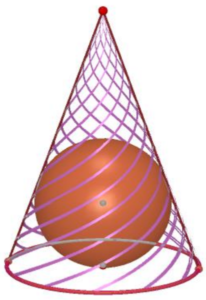
SOLUCIONS NOVEMBRE 2018

Autor: Ricard Peiró i Estruch. IES “Abastos”. València

Novembre 1-2:



Un con té inscrita una esfera. Si el volum de l'esfera és la meitat del volum del con, calculeu la proporció entre el radi del con i la generatriu del con.

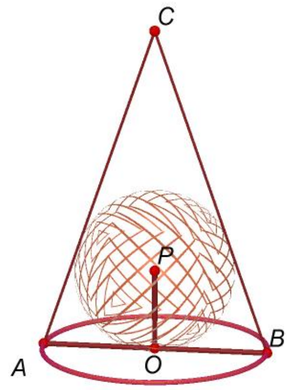
Solució: Siga $\overline{AB}=2R$ diàmetre de la base del con.

Siga O el centre de la base del con.

Siga $\overline{AC}=\overline{BC}=g$ la generatriu del con.

L’esfera és tangent al con, aleshores el radi de la esfera és el radi de la circumferència inscrita al triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga $\overline{PO}=r$ el radi de l’esfera.



L’àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{2(R+g)2(g-R)2R2R}}{4}=\frac{2(R+g)}{2}r\,.$$

Aleshores, $r=R\sqrt{\frac{g-R}{R+g}}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOC}$:

$$\overline{OC}=\sqrt{g^2-R^2}\,.$$

El volum del con és:

$$V_{con}=\frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{g^2-R^2}\,.$$

El volum de l’esfera és:

$$V_{esfera}=\frac{4}{3}\pi R^3\frac{g-R}{R+g}\sqrt{\frac{g-R}{R+g}}\,.$$

El volum de l’esfera es la mitat del volum del con, aleshores:

$$\frac{V_{con}}{V_{esfera}}=\frac{\frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{g^2-R^2}}{\frac{4}{3}\pi R^3\frac{g-R}{R+g}\sqrt{\frac{g-R}{R+g}}}=2\,.$$

Simplificant:

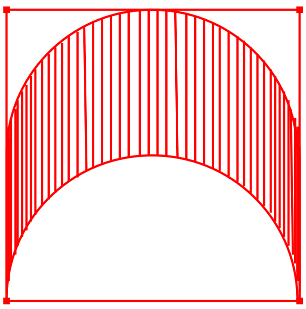
$9R^2 - 6gR + g^2 = 0$. Dividint l'expressió per g^2:

$9\left(\frac{R}{g}\right)^2 - 6\frac{R}{g} + 1 = 0$. Resolen l'equació:

$$\frac{R}{g} = \frac{1}{3}.$$

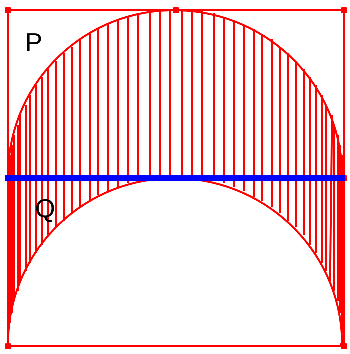
D'on $g = 3R$, $\overline{OC} = 2R\sqrt{2}$, $r = \frac{\sqrt{2}}{2}R$.

<u>Novembre 3-4:</u>



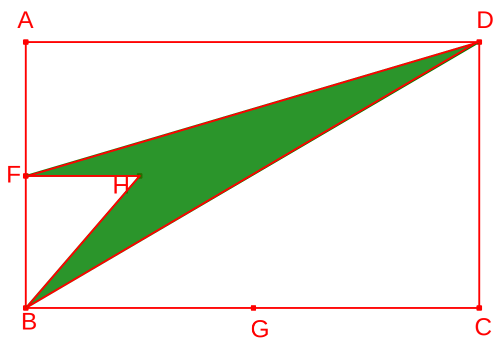
En un quadrat de costat c s'han dibuixat dos arcs (semicircumferències) de diàmetre el costat d'un quadrat. Calculeu l'àrea de la regió generada pels dos arcs.

<u>Solució:</u>



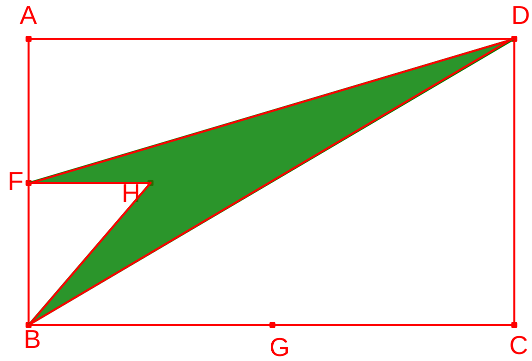
L'àrea ombrejada és, òbviament, igual a la meitat de l'àrea del quadrat.

