és la població màxima de mussols i ratolins? Coincideixen alguna vegada aquests valors màxims? Representa les dues funcions amb GeoGebra

<u>Solució:</u>

$$R(1) = 800 + 200 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}1\right) = 800 + 200 = 1000 \text{ ratolins}$$

$$M(1) = 180 + 30 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}1 - \frac{\pi}{2}\right) = 180 + 30 \cdot \sin(0) = 180 \text{ mussols}$$

El màxim per a ratolins surt quan:

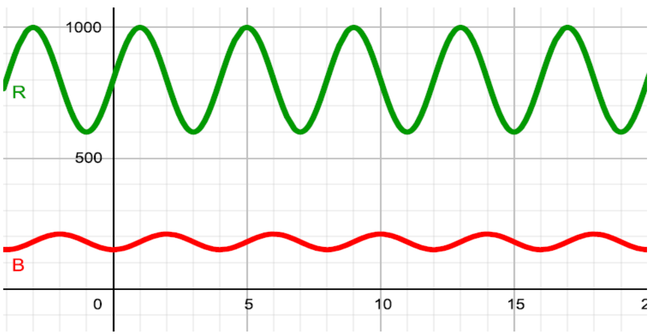
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2}t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ amb } k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad \Rightarrow \quad t = 1 + 4k \in \{1, 5, 9, \ \dots\}$$

El màxim per a mussols surt quan:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ amb } k \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad \Rightarrow$$

$$t = 2 + 4k \in \{2, 6, 10, \dots\dots\}$$

Es tracta de PA de diferència 4 i diferent valor inicial, per el que els màxims no coincidiran en el temps.



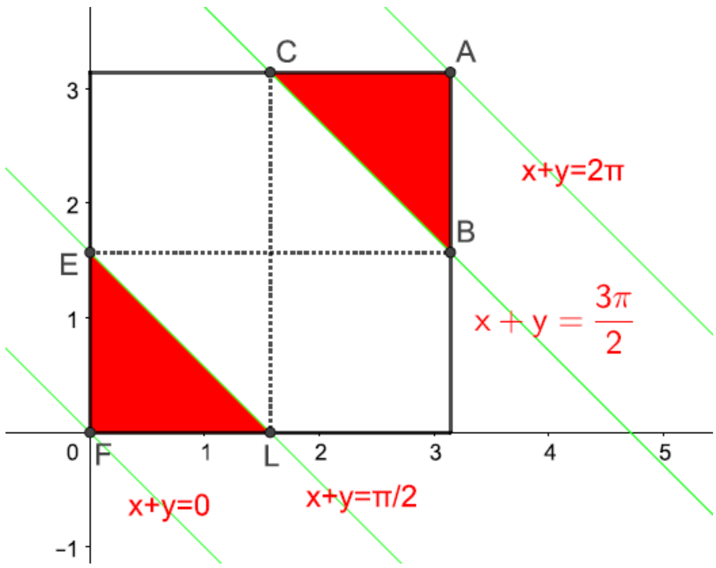
<u>Octubre 10:</u> Representar la zona del pla que verifica:

$$\cos(x + y) \geq 0$$
$$0 \leq x, y \leq \pi$$

<u>Solució:</u> Les dues últimes inequacions es compleixen en el quadrat (i en el seu interior) de vèrtexs (0, 0); (π, 0); (0, π) i (π, π). Com la funció cosinus és no negativa en el primer i quart quadrant del argument, tindrem que la primera inequació és equivalent al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 0 \leq x + y \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{3\pi}{2} \leq x + y \leq 2\pi \end{array}\right\}$$

que és fàcilment resoluble recorrin a les rectes: x + y = 0, x + y = $\pi/2$, x + y = $3\pi/2$ y x + y = 2π. En definitiva, la zona on es verifica el sistema original està format per els triangles ΔABC i ΔEFL (i el seu interior)



<u>Octubre 11-12:</u> Partint de la gràfica de la funció y = sin x, obtenir un període de les gràfiques de les funcions:

