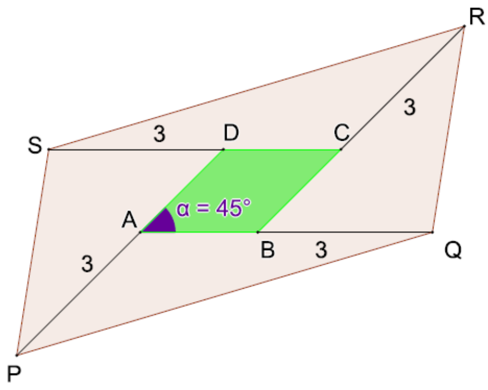
SOLUCIONS DESEMBRE 2018

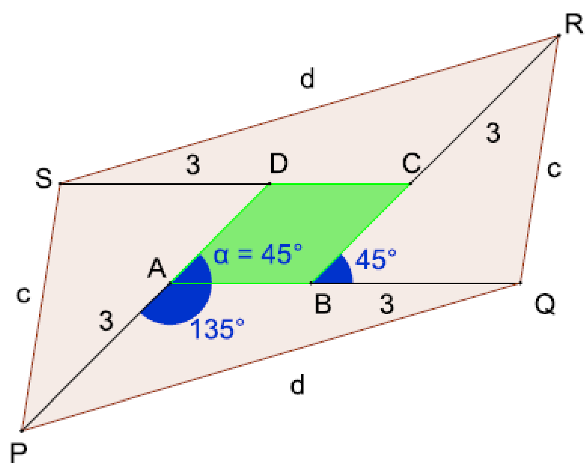
Problemes per a batxillerat i preparació a l'Olimpíada Matemàtica Espanyola (RSEM). Autor: Rafael Martínez Calafat. IES "La Plana"

<u>Desembre 1-2:</u>



Es té un rombe ABCD de costat 2 cm, de manera que els costats consecutius AB i AD formen 45°. Cada costat es perllonga 3 cm formant-se el quadrilàter PQRS. Trobar la seua àrea i perímetre.

<u>Solució:</u> De la figura d'abaix, tenim:



Perímetre:

$$c^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 45 = 34 - 15\sqrt{2} \;\Rightarrow\; c = \sqrt{34 - 15\sqrt{2}}$$

$$d^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 135 = 34 + 15\sqrt{2} \;\Rightarrow\; d = \sqrt{34 + 15\sqrt{2}}$$

$$\text{Perímetre} = 2c + 2d = 2 \cdot \sqrt{34 - 15\sqrt{2}} + 2 \cdot \sqrt{34 + 15\sqrt{2}} \approx 22{,}013$$

Àrea:

$$A_{ABCD} = \left\{ \begin{array}{c} \sin 45 = \dfrac{h}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ h = \sqrt{2} \end{array} \right\} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$A_{BQR} = \frac{5 \cdot 3 \cdot \sin 45}{2} = \frac{15\sqrt{2}}{2}$$

$$A_{APQ} = \frac{5 \cdot 3 \cdot |\sin 135|}{2} = \frac{15\sqrt{2}}{4}$$

$$A_{total} = 2\sqrt{2} + 2\frac{15\sqrt{2}}{4} + 2\frac{15\sqrt{2}}{4} = 17\sqrt{2}$$

<u>Desembre 3-10:</u> Durant les vacances d'estiu, Carles ha estat alguns dies a Londres. Durant la seva estada a Londres ha plogut 10 dies, dos d'ells ho ha fet al matí i a la vesprada, els altres huit només ha plogut pels matins o per les vesprades. Hi ha hagut 10 matins i 8 vesprades sense ploure. Quants dies ha durat l'estada de Carles a Londres?

<u>Solució:</u> Si l'estada de Carles a Londres ha durat x dies tenim 2x períodes (x matins i x tardes). A més, de l'enunciat:

x matins → 10 matins no ha plogut
x matins → y matins ha plogut

x vesprades → 8 vesprades no ha plogut
x vesprades → z vesprades ha plogut

Per tant: 2x = 10 + y + 8 + z = 18 + (y + z). Però y + z = 10 + 2 ja que ha plogut matí i vesprada, 2 dies i en els altres només ha plogut al matí o a la tarda. Per tant: 2x = 18 + 10 + 2 = 30 $\Rightarrow$ x = 15. L'estada de Carles a Londres ha durat 15 dies.

<u>Solució (@asitnof):</u>

0 = no plou, 1 = plou, M = matí; V =vesprada

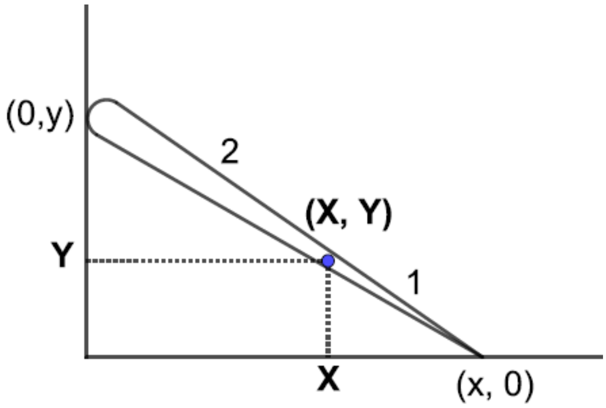
	M	V	plou	plou matí o vesprada	no plou matí	no plou vesprades
2 dies	1	1	2			
x dies	1	0	x	x		x
y dies	0	1	y	y	y	
z dies	0	0			z	z
			10 dies	8 dies	10 dies	8 dies

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y & = & 8 \\ y + z & = & 10 \\ x + z & = & 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 2(x + y + z) = 26 \quad \Rightarrow \quad x + y + z = 13$$

Dies en Londres (13 + 2 =) 15

<u>Desembre 4-5:</u> Considerem en el pla un sistema de coordenades cartesià. Una agulla recta està al llarg de l'eix Y positiu amb la punta de l'agulla en (0, 0). Un punt P de la meitat inferior de l'agulla divideix la longitud de l'agulla en la raó 1: 2. La punta de l'agulla s'arrossega des de l'origen cap a la part positiva de l'eix X mentre que la part del trau baixa per l'eix de les Y. Trobar l'expressió algebraica de la corba descrita pel punt P.