<u>Novembre 5-6:</u>



Siga el rectangle ABCD d'àrea 32 cm^2. Siguen F i G els punts mitjans dels costats AB i BC, respectivament. Siga H el punt mig del segment AG. Determinar l'àrea de la regió FHBD

Solució: Siga S l'àrea del rectangle ABCD.



$$S_{BCD} = S_{BAD} = S_{ABC} = \frac{1}{2}S.$$

$$S_{FAD} = \frac{1}{2}S_{BAD} = \frac{1}{4}S.$$

$\overline{FH}$ es la paral3Lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABG}$.

$$S_{ABG} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{4}S.$$

$$S_{AFH} = \frac{1}{4}S_{ABG} = \frac{1}{16}S.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AFH}$, $\overset{\Delta}{BFH}$ són iguals ja que tenen els catets iguals.

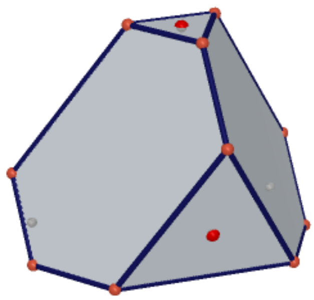
$$S_{BFH} = S_{AFH} = \frac{1}{16}S.$$

$$S_{FHBD} = S - (S_{BCD} + S_{FAD} + S_{BFH}) = S - \left(\frac{1}{2}S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S\right) = \frac{3}{16}S.$$

Aleshores,

$$S_{FHBD} = \frac{3}{16}S = \frac{3}{16}32 = 6\ cm^2.$$

Novembre 7-8:



A cada un dels vèrtexs d'un tetraedre regular d'aresta 3 s'ha tallat una piràmide tal que la secció formada és un triangle equilàter. Les quatre piràmides obtingudes tenen dimensions diferents. Calcular la longitud total de totes les arestes del sòlid truncat.

Solució: Les piràmides tallades són tetraedres regulars d'arestes a, b, c, d.

El tetraedre truncat format té 18 arestes:

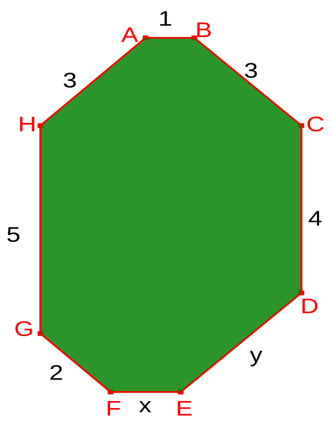
Tres de longitud a, tres de longitud b, tres de longitud c, tres de longitud d, i sis de longituds, $3-(a+b)$, $3-(a+c)$, $3-(a+d)$, $3-(b+c)$, $3-(b+d)$, $3-(c+d)$, respectivament.

La suma de les longituds de les arestes és:

$$S_{st} = 3a + 3b + 3c + 3d + 3-(a+b) + 3-(a+c) + 3-(a+d) + 3-(b+c) + 3-(b+d) + 3-(c+d) = 12$$

Es dir, la suma de las longituds de totes les arestes és igual a la suma de les arestes del tetraedre inicial.

Novembre 9-10:

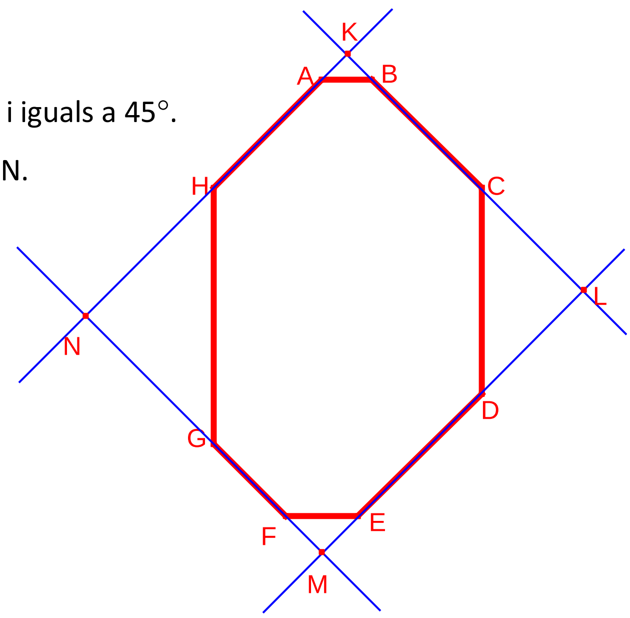


Siga ABCDEFGH un octògon equiangular.

Si AB = 1, BC = AH =3, CD = 4, GH = 5 y FG = 2. Trobar les mesures dels costats EF = x i DE = y

Solució: La suma dels angles d'un polígon convex de 8 costats és:

$180^o(8-2)=1080^o$. Llavors, cada un dels angles del polígon mesura: $\frac{1080^o}{8}=135^o$.



Els angles exteriors d'aquest polígon són tots iguals i iguals a 45°.

Les rectes BC, DE, FG, i AH formen el rectangle KLMN.