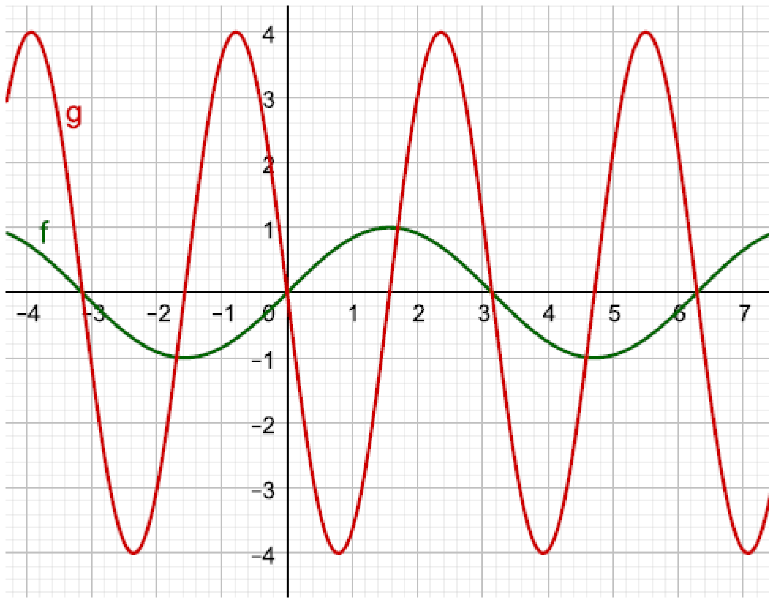
$$\mathbf{g(x) = 4 \cdot f(-2x)}$$
$$\mathbf{h(x) = -\pi \cdot f(\pi x)}$$
$$\mathbf{i(x) = 2 \cdot f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}$$
$$\mathbf{j(x) = \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{x}{2}\right)}$$

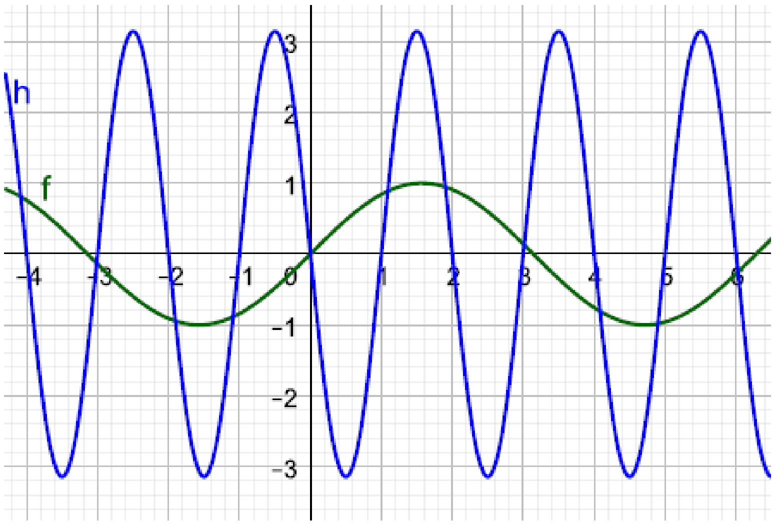
<u>Solució:</u> Tindrem, per exemple, per a g(x) = 4·f(-2x)

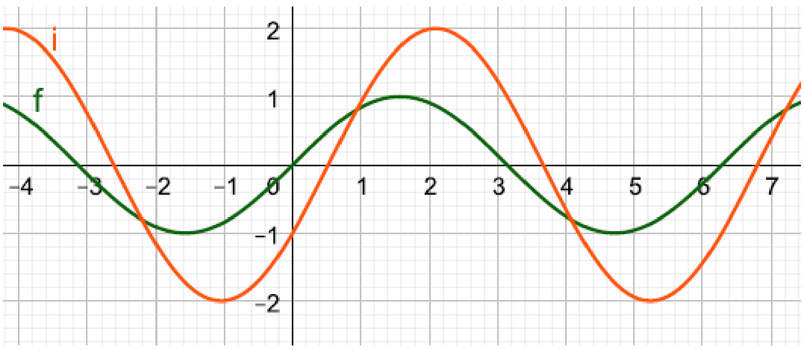
Període: La funció sin x té període [0, 2π]