Solució: Denotarem per l la longitud de l'agulla. Si els punts finals de l'agulla són (0, y) i (x, 0) i el punt P té per coordenades (X, Y) llavors:



$$\mathbf{X} = \frac{2x}{3} \qquad \mathbf{Y} = \frac{y}{3}$$

Com $l^2 = x^2 + y^2$ tenim:

$$l^2 = \left(\frac{3\mathbf{X}}{2}\right)^2 + (3\mathbf{Y})^2$$

$$1 = \frac{\mathbf{X}^2}{\frac{4l^2}{9}} + \frac{\mathbf{Y}^2}{\frac{l^2}{9}}$$

Que correspon a una el·lipse amb semieixos $a = \frac{2l}{3}$ i $b = \frac{l}{3}$

Desembre 6: Quants nombres podem generar sumant un màxim de cinc dosos i cinc sets?

Solució: Ens pregunten pel rang de valors de 2n + 7m amb n, m $\in$ {0, 1, 2, 3, 4, 5} i no simultàniament nuls.

m	2n + 7m	
0	2n	2, 4, 6, 8, 10
1	2n+7	7, 9, 11, 13, 15, 17
2	2n+14	14, 16, 18. 20, 22, 24,
3	2n+21	21, 23, 25, 27, 29, 31,
4	2n+ 28	28, 30, 32, 34, 36, 38,
5	2n+35	35, 37, 39, 41, 43, 45,

Per tant el rang de valors arriba fins al 45 i els nombres que no podem generar són: 1, 3, 5, 12, 17, 26, 33, 40, 42 i 44. En total es poden generar (45 - 10 =) 35 nombres.

També amb un full de càlcul:

		m					
	2n+7m	0	1	2	3	4	5
n	0		7	14	21	28	35
	1	2	9	16	23	30	37
	2	4	11	18	25	32	39
	3	6	13	20	27	34	41
	4	8	15	22	29	36	43
	5	10	17	24	31	38	45

Desembre 7-8: Els nombres naturals es col·loquen com indica l'esquema següent:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & 3 & 4 & \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ - & - & - & - & - \end{array}$$

Quant val la suma de tots els nombres de la fila on es troba el 2018? Quin nombre hi ha sobre del 2018?

Solució: Fent un cop d'ull a la taula tenim que la fila n-ésima acaba en n^2 i, ja que, la fila n - 1 acaba a $(n - 1)^2$, la fila n comença a $(n - 1)^2 + 1$. En altres paraules, la fila n-ésima comença en $n^2 – 2n + 2$ i acaba en n^2, i per tant la fila n-ésima té ($n^2 – (n^2 – 2n + 1) =$) $2n – 1$ nombres. A més, un número, en la fila n, és igual al que té dalt més $2n – 2$.

Com $44 < \sqrt{2018} < 45$ tenim que el 2018 està en la fila 45 que comença per ($(n – 1)^2 + 1 = 44^2 + 1 =$) 1937 i acaba en ($n^2 = 45^2 =$) 2015. Els nombres en aquesta (i en qualsevol altra) fila són una PA de primer terme 1037 i diferencia 1 i l'últim terme ($45^2 =$) 2025 amb ($2n – 1 = 2·45 – 1 =$) 89 sumands. Per tant:

$$S = \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n =\right) \frac{1937 + 2025}{2} \cdot 89 = 176309$$

Per últim, el número que té damunt el 2018 és x amb:

$$x + (2n - 2) = x + (2 \cdot 45 - 2) = x + 88 = 2018 \quad \Rightarrow \quad x = 1930$$

Desembre 9-16: El departament de matemàtiques de l'IES "La Plana" està compost per sis professors, tres de cada un dels possibles sexes. Cert dia, a la reunió de departament, arriben aleatòriament, ¿quina és la probabilitat que l'ordre d'arribada tingui els sexes alternats?

Solució: El primer professor a arribar pot ser qualsevol dels sis (casos favorables sis, casos possibles sis). La segona persona ha de ser de sexe diferent al del primer professor (casos favorables tres, casos possibles cinc). El tercer professor ha de tenir el mateix sexe que el primer professor (casos favorables dos, casos possibles quatre). El quart professor ha de tenir el mateix sexe que el segon (casos favorables dos, casos possibles tres). El cinquè professor ha de ser del mateix sexe que el primer i el tercer (casos favorables un, casos possibles dos). El sisè professor ha de ser del mateix sexe que el segon i el quart (casos favorables un, casos possibles un). Per tant, la probabilitat sol·licitada és:

$$P = \frac{6}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{10}$$

Desembre 11: Resoldre en $\mathbb{N}$:

$$\mathbf{x^3 + 2x + 16 = 3y + 5}$$

Solució: Tenim:

$$x^3 + 2x = 3y - 11 \quad \Rightarrow \quad x^3 + 2x = 3(y-4) + 1 \qquad (*)$$

Podem interpretar (*) com: ¿què valors de x fan que $x^3 + 2x$ done residu 1 al dividir l'expressió $x^3 + 2x$ per 3. Resolem $x^3 + 2x = 1(3)$