$\overline{AK}=\overline{BK}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\overline{CL}=\overline{DL}=2\sqrt{2}$, $\overline{GN}=\overline{HN}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$

$$\overline{EM}=\overline{FM}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\overline{MN}=\overline{KL}$, aleshores:

$\frac{\sqrt{5}}{2}+2+\frac{\sqrt{2}}{2}x=\frac{\sqrt{2}}{2}+3+2\sqrt{2}$. Resolent l'equació:

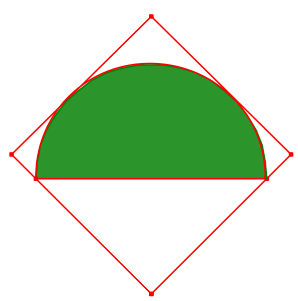
$$x=\sqrt{2}.$$

$\overline{KN}=\overline{LM}$, aleshores:

$\frac{\sqrt{5}}{2}+3+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}x+y+2\sqrt{2}$. Resolent l'equació:

$$y=2+\sqrt{2}.$$

Novembre 11-18:



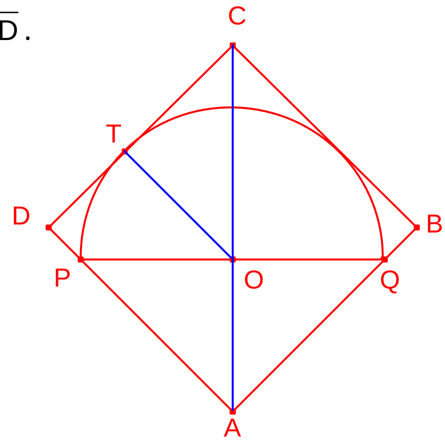
A la figura, un semicercle de radi 1 està inscrit en un quadrat. El centre del semicercle està en una de les diagonals del quadrat. Determinar l'àrea del quadrat.

Solució: Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = c$.

Siga el semicercle de diàmetre $\overline{PQ} = 2$ i centre O.

$\overline{PQ}$ és perpendicular a $\overline{AC}$.

Siga T el punt de tangència de la semicircumferència i el costat $\overline{CD}$.



$$\overline{OT} = 1,\ \angle CTO = 90^{o}.\ \angle TCO = 45^{o}.$$

Aleshores, $\overline{CT} = \overline{OT} = 1$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTC}$

$$\overline{OC} = \overline{OT}\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

El triangle $\overset{\Delta}{AOP}$ és rectangle i isòsceles, aleshores:

$$\overline{OA} = \overline{OP} = 1$$

$$\overline{AC} = 1 + \sqrt{2}.$$

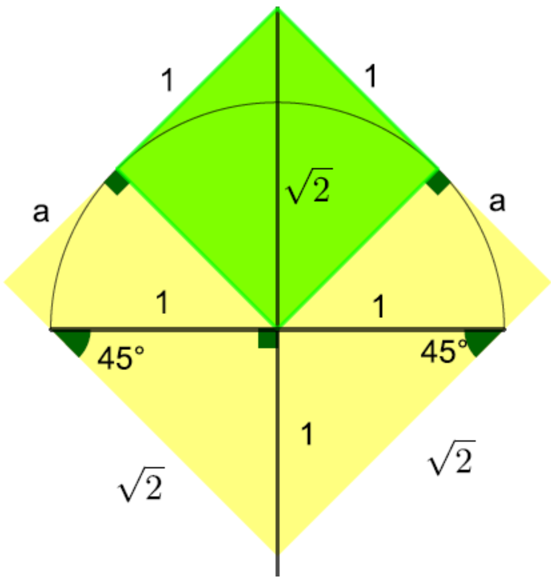
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$c^2 = \overline{AB}^2 = \frac{1}{2}\overline{AC}^2 = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^2 = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}.$$

L'àrea del quadrat ABCD és:

$$S_{ABCD} = c^2 = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}.$$

Solució Henk Reuling (@HenkReuling)



Diagonal vertical del quadrat gran = $1 + \sqrt{2}$

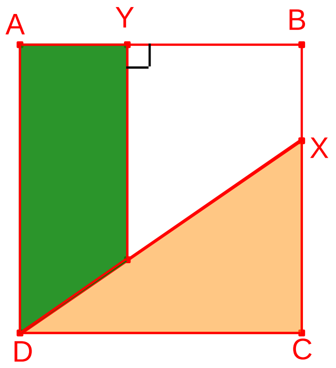
Diagonal horitzontal del quadrat gran = $\sqrt{2}(1 + a)$

$$1 + \sqrt{2} = \sqrt{2}(1 + a) \ \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Àrea del quadrat gran

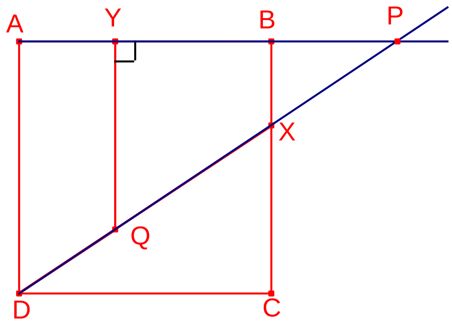
$$(1 + a)^2 = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}$$

Novembre 12-19:



El quadrat ABCD de costat 90, està dividit en tres parts d'igual àrea. Trobar la mesura dels segments CX i AY.