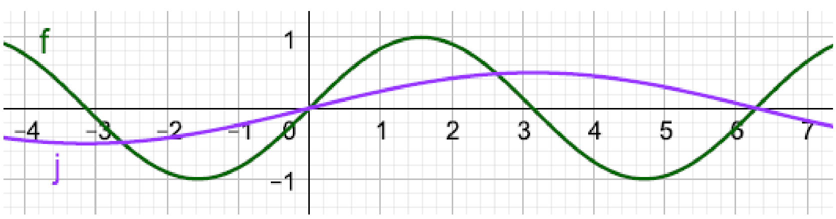
g(x) = 4·f(-2x) $\Rightarrow 0 \leq -2x \leq 2\pi \Rightarrow 0 \geq x \geq -\pi \Rightarrow 0 \leq x \leq \pi$

Com f(- 2x)$\in$[- 1, 1] $\Rightarrow$ $-4 \leq 4\cdot f(-2x) \leq -4$ $\Rightarrow$ g(x) $\in$ [- 4, 4]

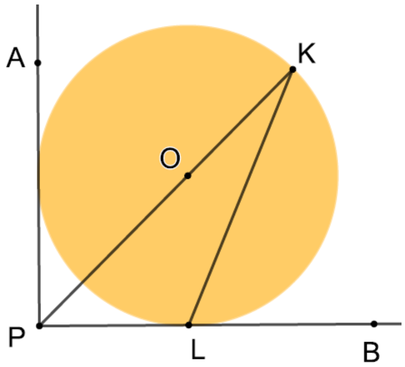

g
f


h
f


i
f


f
j

Octubre 13-20:



A la figura, AP i BP són dos segments perpendiculars tangents a la circumferència de radi 1. PK passa pel centre de la circumferència O i L és el punt de tangència entre PB i la circumferència. Calcular el perímetre del triangle ΔPLK

Solució: En la figura tindrem:

$$PK = PO + OK;\ \ PO = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2};\ \ PK = \sqrt{2} + 1;\ \ \angle KPL = 45°$$

Aplicant el teorema dels cosinus al triangle ΔPLK

$$LK^2 = PK^2 + PL^2 - 2 \cdot PK \cdot PL \cdot \cos 45° = \left(\sqrt{2}+1\right)^2 + 1^2 - 2\left(\sqrt{2}+1\right) \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2} \ \ \Rightarrow \ \ LK = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

D'on:

$$\text{Perímetre} = PL + PK + LK = 1 + \left(1+\sqrt{2}\right) + \sqrt{2+\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Octubre 14: Calcular el valor de l'expressió:

$$\mathbf{\sin(2 \cdot arctg2) - tg\left(\frac{\pi}{4} - arctg\ 2\right)}$$

en el primer quadrant.

Solució: De les fórmules de l'angle doble, tenim:

$$\sin(2 \cdot \text{arctag}2) = 2\sin(\text{arctag}2)\cos(\text{arctag}2) = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

calculades las raons trigonomètriques en el triangle rectangle 1-2-$\sqrt{5}$.

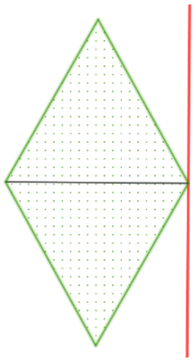
De la fórmula de la tangent de la diferència:

$$\text{tag}\left(\frac{\pi}{4} - \text{arctag}2\right) = \frac{\text{tag}\frac{\pi}{4} - \text{tag}(\text{arctag}2)}{1 + \text{tag}\frac{\pi}{4} \cdot \text{tag}(\text{arctag}2)} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

calculades les raons trigonomètriques en el triangle rectangle 2-1-$\sqrt{5}$. Per tant:

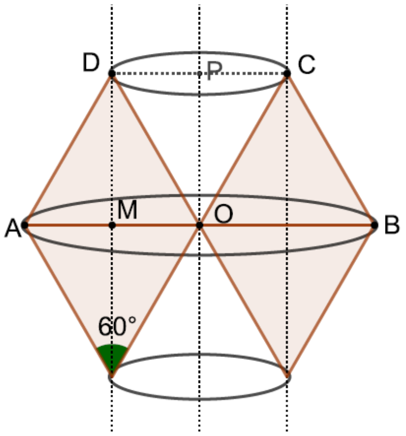
$$\sin(2 \cdot \text{arctg}2) - \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \text{arctg}\ 2\right) = \frac{4}{5} - \frac{1}{3} = \frac{7}{15}$$

<u>Octubre 15-22:</u>



Un rombe de costat 19 i angle agut 60° gira al voltant d'un eix que passa pel vèrtex de l'angle obtús i és perpendicular a l'eix petit. Calcular l'àrea del sòlid de revolució.

<u>Solució:</u>



El sòlid és un doble tronc de con ABCD menys dos cons ODC.

L'àrea serà la superfície lateral dels dos troncs de con més la superfície lateral dels cons.

R = AO

r = DP

g = 19

En el triangle ΔADM

$$\sin 30 = \frac{AM}{AD} = \frac{AO/2}{AD} = \frac{R}{2 \cdot AD} \quad \Rightarrow \quad R = 2 \cdot 19 \cdot \frac{1}{2} = 19$$

r = DP = MO = R/2 = 19/2

$$S_{\text{tronc}} = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} g = \pi g(R + r) = \pi \cdot 19 \cdot \left(19 + \frac{19}{2}\right) = \frac{1083\pi}{2}$$

$$S_{\text{lateral con}} = \pi r g = \pi \cdot 19 \cdot \frac{19}{2} = \frac{361\pi}{2}$$

$$S_{\text{sòlid}} = 2(S_{\text{tronc}} + S_{\text{lateral con}}) = 2\left(\frac{1083\pi}{2} + \frac{361\pi}{2}\right) = 1444\pi$$

<u>Octubre 16:</u> Si sec x + tg x = $\frac{1}{2}$, calcular

$$(\sec x - \operatorname{tg} x)^2$$

<u>Solució:</u>

Provarem en primer lloc, que:

$$\sec x + \text{tag } x = \frac{1}{\sec x - \text{tag } x}$$

Tenim:

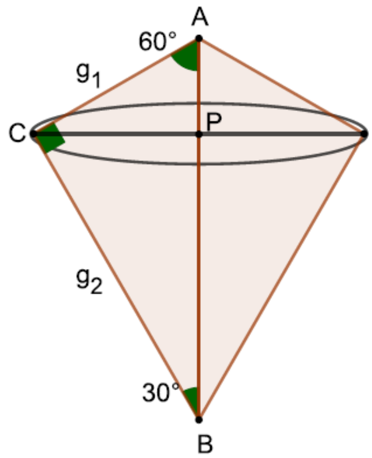
$$\frac{1}{\sec x - \text{tag } x} = \frac{1}{\sec x - \text{tag } x} \cdot \frac{\text{secx} + \text{tagx}}{\text{secx} + \text{tagx}} = \frac{\text{secx} + \text{tagx}}{\sec^2 x - \text{tag}^2 x} = \frac{\text{secx} + \text{tagx}}{(1 + \text{tag}^2 x) - \text{tag}^2 x}$$
$$= \text{secx} + \text{tagx}$$

Per tant:

$$\text{Si secx} + \text{tagx} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{secx} - \text{tagx} = \frac{1}{\text{secx} + \text{tagx}} = 2 \Rightarrow (\text{secx} - \text{tagx})^2 = 4$$

<u>Octubre 17:</u> Un triangle 30°-60°-90° gira al voltant de la seua hipotenusa de 18 cm. Trobar l'àrea del cos de revolució generat

<u>Solució:</u>



De la il·lustració adjunta, tenim:

$AB = 18$, $AC = g_1$, $BC = g_2$, $r = CP$.