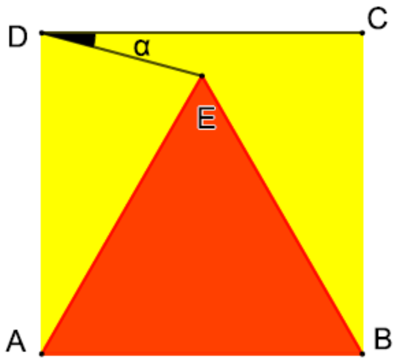
$$\text{Si } x = 0(3) \Rightarrow x^2 = 0(3) \Rightarrow x(x^2+2) = 0(3)$$

$$\text{Si } x = 1(3) \Rightarrow x^2 = 1(3) \Rightarrow x(x^2+2) = 0(3)$$

$$\text{Si } x = 2(3) \Rightarrow x^2 = 1(3) \Rightarrow x(x^2+2) = 0(3)$$

Com mai $x^3 + 2x = 1(3)$, l'equació proposada no té solucions enteres positives

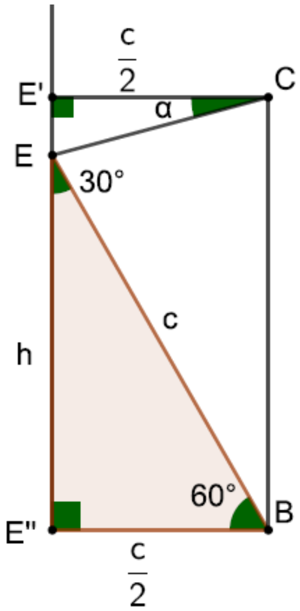
<u>Desembre 12:</u>



En la figura ABCD es un quadrat. Demostrar:

$$\boldsymbol{\Delta ABE \text{ es equilàter } \Leftrightarrow \alpha = 15°}$$

<u>Solució:</u>



$\Rightarrow$

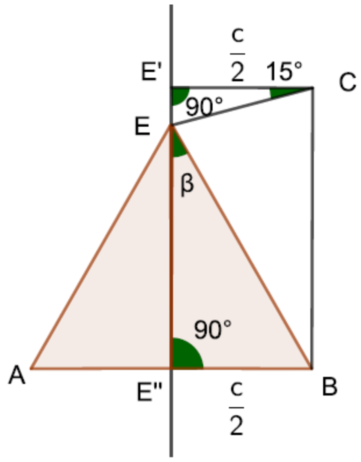
En la figura:

$$h = EE'' = \frac{E''B}{\text{tag}30} = \frac{c/2}{\sqrt{3}/3} = \frac{3c}{2\sqrt{3}} = \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

$$EE' = E'E'' - EE'' = c - \frac{c\sqrt{3}}{2} = c\frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

En $\Delta EE'C$

$$\text{tag}\alpha = \frac{EE'}{\frac{c}{2}} = \frac{\frac{c(2-\sqrt{3})}{2}}{\frac{c}{2}} = 2 - \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 15°$$



$\Leftarrow$

En ΔE’EC:

$$E'E = \frac{c}{2} \cdot \text{tag}15 = c \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

En ΔEE’’B:

$$\text{tag}\beta = \frac{c/2}{EE''} = \frac{c/2}{c - E'E} = \frac{c/2}{c - c\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \ \beta = 30°$$

$\Rightarrow$ ∠E’’BE = 60° $\Rightarrow$ ΔABC és un triangle 60°-60°-60°, es dir, es equilàter.

Desembre 13-20: El dispensador de "snacks" de l'institut té 11 classes de "snacks", tres que costen 0,5 € cada un, quatre que costen 1 € cadascun i quatre que costen 2 € cada un. Aitana vol convidar a Dani i la Laia. De quantes maneres pot comprar Aitana tres "snacks" gastant-se com a màxim quatre euros?

Solució: Tindrem la següent taula de possibilitats:

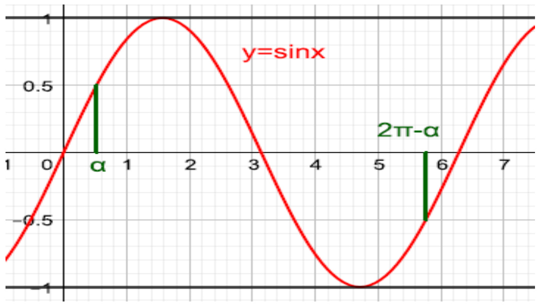
Preu dels snacks	possibilitats
2 – 1 – 0,5	4·4·3 = 48
2 – 1 – 1	4·4·4 = 64
2 – 0,5 – 0,5	4·3·3 = 36
1 – 1 – 1	4·4·4 = 64
1 – 1 – 0,5	4·4·3 = 48
1 – 0,5 – 0,5	4·3·3 = 36
0,5 – 0,5 – 0,5	3·3·3 = 27

En total (48 + 64 + 36 + 64 + 48 + 36 + 27 =) 323. Per exemple, si es tria gastar-se 0,5 € en cada snack hi ha 3 oportunitats per al snack de Dani, 3 oportunitats per al snack de Laia i 3 oportunitats per al snack d’Aitana.

Desembre 14: Calcular raonadament el valor de:

$$\mathbf{\sin 50° + \sin 110° + \sin 180° + \sin 250° + \sin 310°}$$

Solució: Tenim, de la gràfica de la funció sinus d’un angle (en radians):



que sin α = - sin (360° - α). Per tant:

$$\sin(50°) = -\sin(360° - 50°) = -\sin(310°)$$

$$\sin(110°) = -\sin(360° - 110°) = -\sin(250°)$$

A més: sin (180°) = 0

D'on:

sin (50°) + sin (110°) + sin (180°) + sin (250°) + sin (310°) = - sin (310°) – sin (250°) + 0 + sin(250°) + sin (310°) = 0

<u>Solució Jordi Herrero Martínez (3ESO. IES "Laurona"):</u>

Com sin (180°) = 0 i $\sin(a) + \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$, la suma proposada se redueix a:

$$\begin{aligned}\sin 50° + \sin 110° + \sin 180° + \sin 250° + \sin 310°\\ &= 2\sin(80°) \cdot \cos(30°) + 2\sin(280°) \cdot \cos(30°)\\ &= 2 \cdot \cos(30°)\big(\sin(80°) + \sin(280°)\big)\\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \big(\sin(80°) + \sin(280°)\big) = 0\end{aligned}$$

ja que, sin (x) + sin (360 – x) = 0 (substituint x per 80°)

<u>Desembre 15:</u> Quants dels primers 2019 enters positius són múltiples de 5 o d'11 o de 23?