Solució: Siga $\overline{CX} = x$ y $\overline{AY} = y$.



L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{DCX}$ és igual a la tercera part de l'àrea del quadrat ABCD:

$\frac{90x}{2} = \frac{1}{3}90^2$. Resolent l'equació:

$$x = 60.$$

$$\overline{BX} = 90 - 60 = 30$$

La recta DX i la recta AB es tallen en el punto P.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DCX}$, $\overset{\Delta}{PBX}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{PB}}{30} = \frac{90}{60}$. Resolent l'equació:

$$\overline{BP} = 45.$$

$$\overline{PY} = 135 - y.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PYQ}$, $\overset{\Delta}{PBX}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{QY}}{1355 - y} = \frac{30}{45} \qquad (1)$$

L'àrea del trapezi ADQY és igual a la tercera part de l'àrea del quadrat ABCD:

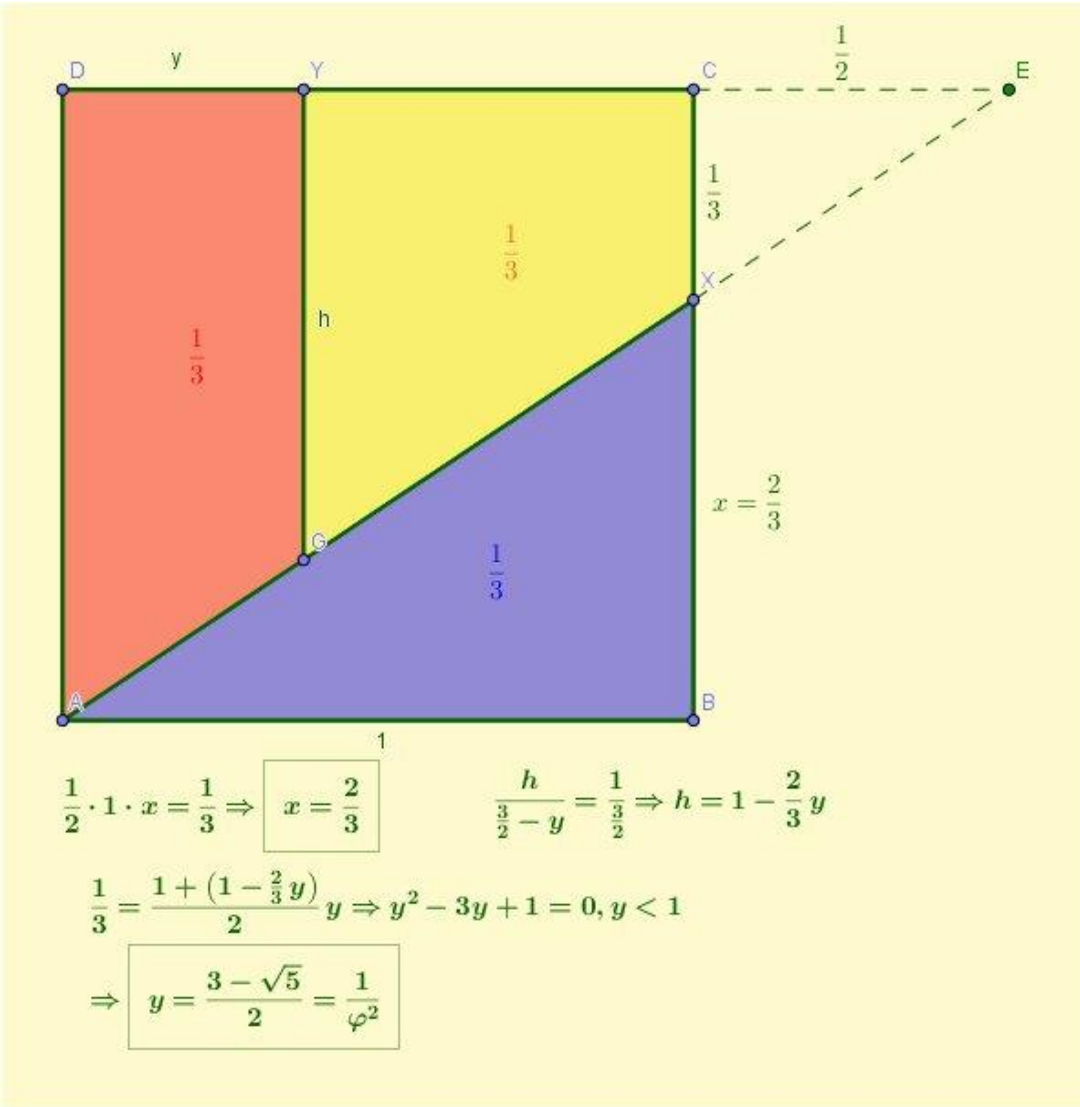
$$\frac{90 + \overline{QY}}{2}y = \frac{1}{3}90^2 \qquad (2)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