$A_T = \pi r g_1 + \pi r g_2 = \pi r(g_1 + g_2)$

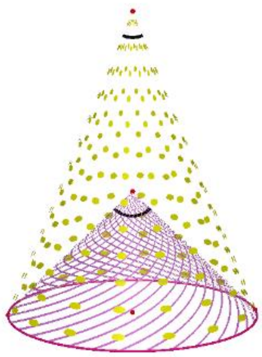
$$\left.\begin{array}{l} \Delta ACP \Rightarrow \text{tag}60 = \sqrt{3} = \dfrac{CP}{AP} \Rightarrow AP = \dfrac{CP}{\sqrt{3}} \\ \Delta CPB \Rightarrow \text{tag}30 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{CP}{BP} \Rightarrow BP = CP\sqrt{3} \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow AP + BP = 18$$
$$\Rightarrow CP\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right) = 18 \Rightarrow CP = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta ACP \Rightarrow \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CP}{g_1} \Rightarrow g_1 = \frac{2 \cdot CP}{\sqrt{3}} = 9$$

$$\Delta CPB \Rightarrow \sin 30 = \frac{1}{2} = \frac{CP}{g_2} \Rightarrow g_2 = 2 \cdot CP = 9\sqrt{3}$$

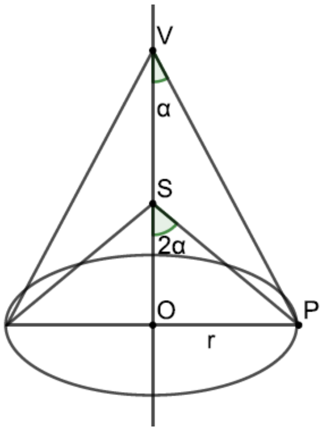
$$A_T = \pi r(g_1 + g_2) = \pi \frac{9\sqrt{3}}{2}(9 + 9\sqrt{3}) = \pi \frac{81\sqrt{3}}{2}(1 + \sqrt{3})$$

Octubre 18-25:



Construïm dos cons amb la base comuna i un dins de l'altre. La distància entre els dos vèrtexs és 18. L'angle de la secció axial del con gran és la meitat de la del petit. Calcular aquests angles si el volum del sòlid limitat per les dues superfícies còniques és 972π cm^3.

Solució:



En la il·lustració:

$\beta = 4\alpha$; $\beta' = 2\alpha$; VS = 18; SO = x; VO = h_1; SO = h_2; r = OP

Tindrem:

$$V_{cos} = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 - \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 (h_1 - h_2)$$
$$= 18\frac{1}{3}\pi r^2 = 972\pi \Rightarrow r = 9\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{tag}\alpha = \dfrac{r}{h_1} = \dfrac{9\sqrt{2}}{x+18} \\ (1)\text{tag}2\alpha = \dfrac{r}{h_2} = \dfrac{9\sqrt{2}}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{tag}2\alpha = \frac{2\text{tag}\alpha}{1-\text{tag}^2\alpha} \Rightarrow \frac{9\sqrt{2}}{x} = \frac{\frac{18\sqrt{2}}{x+18}}{1-\frac{162}{(x+18)^2}}$$

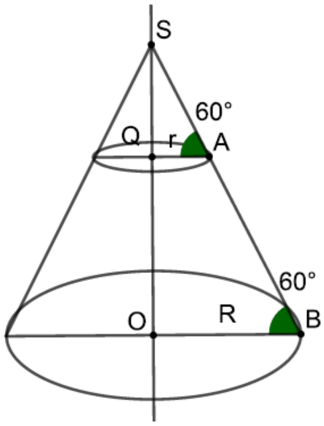
$$\Rightarrow 9\sqrt{2}[(x+18)^2 - 162] = \frac{18\sqrt{2}x}{x+18}(x+18)^2 \Rightarrow (x+18)^2 - 162$$
$$= 2x(x+18) \Rightarrow x^2 = 162 \Rightarrow x = r = 9\sqrt{2}$$

Per últim, en (1):

$$\text{tag}2\alpha = \frac{9\sqrt{2}}{9\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow 2\alpha = 45° \Rightarrow \beta = 90;\ \beta' = 45°$$

Octubre 19: Els radis de les bases d'un tronc de con estan en raó 1: 3. La generatriu del tronc mesura 20 i està inclinada 60° respecte de la base. Calcular el volum del tronc de con.