<u>Solució:</u> Tindrem:

$$A = \{x \in N \mid x \le 2019 \text{ y } x = \dot{\widehat{5}}\} \Rightarrow \text{Card }(A) = \left\lfloor \frac{2019}{5} \right\rfloor = 403$$

$$B = \{x \in N \mid x \le 2019 \text{ y } x = \dot{\widehat{11}}\} \Rightarrow \text{Card }(B) = \left\lfloor \frac{2019}{11} \right\rfloor = 183$$

$$C = \{x \in N \mid x \le 2019 \text{ y } x = \dot{\widehat{23}}\} \Rightarrow \text{Card }(C) = \left\lfloor \frac{2019}{23} \right\rfloor = 87$$

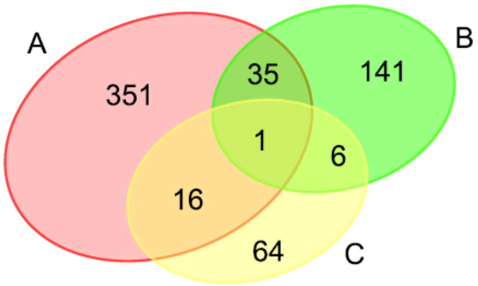
$$A \cap B = \{x \in N \mid x \le 2019 \text{ y } x = \dot{\widehat{5 \cdot 11}} = \dot{\widehat{55}}\} \Rightarrow \text{Card }(A \cap B) = \left\lfloor \frac{2019}{55} \right\rfloor = 36$$

$$A \cap C = \{x \in N \mid x \le 2019 \text{ y } x = \dot{\widehat{5 \cdot 23}} = \dot{\widehat{115}}\} \Rightarrow \text{Card }(A \cap C) = \left\lfloor \frac{2019}{115} \right\rfloor = 17$$

$$B \cap C = \{x \in N \mid x \le 2019 \text{ y } x = \dot{\widehat{11 \cdot 23}} = \dot{\widehat{253}}\} \Rightarrow \text{Card }(B \cap C) = \left\lfloor \frac{2019}{253} \right\rfloor = 7$$

$$A \cap B \cap C = \{x \in N \mid x \le 2019 \text{ y } x = \dot{\widehat{5 \cdot 23 \cdot 11}} = \dot{\widehat{1265}}\} \Rightarrow \text{Card }(A \cap B \cap C) = \left\lfloor \frac{2019}{1265} \right\rfloor = 1$$

I ara:



anem omplint el diagrama de Venn mirant de baix a dalt el raonament anterior és a dir: A∩B∩C → 1; B∩C → 7 – 1 = 6; A∩C → 17 – 1 = 16, ...

Per últim:

351 + 35 + 1 + 16 + 6 + 141 + 64 = 614

O bé, apliquem la coneguda fórmula:

Card (A∪B∪C) = Card (A) + Card (B) + Card (C) – Card (A∩B) – Card (A∩C) – Card (C∩B) + Card (A∩B∩C) = 403 + 183 + 87 – 36 – 17 – 7 +1 = 614

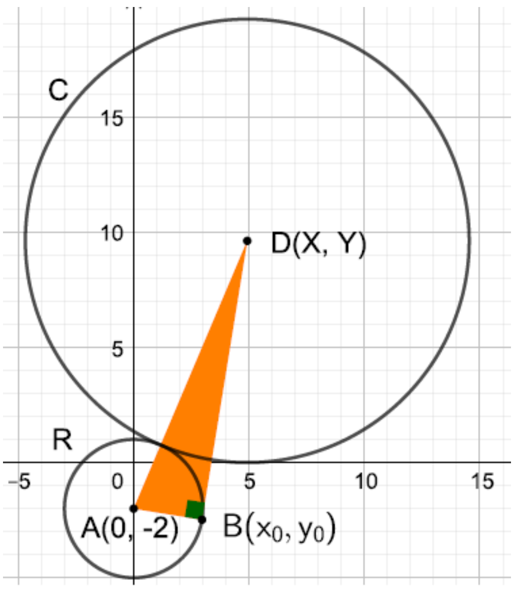
<u>Desembre 17-18:</u> Siga R el cercle $x^2 + (y + 2)^2 = 9$. Siga S el conjunt de tots els cercles del plan tals que per a cada cercle C en S tenim:

1.- C està en el primer quadrant fora de R.

2.- C és tangent a R i a l'eix X.

Quin objecte geomètric tracen els centres dels cercles de S?

<u>Solució:</u>



A la figura siga C una de les circumferències tangents a l'eix X i tangent a la circumferència R. Sigui D(X, Y) el centre de C i DB la tangent a R per D(X, Y). Queda generat el triangle ΔABD, rectangle en B. En variar B en la circumferència R es genera, per D, el lloc geomètric buscat

$$R \equiv \; x^2 + (y-2)^2 = 9$$

Equació de la recta BD:

$$2x + 2(y+2)y' = 0 \;\Rightarrow\; y' = -\frac{x}{y+2} \;\Rightarrow \begin{Bmatrix}\text{pendiente} \\ \text{de BD}\end{Bmatrix} - \frac{x_0}{y_0+2}$$

$$Y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0+2}(X - x_0)$$

Per altra part D està en la circumferència de centre A(0, - 2) i radi 3+Y:

$$(X-0)^2 + (Y+2)^2 = (Y+3)^2 \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{X^2}{2} - \frac{5}{2}$$