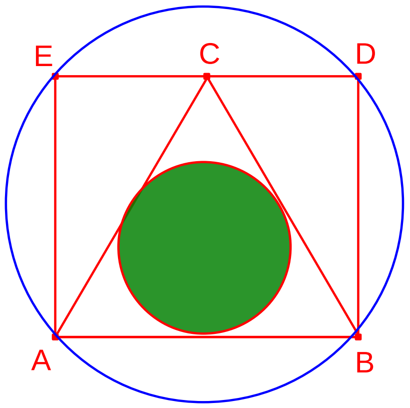
$\begin{cases} \frac{\overline{QY}}{1355 - y} = \frac{30}{45} \\ \frac{90 - \overline{QY}}{2}y = 2700 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$$\begin{cases} \overline{QY} = 30\sqrt{5} \\ y = 135 - 45\sqrt{5} \approx 34.38 \end{cases}.$$

<u>Solució Ignacio Larrosa (@ilarrosac)</u>: En aquesta solució el costat del quadrat mesura 1

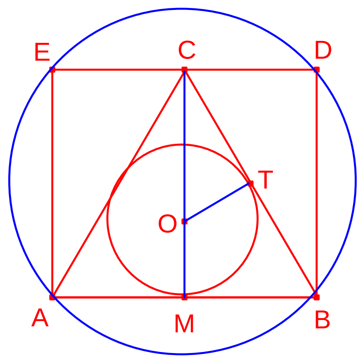


Novembre 13-14:



A la figura ΔABC és un triangle equilàter circumscrit a un cercle de radi 1. Una circumferència està circumscrita al rectangle ABDE. Calcular el diàmetre de la circumferència.

Solució: Siga O el centre de la circumferència inscrita en el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$. Siguen M i T els punts de tangència de la circumferència inscrita i les costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, respectivament.



$$\overline{OM} = \overline{OT} = 1,\ \angle OCT = 30^{\circ}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTC}$:

$$\overline{OC} = 2,\ \overline{CT} = \sqrt{3}.$$

$$\overline{BC} = \overline{CM} = \overline{OM} + \overline{OC} = 3,\ \overline{AB} = 2\overline{CT} = 2\sqrt{3}.$$

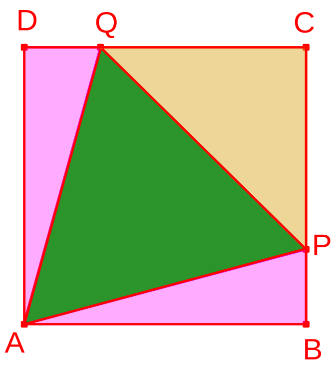
El diàmetre de la circumferència circumscrita al rectangle ABDE és igual a la seua diagonal.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 3^2 = 21.$$

$$\overline{AD} = \sqrt{21}.$$

Novembre 15-22:



El quadrat ABCD té costat a. El triangle ΔAPQ és equilàter. Calcular el costat del triangle ΔAPQ i demostrar que la suma d'àrees dels triangles ΔABP i ΔADQ és igual a l'àrea del triangle ΔCQP

Solució: a) Siga $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{AQ} = c$. $\angle BAP = \angle DAQ = 15^{\circ}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABP}$:

$$\cos 15^{\circ} = \frac{a}{c}.\ c = \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)a.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABP}$:

$$\frac{\overline{BP}}{a} = \text{tg}15^o.\ \overline{BP} = \left(2-\sqrt{3}\right)a.\ \overline{PC} = a - \overline{BP} = \left(\sqrt{3}-1\right)a.$$

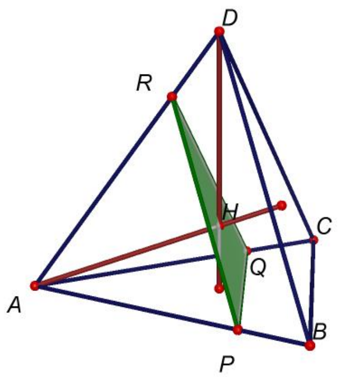
$$\text{b) } S_{ABP} = \frac{1}{2}a \cdot \overline{BP} = \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)a^2.$$

$$S_{ABP} + S_{ADQ} = \left(2-\sqrt{3}\right)a^2.$$

$$S_{PCQ} = \frac{1}{2}\overline{PC}^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)^2 a^2 = \left(2-\sqrt{3}\right)a^2.$$

Aleshores, $S_{ABP} + S_{ADQ} = S_{PCQ}$.

Novembre 16-17:



En un tetraedre regular d'aresta a, calcular l'àrea de la secció determinada per un pla que conté el punt d'intersecció de les altures del tetràedre i és paral·lel a una de les seues cares

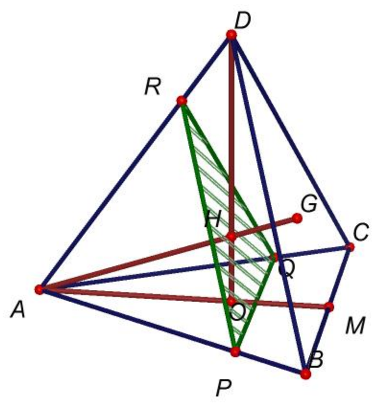
Solució: Siga $\overline{DO} = \overline{AG}$ l'altura del tetraedre regular ABCD de aresta a.