Solució:



En la figura:

AB = 20; SO = H; SQ = h; h′ = SO – SQ; R = 3r

$$V_{tronc} = \frac{1}{3}h'\left[B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 B_2}\right]$$
$$= \frac{1}{3}\pi h'(r^2 + R^2 + rR)$$

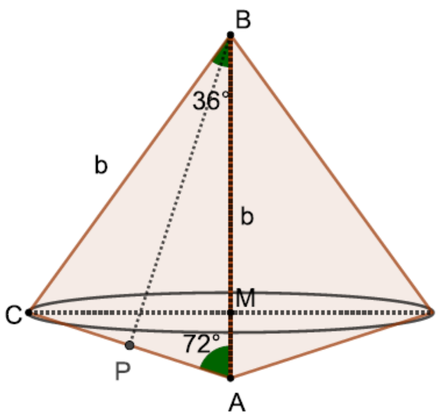
$$\left.\begin{array}{r} tag60 = \sqrt{3} = \dfrac{SO}{R} = \dfrac{SQ}{r} = \dfrac{SO - SQ}{R - r} = \dfrac{h'}{R - r} \;\; \Rightarrow \;\; h' = (R - r)\sqrt{3} \\ sin60 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{SO}{SB} = \dfrac{SQ}{SA} = \dfrac{SO - SQ}{SB - SA} = \dfrac{h'}{20} \;\; \Rightarrow \;\; h' = 10\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 10\sqrt{3}$$
$$= 2r\sqrt{3} \;\; \Rightarrow \;\; r = 5$$

I, per últim:

$$V_{tronc} = \frac{1}{3}\pi h'(r^2 + R^2 + rR) = \frac{10\sqrt{3}\pi}{3}(5^2 + 15^2 + 5 \cdot 15) = \frac{3250\sqrt{3}\pi}{3}$$

<u>Octubre 21:</u> Un triangle isòsceles ΔABC, amb AB = BC = b i ∠C = ∠A = 72° gira al voltant d'un dels costats iguals. Calcular el volum del cos de revolució.

<u>Solució:</u>



El sòlid de revolució són dos cons de radi de la base r = CM i altures h_1 =BM y h_2 = AM amb $h_1 + h_2$ = b. P és el punt mitja d’AC

Tindrem:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2(h_1 + h_2) = \frac{1}{3}\pi r^2 b$$

En ΔABC tenim:

$$\left.\begin{array}{r} \sin 72 = \dfrac{BP}{AB} = \dfrac{BP}{b} \;\Rightarrow BP = b \cdot \sin 72 \\ \cos 72 = \dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AP}{b} \;\Rightarrow AP = b \cdot \cos 72 \;\;\Rightarrow AC = 2b \cdot \cos 72 \end{array}\right\}$$

$$A_{\Delta ABC} = \begin{cases} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BP = \dfrac{1}{2}2b\cos 72 \cdot b\sin 72 \\ \quad = \dfrac{1}{2}AB \cdot CM = \dfrac{1}{2}b \cdot r \end{cases}$$

D'on:

$$\frac{1}{2}b \cdot r = \frac{1}{2}2b\cos 72 \cdot b\sin 72 \quad \Rightarrow \quad r = b \cdot 2\sin 72 \cdot \cos 72 = b \cdot \sin 144$$

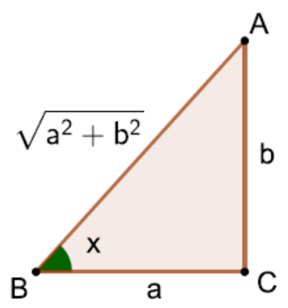
I, per últim:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2(h_1 + h_2) = \frac{1}{3}\pi r^2 b = \frac{1}{3}\pi b^3 \cdot \sin^2 144$$

Octubre 23-24: Demostrar:

$$\text{Si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ y } \operatorname{tg} x = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad a \cdot \cos 2x + b \cdot \sin 2x = a$$