Aquesta última és l'equació del lloc geomètric. La resta servirà per saber les restriccions que hi ha sobre el punt B de la circumferència donada, R. Les coordenades del punt D són les solucions del sistema:

$$\left.\begin{array}{r} X^2+(Y+2)^2=(Y+3)^2 \\ Y-y_0=-\dfrac{x_0}{y_0+2}(X-x_0) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} Y=\dfrac{X^2-5}{2} \\ Y-y_0=-\dfrac{x_0}{y_0+2}(X-x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{X^2}{2}-\frac{5}{2}-y_0$$

$$=-\frac{x_0}{y_0+2}(X-x_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}X^2+\frac{x_0}{y_0+2}X-\frac{5}{2}-y_0-\frac{x_0^2}{y_0+2}=0$$

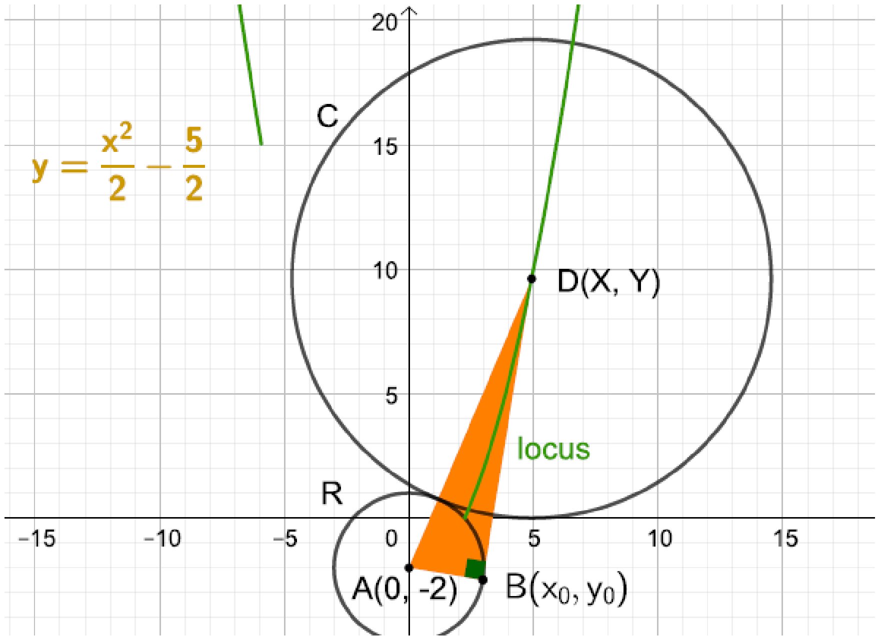
$$\Rightarrow \quad X=-\frac{x_0}{y_0+2}\pm\frac{\sqrt{5(y_0+2)^2+2y_0(y_0+2)^2+2x_0^2y_0+5x_0^2}}{y_0+2}$$

$$=-\frac{x_0}{y_0+2}\pm\frac{\sqrt{5\cdot 9+2y_0\cdot 9}}{y_0+2}=\frac{-x_0\pm 3\sqrt{5+2y_0}}{y_0+2}$$

Ja que:

$$x_0^2+(y_0-2)^2=9$$

l'arrel corresponent al signe menys (més) correspon a la branca del lloc geomètric de l'esquerra (dreta). Les restriccions sobre les coordenades de B són: $5 + 2y_0 \geq 0$ y $y_0 \neq -2$. En el cas $y_0 = -2$, D és (3, 2)



<u>Desembre 19:</u> Quin és el major valor de n tal que 22^n és un divisor de 2018!?

<u>Solució:</u> Tindrem $22^n = 2^n \cdot 11^n$. Per tant n serà igual al major exponent amb que aparega el 2 o el 11 a la descomposició factorial de 2018!. Com entre múltiples successius d'11 hi ha, almenys, 5 múltiples de 2, hi haurà molts més múltiples de 2 que de 11. En definitiva, el major valor de n tal que 22^n és divisor de 2018! és l'exponent del factor 11 a la descomposició factorial de 2018!

Imaginem tots els factors de 2018!

$$2018! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^2\cdot 5\cdot(2\cdot 3)\cdot 7\cdot 2^3\cdot 3^2\cdot(2\cdot 5)\cdot 11\cdot(2^2\cdot 3)\cdot 13\cdot(2\cdot 7)\cdot \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot(2\cdot 1009)$$

Cada grup d'11 factors conté un factor 11. Cada grup de 11^2 factors conté un altre factor 11. Cada grup de 11^3 factors conté un altre factor 11 i així successivament.

Per tant, factors 11 a la descomposició factorial de 2018! hi ha ($1331 = 11^3 < 2018 < 11^4 = 14641$)

$$\left\lfloor \frac{2018}{11} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2018}{11^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2018}{11^3} \right\rfloor = 183 + 16 + 1 = 200$$

La major potència de 22 que és divisor de 2018! és 22^{200}

Desembre 21: Trobar els enters positius que compleixen:

$$\mathbf{x^3 + y^3 + z^3 = 1099}$$

Solució: Supongam $0 < x \le y \le z$. Aleshores:

$$3z^3 \ge x^3 + y^3 + z^3 = 1099 \quad \Rightarrow \quad z \ge \left\lfloor \sqrt[3]{\frac{1099}{3}} \right\rfloor = 7$$

$$z^3 \le x^3 + y^3 + z^3 = 1099 \quad \Rightarrow \quad z \le \left\lfloor \sqrt[3]{1099} \right\rfloor = 10$$

Es a dir, z pot valdre 7, o 8, o 9 o 10.