Siga H la intersecció de les dues altures.

Siga M el punt mitja de l'aresta $\overline{BC}$.

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

$$\overline{AO} = \frac{2}{3}\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOD}$

$$\overline{DO} = \overline{AG} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

Siga $x = \overline{OH}$, $\overline{AH} = \frac{\sqrt{6}}{3}a - x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOH}$:

$\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a - x\right)^2 = x^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2$. Resolent l'equació:

$$x = \frac{\sqrt{6}}{12}a,\ \overline{AH} = \frac{\sqrt{6}}{4}a.$$

Els triangles equilàters $\overset{\Delta}{PQR}$, $\overset{\Delta}{BCD}$ són homotètics amb centre d'homotècia A i raó $\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AG}}$

.

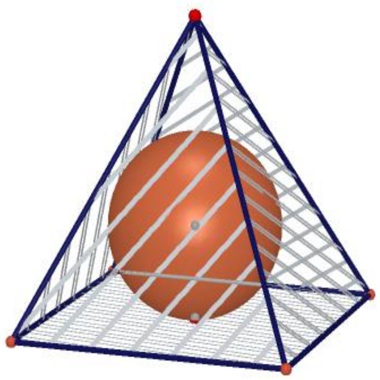
$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AG}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{4}a}{\frac{\sqrt{3}}{3}a} = \frac{3}{4}.$$

Les àrees dels dos triangles són proporcionals al quadrat de la raó d'homotècia.

$$\frac{S_{PQR}}{S_{BCD}} = \left(\frac{\overline{AH}}{\overline{AG}}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$

$$S_{PQR} = \frac{9}{16}S_{BCD} = \frac{9}{16}\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{9\sqrt{3}}{64}a^2.$$

Novembre 20-21:

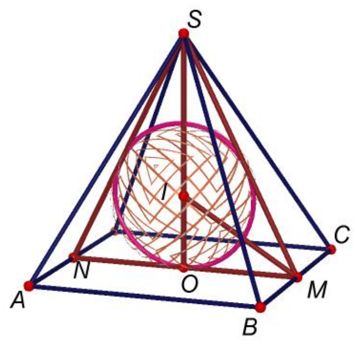


Determinar el radi de l'esfera inscrita en una piràmide regular quadrangular si el volum de la piràmide és V i l'angle entre dues cares laterals oposades és α

Solució: Siga la piràmide quadrangular regular ABCDS de base el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = a$ i altura $\overline{OS} = h$.

El volum de la piràmide és:

$$V = \frac{1}{3}a^2h.$$



Siga M el punt mitjà de l'aresta $\overline{BC}$.

Siga N el punt mitjà de l'aresta $\overline{AD}$.

$\alpha = \angle MSN.$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MOS}$:

$$a = 2h \cdot tg\frac{\alpha}{2}.$$

$$V = \frac{1}{3}\left(2h \cdot tg\frac{\alpha}{2}\right)^2 h.$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{3V}{4tg^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

$$a = \sqrt[3]{6V \cdot tg\frac{\alpha}{2}}$$

Siga I el centre de l'esfera.

Siga $\overline{OI} = r$ el radi de l'esfera.

$$\angle SMN = 90^{o} - \frac{\alpha}{2}.$$

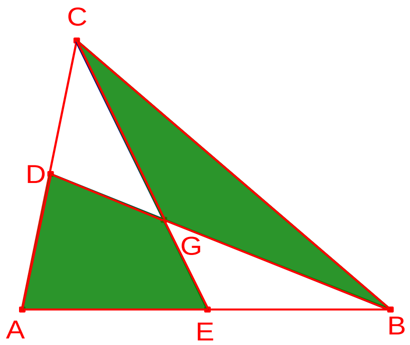
$$\angle IMO = 45^{o} - \frac{\alpha}{4}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{IOM}$:

$$r = \frac{a}{2} tg\left(45^{o} - \frac{\alpha}{4}\right).$$

$$r = \frac{1}{2} tg\left(45^{o} - \frac{\alpha}{4}\right) \cdot \sqrt[3]{6V \cdot tg\frac{\alpha}{2}}.$$

<u>Novembre 23-30:</u>

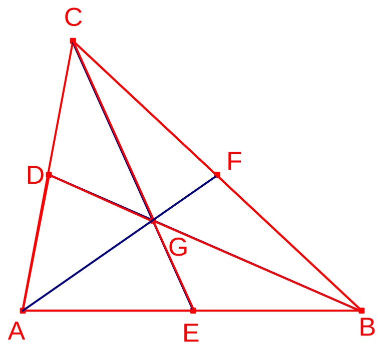


En el triangle ΔABC s'han dibuixat les mitjanes BD i CE que s'intercepten en G. Demostreu que el triangle ΔBCG i el quadrilàter AEGD tenen la mateixa àrea

<u>Solució:</u> Siga la mediana $\overline{AF}$.