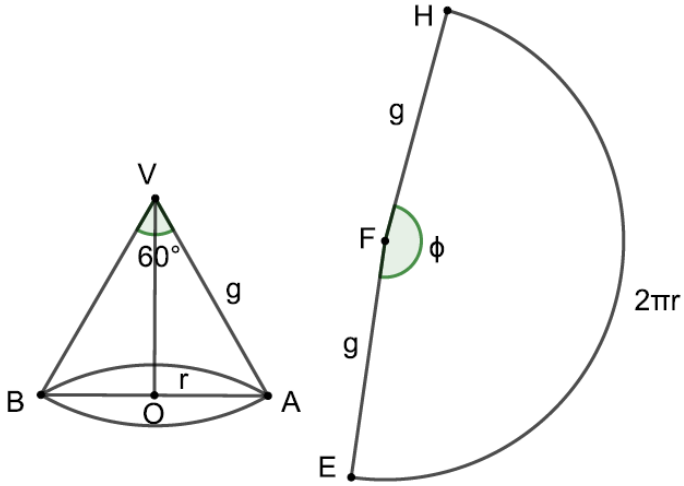
Solució:



$$\begin{aligned} a \cdot \cos 2x + b \cdot \sin 2x \\ &= a(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2b\sin x\cos x \\ &= a\left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} - \frac{b^2}{a^2 + b^2}\right) \\ &+ 2b\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{a^3 - ab^2}{a^2 + b^2} + \frac{2ab^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^3 + ab^2}{a^2 + b^2} = a \end{aligned}$$

Octubre 26: L'angle en el vèrtex de la secció axial d'un con és de 60°. Calcular l'angle central del desenvolupament de la superfície lateral

Solució:



Cal calcular l'angle ϕ. Hem de l'àrea lateral del con és πrg. D'altra banda podem calcular l'àrea lateral recorrent a una regla de tres (entre les magnituds àrea i angle)

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{àrea} & -- & \text{angle} \\ \pi g^2 & -- & 360° \\ A_L & -- & \phi \end{array}\right\} \Rightarrow A_L = \frac{\pi g^2 \phi}{360}$$

Amb això:

$$\pi rg = \frac{\pi g^2 \phi}{360} \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{g} = \frac{\phi}{360}$$

Però en el triangle ΔAVO

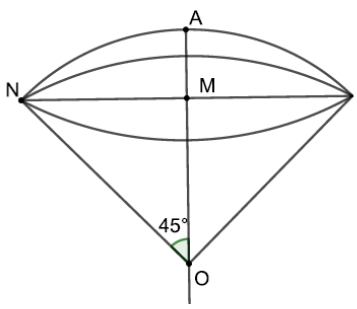
$$\sin 30 = \frac{1}{2} = \frac{OA}{VA} = \frac{r}{g}$$

Amb el que:

$$\frac{1}{2} = \frac{r}{g} = \frac{\phi}{360} \quad \Rightarrow \quad \phi = 180°$$

Octubre 27-28: Un sector circular de 12 cm de radi i angle central de 45° gira entorn d'un dels seus radis exteriors. Calcular l'àrea i volum del cos de revolució engendrat

Solució:



El sòlid està format per un con de vèrtex el centre de l'esfera i un casquet esfèric del mateix radi (MN) que la base del con.

NM = r; ON = R = OA = 12; AM = h, OM = H

En ΔNMO, temin:

$$\operatorname{tag}45 = 1 = \frac{MN}{OM} \;\Rightarrow\; MN = OM = H = r$$

$$\sin 45 = \frac{MN}{12} \;\Rightarrow\; r = MN = 12 \cdot \sin 45 = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

$$h = AM = AO - OM = 12 - 6\sqrt{2} = 6\left(2 - \sqrt{2}\right)$$

Amb el que:

$$V_{con} = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\pi 6^2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{2} = \pi \cdot 12^2 \cdot \sqrt{2}$$

$$V_{casquet} = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h) = \frac{\pi}{3} \cdot 6^2 \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(36 - 12 + 6\sqrt{2}\right) = 12^2 \cdot \pi \cdot \left(8 - 5\sqrt{2}\right)$$