Si $z = 10$, $x^3 + y^3 = 99$

$$\left.\begin{array}{l} 2y^3 \ge x^3 + y^3 = 99 \quad \Rightarrow \quad y \ge \left\lfloor \sqrt[3]{\frac{99}{2}} \right\rfloor = 3 \\ y^3 \le x^3 + y^3 = 99 \quad \Rightarrow \quad y \le \left\lfloor \sqrt[3]{99} \right\rfloor = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = 3 \text{ o } y = 4$$

$$\text{Si } y = 3 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 99 - 27 = 72 \quad \Rightarrow x = \sqrt[3]{72} \notin \mathbb{N}$$

$$\text{Si } y = 4 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 99 - 64 = 35 \quad \Rightarrow x = \sqrt[3]{35} \notin \mathbb{N}$$

Si $z = 9$, $x^3 + y^3 = 370$

$$\left.\begin{array}{l} 2y^3 \ge x^3 + y^3 = 370 \quad \Rightarrow \quad y \ge \left\lfloor \sqrt[3]{\frac{370}{2}} \right\rfloor = 5 \\ y^3 \le x^3 + y^3 = 370 \quad \Rightarrow \quad y \le \left\lfloor \sqrt[3]{370} \right\rfloor = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = 5 \text{ o } y = 6 \text{ o } y = 7$$

$$\text{Si } y = 5 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 370 - 125 = 245 \quad \Rightarrow x = \sqrt[3]{245} \notin \mathbb{N}$$

$$\text{Si } y = 6 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 370 - 216 = 154 \quad \Rightarrow x = \sqrt[3]{154} \notin \mathbb{N}$$

$$\text{Si } y = 7 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 370 - 343 = 216 \quad \Rightarrow x = \sqrt[3]{216} = 6 \quad \Rightarrow \quad z = 9, y = 7 \text{ y } x = 6$$

Si $z = 8$, $x^3 + y^3 = 587$

$$\left.\begin{array}{l} 2y^3 \ge x^3 + y^3 = 587 \quad \Rightarrow \quad y \ge \left\lfloor \sqrt[3]{\frac{587}{2}} \right\rfloor = 6 \\ y^3 \le x^3 + y^3 = 587 \quad \Rightarrow \quad y \le \left\lfloor \sqrt[3]{587} \right\rfloor = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = 6 \text{ o } y = 7 \text{ o } y = 8$$

$$\text{Si } y = 6 \ \Rightarrow\ x^3 = 587 - 216 = 371 \ \Rightarrow x = \sqrt[3]{371} \notin \mathbb{N}$$

$$\text{Si } y = 7 \ \Rightarrow\ x^3 = 587 - 343 = 244 \ \Rightarrow x = \sqrt[3]{244} \notin \mathbb{N}$$

$$\text{Si } y = 8 \ \Rightarrow\ x^3 = 587 - 512 = 75 \ \Rightarrow x = \sqrt[3]{75} \notin \mathbb{N}$$

Si z = 7, $x^3 + y^3 = 756$

$$\left.\begin{array}{l} 2y^3 \geq x^3 + y^3 = 756 \ \Rightarrow\ y \geq \left\lceil \sqrt[3]{\dfrac{756}{2}} \right\rceil = 7 \\ y^3 \leq x^3 + y^3 = 756 \ \Rightarrow\ y \leq \left\lfloor \sqrt[3]{756} \right\rfloor = 9 \end{array}\right\} \ \Rightarrow\ 7 \leq y \leq z = 7 \ \Rightarrow\ y = 7$$

$$\text{Si } y = 7 \ \Rightarrow\ x^3 = 756 - 343 = 413 \ \Rightarrow x = \sqrt[3]{413} \notin \mathbb{N}$$

Per tant hi ha una única solució: x = 3, y = 7 y z = 9 i les seues permutacions.

<u>Desembre 22-23:</u> Almenys 50 alumnes de l'IES "La Plana" es van a graduar en el curs que acaba en 2019. Cada graduat pot convidar com a molt a deu persones. En total són convidades 445 persones a l'acte de graduació. Per als convidats es disposa de 25 files amb 25 seients cadascuna. Podem assegurar que cada grup de persones convidades per cada alumne podran seure juntes en una mateixa fila?

<u>Solució:</u> Ordenem els grups de convidats de manera que comencem pels grups més nombrosos i acabem pels grups menys nombrosos:

$$10 \geq N_1 \geq N_2 \geq N_3 \geq \cdots\cdots \geq N_k \geq \cdots\cdots$$

Començarem establint als grups a la primera fila fins que un grup sencer no càpiga a la primera fila. Aquest grup serà situat a la segona fila. Seguirem així, fins que un grup no càpiga sencer a la segona fila. Si aquest grup cal sencer a la primera fila serà situat allà. Si no hi cap sencer a la primera fila serà situats a la tercera i així successivament. Suposem que actuant així arribem a un grup que no cap sencer en una mateixa fila. Sigui aquest grup el k-ésim i suposem que consta de Nk persones. llavors:

$k \geq 51$ (ja que en cadascuna de les 25 files caben al menys 2 grups i 2·25 = 50)

$N_k \cdot k \leq 445$ (ja que els k – 1 grups anteriors tenen al menys N_k membres cadascun d'ells).

De l'última desigualtat tenim:

$$N_k \leq \frac{445}{k} \leq \frac{445}{51} = 8{,}7254\ldots < 9$$

Es a dir, $N_k \leq 8$. Si 8 persones no caben juntes en alguna fila, aleshores en cada fila hi ha al menys (25 – 7 =) 18 persones, però: 18·25 = 450 > 445 i ja hem plegat a l'absurd.