Dos triangles que tenen la mateixa altura tenen les àrees proporcionals a les bases.

Aplicant la propietat del baricentre: $\overline{AG} : \overline{GF} = 2:1$.



$$S_{AGC} = 2 \cdot S_{GFC}.$$

$$S_{BCG} = 2 \cdot S_{GFC}.$$

$$S_{ADG} = S_{DCG}.$$

Aleshores, $S_{ADG} = S_{GFC}$.

Aplicant la propietat del baricentre:

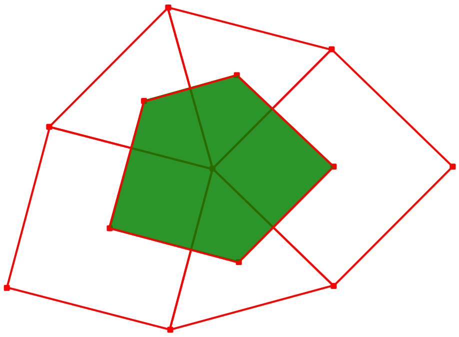
$$\overline{CG} : \overline{GE} = 2:1.$$

$$S_{AGC} = 2 \cdot S_{AGE}.$$

Aleshores, $S_{AGE} = S_{GFC}$.

Per tant, $S_{BCG} = S_{ADG} + S_{AGE} = S_{ADGE}$.

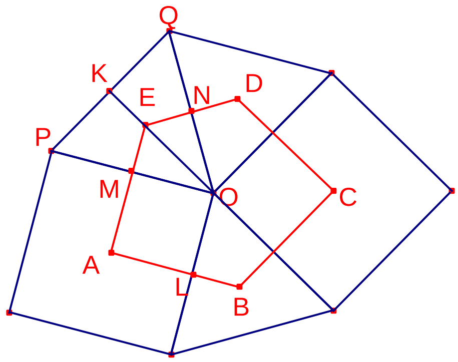
Novembre 24-25:



A la figura hi ha dibuixats dos quadrats i tres triangles equilàters de costats c. Amb els seus centres s'ha dibuixat un pentàgon. Determinar la seva àrea, el seu perímetre i els angles de les arestes adjuntes.

Solució: Siga ABCDE el pentàgon. $\overline{AE}$ es la mediatriu del costat $\overline{OP}$. $\overline{DE}$ es la mediatriu del costat $\overline{OQ}$.

$$\overline{OM} = \overline{AM} = \overline{AL} = \frac{c}{2}.$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKP}$:

$$\overline{OK} = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

Aplicant la propietat del baricentre al triangle equilàter $\overset{\Delta}{OPQ}$:

$$\overline{KE} = \overline{ME} = \overline{EN} = \frac{1}{3}\overline{OK} = \frac{\sqrt{3}}{6}c.$$

a) El perímetre del polígon ABCDE és:

$$P_{ABCDE} = 4\cdot\overline{AL} + 6\cdot\overline{ME} = \left(2+\sqrt{3}\right)c.$$

b) L'àrea del quadrilàter OMEN és:

$$S_{OMEN} = \frac{1}{3}S_{OPQ} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}c^2.$$

L'àrea del polígon ABCDE és:

$$P_{ABCDE} = 2\cdot S_{ALOM} + 3\cdot S_{OMEN} = 2\cdot\frac{1}{4}c^2 + 3\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}c^2\right) = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)c^2.$$

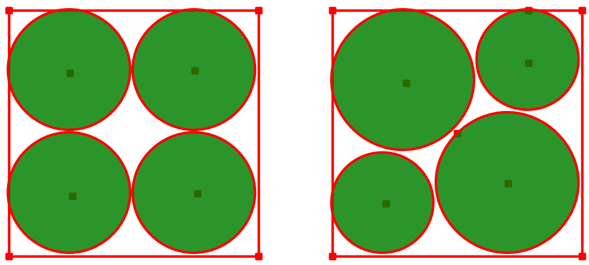
c)

$$\angle OME = \angle ONE = 90^o,\ \angle NOM = 60^o.$$

$$\angle MEN = 360^o - \left(2\cdot\angle OME + \angle NOM\right) = 120^o.$$

Els angles del polígon ABCDE són: $A = C = 90^o$, $B = D = E = 120^o$.

Novembre 26-27:



Els quadrats de la figura són iguals i de costat 1. En el de l'esquerra hi ha 4 cercles iguals tangents entre ells i tangents al quadrat. En el de la dreta hi ha dos cercles que passen pel centre del quadrat i són tangents a ell i dos més que són tangents a ells i al quadrat. Quin dels dos quadrats té més àrea ombrejada?

Solució: El radi de les circumferències de la figura de l'esquerra és: $a = \frac{1}{4}$.