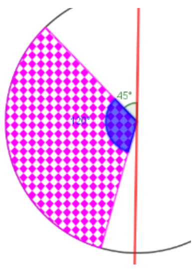
$$V_T = 24^2 \cdot \pi \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)$$

$$A_{lateral\ con} = \pi r g = \pi \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 12 = 72\pi\sqrt{2}$$

$$A_{casquet} = 2\pi R h = 2\pi \cdot 12 \cdot 6 \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right) = 144\pi\left(2 - \sqrt{2}\right)$$

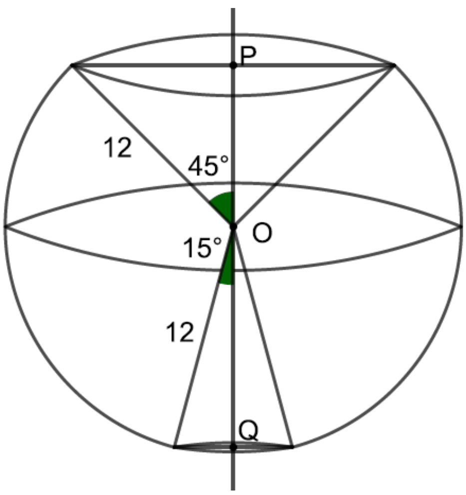
$$A_T = 72\pi\sqrt{2} + 144\pi\left(2 - \sqrt{2}\right) = 72\pi\left(4 - \sqrt{2}\right)$$

Octubre 29-30:



Un sector circular de 12 cm de radi i angle en el vèrtex 120° gira voltant d'un eix que forma 45° amb un radi del sector. Trobar volum del cos de revolució format

Solució:



En la figura:

R = 12; h = OP + OQ.

$$\cos 45 = \frac{OP}{12} \;\Rightarrow OP = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

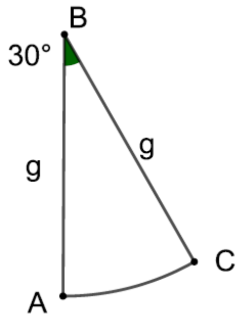
$$\cos 15 = \frac{OQ}{12} \;\Rightarrow\; OQ = 12 \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 3\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$$

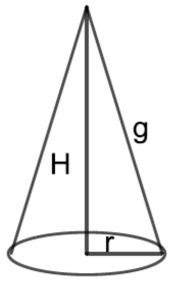
$$h = OP + OQ = 6\sqrt{2} + 3\sqrt{6} + 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2} + 3\sqrt{6}$$

$$V_{sector\ esfèric} = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{2}{3}\pi 12^2\left(9\sqrt{2} + 3\sqrt{6}\right) = 288\pi\left(3\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$$

<u>Octubre 31:</u> A l'enrotllar un sector circular de centre B i arc AC amb $\angle B = 30°$ i corda de l'arc AC = 2018, vam formar un con. Trobar el seu volum.

<u>Solució:</u>





$$\sin 15 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{1009}{g} \;\Rightarrow\; g = \frac{1009}{\sin 15}$$

Utilitzant la relació directa entre les magnituds longitud de la circumferència de radi g i l'angle central tindrem:

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{longitut} & -- & \text{angle central} \\ 2\pi g & -- & 360 \\ \widehat{AC} & -- & 30 \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{AC} = \frac{2\pi g \cdot 30}{360} = \frac{\pi g}{6} \Rightarrow 2\pi r = \frac{\pi g}{6} \;\Rightarrow\; r = \frac{g}{12}$$

$$= \frac{1009}{12 \cdot \sin 15} \;\Rightarrow\; H = \sqrt{g^2 - r^2} = \sqrt{\frac{1009^2}{\sin^2 15} - \frac{1009^2}{12^2 \cdot \sin^2 15}}$$

$$= \frac{1009}{\sin 15}\frac{\sqrt{143}}{12}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1009}{12\sin 15}\right)^2 \cdot \frac{1009}{\sin 15}\frac{\sqrt{143}}{12} \approx 429375940{,}4..$$