<u>Desembre 24-31:</u> Resoldre en $\mathbb{Z}^+$:

$$\mathbf{x^4 + 2x^2 + 18 = 5y - 12}$$

<u>Solució:</u> Tindrem:

$$x^2(x^2+2) = 5y - 30 \ \Rightarrow\ x^2(x^2+2) = 5(y-6)$$

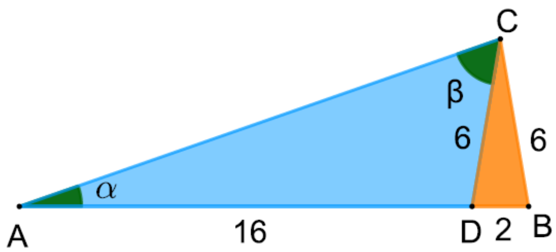
Podem interpretar l'última equació com: quins valors de x fan que $x^2(x^2 + 2) = 0(5)$? Resolgam $x^2(x^2 + 2) = 0(5)$

$$x = 0(5) \;\Rightarrow\; x^2 = 0(5) \;\Rightarrow\; x^2(x^2+2) = 0(5)$$
$$x = 1(5) \;\Rightarrow\; x^2 = 1(5) \;\Rightarrow\; x^2(x^2+2) = 3(5)$$
$$x = 2(5) \;\Rightarrow\; x^2 = 4(5) \;\Rightarrow\; x^2(x^2+2) = 4(5)$$
$$x = 3(5) \;\Rightarrow\; x^2 = 4(5) \;\Rightarrow\; x^2(x^2+2) = 4(5)$$
$$x = 4(5) \;\Rightarrow\; x^2 = 1(5) \;\Rightarrow\; x^2(x^2+2) = 3(5)$$

Les solucions per a x són els valors de x que donen residu 0 al dividir-los per 5 es a dir, són: $x = 5\cdot n$ amb $n\in\{1, 2, 3, ...\}$. Les solucions per a y són:

$$x^2(x^2+2) = 5(y-6) \;\Rightarrow\; 25n^2(25n^2+2) = 5(y-6) \;\Rightarrow\; 5n^2(25n^2+2) + 6 = y$$

<u>Desembre 25-26:</u>



En la figura adjunta es té: AD = 16, DB = 2, DC = BC = 6.

Trobar AC i expressar β en funció de α.

<u>Solució:</u> Considerem els triangles ΔABC i ΔCDB; aquests tenen en comú l'angle en B ia més els costats adjunts al vèrtex B en els dos triangles són proporcionals:

En ΔABC

$$\frac{CB}{AB} = \frac{6}{16+2} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

En ΔCDB

$$\frac{BD}{BC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

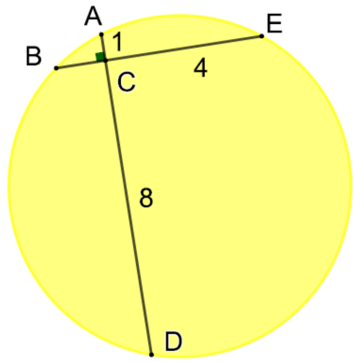
Per tant, $\Delta ABC \approx \Delta CDB$ (ja que tenen un angle igual i proporcionals als costats adjacents a l'angle igual). Per tant:

$$\left(\frac{\Delta ABC}{\Delta CDB}\right) \quad \frac{CB}{DB} = \frac{AC}{CD} = \frac{AB}{CB} \;\Rightarrow\; \frac{6}{2} = 3 = \frac{AC}{6} \;\Rightarrow\; AC = 18$$

Per a l'última pregunta tenim: Els dos triangles són isòsceles, per tant:

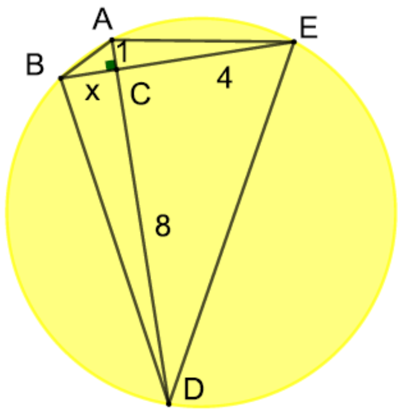
$$\angle ABC = \frac{180-\alpha}{2} = \angle BCA = \alpha + \beta \;\Rightarrow\; \beta = \frac{180-\alpha}{2} - \alpha = \frac{180-3\alpha}{2}$$

Desembre 27-28:



Siguen AD i BE dues cordes perpendiculars d'una circumferència que es tallen en C. Suposem que AC = 1, CE = 4 i CD = 8. Trobar àrea i perímetre del quadrilàter ABDE

Solució:



Respecte de l'àrea, tindrem:

$$\begin{aligned} A_{ABDE} &= A_{\Delta ADE} + A_{\Delta ABD} = \left(\frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}\right) \\ &= \frac{(1+8)\cdot 4}{2} + \frac{(1+8)\cdot x}{2} \\ &= 18 + \frac{9x}{2} \end{aligned}$$

I respecte del perímetre:

$$\begin{aligned} \text{Perímetre} &= AB + AE + ED + DB \\ &= \sqrt{1^2 + x^2} + \sqrt{1^2 + 4^2} \\ &+ \sqrt{4^2 + 8^2} + \sqrt{8^2 + x^2} \end{aligned}$$

$$\text{Perímetre} = \sqrt{1^2 + x^2} + \sqrt{64 + x^2} + \sqrt{17} + 4\sqrt{5}$$

Només cal calcular x. Considerem els triangles ΔACE i ΔBCD. Els dos són rectangles i a més $\angle DBC = \angle DAE$ (ja que tots dos abasten l'arc que va des de D a E). Per tant $\Delta ACE \approx \Delta BCD$, d'on:

$$\frac{1}{x} = \frac{4}{8} \Rightarrow x = 2$$

Per tant:

$$A_{ABDE} = 18 + \frac{9x}{2} = 18 + 9 = 27, \text{Perímetre} = \sqrt{1^2 + x^2} + \sqrt{64 + x^2} + \sqrt{17} + 4\sqrt{5}$$
$$= 3\sqrt{17} + 5\sqrt{5}$$

Desembre 29: D'entre els enters positius amb suma de dígits igual a 32, quin o quins són els que tenen major producte de dígits?

Solució: Designem per Σ_{32} el conjunt d'enters positius amb suma de xifres igual a 32 i per Π_N el producte de les xifres de l'enter positiu N.