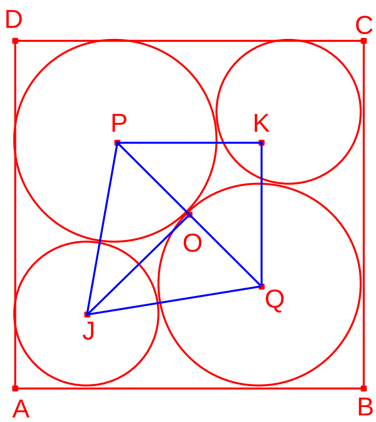
L'àrea de la zona ombrejada de l'esquerra és:

$$S_e = 4\left(\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398 \ .$$

Siga ABCD el quadrat de la figura de la dreta.

Siguen P i Q els centres de les circumferències que passen pel centre O del quadrat.

Siga r el radi de las dues circumferències. Pel centre P tracem una recta paral·lela al costat $\overline{AB}$. Pel centre Q tracem una recta paral·lela al costat $\overline{AD}$. Les dues rectes s'intercepten en el punto K.



En el triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKQ}$: $\overline{PQ} = 2r$, $\overline{PK} = \overline{QK} = 1 - 2r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKQ}$:

$2r = (1-2r)\sqrt{2}$. Resolent l'equació: $r = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Siga J el centre de la circumferència petita i s el seu radi.

$$\overline{AJ} = s\sqrt{2} \ .$$

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{JOP}$:

$$\overline{OJ} = \frac{\sqrt{2}}{2} - s\sqrt{2}, \ \overline{OP} = r, \ \overline{JP} = r + s \ .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{JOP}$:

$$(r+s)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - s\sqrt{2}\right)^2 + r^2 \ .$$

Simplificant:

$$s^2 + \left(-4+\sqrt{2}\right)s + \frac{1}{2} = 0 \ .$$

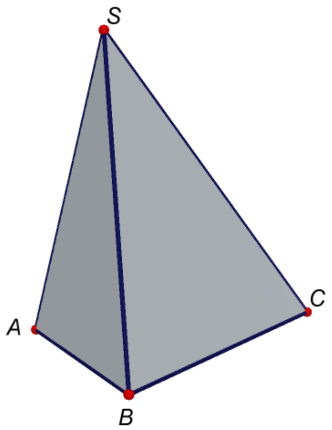
Resolent l'equació:

$$s = \frac{4-\sqrt{2}-2\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}.$$

L'àrea de la zona ombrejada de la dreta és:

$$S_d = 2\left(\pi\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)+2\left(\pi\left(\frac{4-\sqrt{2}-2\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}\right)^2\right) \approx 0.817424 .$$

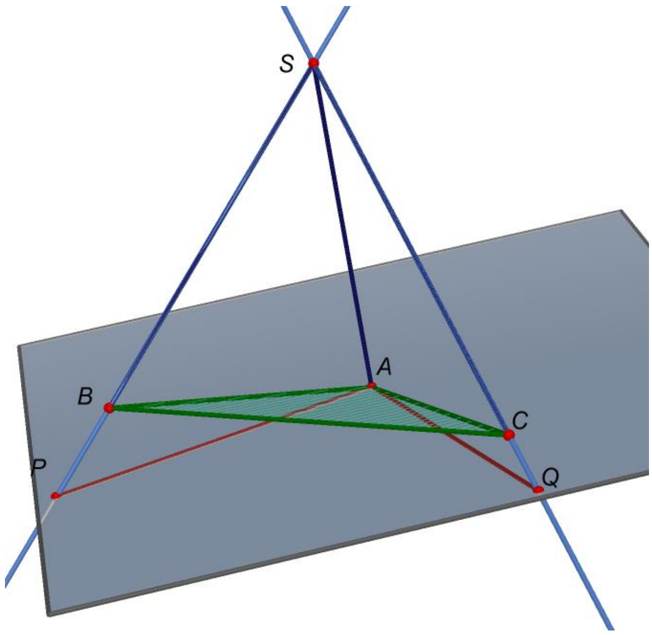
<u>Novembre 28-29:</u>



Siga el tetraedre ABCS tal que AS = 120, ∠ASB = 45° i ∠BSC = 60°.

Calcular la mesura de l'angle dièdric que forma l'aresta AS

<u>Solució:</u> Considerem el pla que passa pel punt A i és perpendicular a l'aresta $\overline{AS}$. Aquest pla talla les rectes SB, SC que formen les arestes en els punts P i Q, respectivament.



L'angle dièdric que forma l'aresta $\overline{AS}$ és igual a l'angle $\angle PAQ$. Els triangles rectangles isòsceles $P\overset{\Delta}{A}S$, $Q\overset{\Delta}{A}S$ són iguals.

$$\overline{PA} = \overline{QA} = \overline{AS} = 120^o.$$

$$\overline{SP} = \overline{SQ} = 120\sqrt{2} .$$

El triangle $P\overset{\Delta}{S}Q$ és isòsceles i, a més, $\angle PSQ = 60°$, per tant, és equilàter, per tant,

$$\overline{PQ} = \overline{SP} = \overline{SQ} = 120\sqrt{2} .$$

$$\overline{PQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 .$$

Aplicant el teorema invers de Pitàgores, $\angle PAQ = 90^o$.