Si el 0 és una xifra d'un número de Σ_{32}, N, tindrem que $\Pi_N = 0$ ja que el 0 és un factor dels que participen en Π_N. Si N compte al menys un 1 i un 2 (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) a partir de N generem N_3 (N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9, $N_{5,5}$) format pels mateixos dígits que N però substituint les parelles (1, 2) ((1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9)) per tresos (quatres , cincs, sis, sets, huits, nous o dos cincs), aleshores N_3 (N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9, $N_{5,5}$) es de Σ_{32}, però aporta major producte de dígits que N ja que substitueix els parells de factors (1, 2) ((1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9)) per factors 3 (4, 5, 6, 7, 8, 9, 25). Per tant podem suposar que els números de Σ_{32} que considerem no tenen ni el dígit zero, ni el dígit 1.

Si $N \in \Sigma_{32}$ i N conté el dígit 4 (5, 6, 7, 8, 9) podem suposar que N se substitueix per $N_{2,2}$ ($N_{3,2}$, $N_{3,3}$, $N_{2,5}$, $N_{4,4}$, $N_{3,3,3}$) format pels mateixos dígits que N però substituint el dígit 4 (5, 6, 7, 8, 9) por dos dosos, (un tres i un dos, dos tresos, un dos i un cinc, dos quatres, o tres tresos) i el $N_{2,2}$ ($N_{3,2}$, $N_{3,3}$, $N_{2,5}$, $N_{4,4}$, $N_{3,3,3}$)$\in \Sigma_{32}$ però aporta igual (major) producte de dígits que el número N ja que substitueix el factor 4 (5, 6, 7, 8, 9) por $2 \cdot 2$ ($3 \cdot 2 = 6$, $3 \cdot 3 = 9$, $2 \cdot 5 = 10$, $4 \cdot 4 = 16$, $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$).

En definitiva, el nombre que busquem podem suposar que no té com xifres a 0, a 1, a 4, a 5, a 6, a 7, a 8 o a 9. Es dir, sols està format per dosos i tresos. Siga N format per p dosos i q tresos. Plantegem l'equació: $32 = 2p + 3q$

$q = 0 \Rightarrow 2p = 32 \Rightarrow$ 16 dosos $\Rightarrow \Pi = 2^{16} = 65536$

$q = 1 \Rightarrow 2p = 32 - 3 = 29$. Impossible.

$q = 2 \Rightarrow 2p = 32 - 6 = 26 \Rightarrow$ 13 dosos i 2 tresos $\Rightarrow \Pi = 3^2 \cdot 2^{13} = 73728$

$q = 3 \Rightarrow 2p = 32 - 9 = 23$. Impossible.

$q = 4 \Rightarrow 2p = 32 - 12 = 20 \Rightarrow$ 10 dosos i 4 tresos $\Rightarrow \Pi = 3^4 \cdot 2^{10} = 82944$

$q = 5 \Rightarrow 2p = 32 - 15 = 17$. Impossible.

$q = 6 \Rightarrow 2p = 32 - 18 = 14 \Rightarrow$ 7 dosos i 6 tresos $\Rightarrow \Pi = 3^6 \cdot 2^7 = 93312$

$q = 7 \Rightarrow 2p = 32 - 21 = 11$. Impossible.

$q = 8 \Rightarrow 2p = 32 - 24 = 8 \Rightarrow$ 4 dosos i 8 tresos $\Rightarrow \Pi = 3^8 \cdot 2^4 = 104976$

$q = 9 \Rightarrow 2p = 32 - 27 = 5$. Impossible.

$q = 10 \Rightarrow 2p = 32 - 30 = 2 \Rightarrow$ 1 dos i 10 tresos $\Rightarrow \Pi = 3^{10} \cdot 2 = 118098$

Per tant aquesta última configuració és la que aporta el major producte de xifres. La solució són els números formats per 10 tresos i un 2 (hi ha 11 d'aquests números: primer col·loquem tots els tresos i després col·loquem el dos en qualsevol de les 11 posicions possibles)

Desembre 30: Trobar els enters positius x, y tals que:

$$x^3 - 2x + 10 = 8y - 15$$

Solució: Tenim:

$$x^3 - 2x + 10 = 8y - 15 \;\Rightarrow\; x^3 - 2x = 8y - 25 \;\Rightarrow\; x(x^2 - 2) = 8(y - 4) + 7$$

Podem considerar l'última equació com quins valors de x fan que $x^3 - 2x = 7(8)$. Per a aquesta última equació tenim:

Si $x = 0(8) \Rightarrow x^2 = 0(8) \Rightarrow x(x^2 - 2) = 0(8)$

Si $x = 1(8) \Rightarrow x^2 = 1(8) \Rightarrow x(x^2 - 2) = 7(8)$

Si $x = 2(8) \Rightarrow x^2 = 4(8) \Rightarrow x(x^2 - 2) = 4(8)$

Si $x = 3(8) \Rightarrow x^2 = 1(8) \Rightarrow x(x^2 - 2) = 5(8)$

Si $x = 4(8) \Rightarrow x^2 = 0(8) \Rightarrow x(x^2 - 2) = 0(8)$

Si $x = 5(8) \Rightarrow x^2 = 1(8) \Rightarrow x(x^2 - 2) = 3(8)$

Si $x = 6(8) \Rightarrow x^2 = 4(8) \Rightarrow x(x^2 - 2) = 4(8)$

Si $x = 7(8) \Rightarrow x^2 = 1(8) \Rightarrow x(x^2 - 2) = 1(8)$

Per tant les solucions de $x^3 - 2x = 7(8)$ són $x = 1(8)$, és dir $x \in \{1, 9, 17, \ldots\} = 8n - 7$, amb n natural.

Si $x = 8n - 7$, aleshores: $x(x^2 - 2) = (8n - 7)((8n - 7)^2 - 2) = 8(y - 4) + 7$.

D'on: $y = 64n^3 - 168n^2 + 145n - 38 \text{ amb } n \in \mathbb{N}$.

En definitiva, les solucions de l'equació proposada són:

$$x = 8n - 7;\;\; y = 64n^3 - 168n^2 + 145n - 38 \text{ amb } n \in \mathbb{N}$$