SOLUCIONS FEBRER 2019

PROBLEMES PER A BATXILLERAT I PREPARACIÓ OME

Autor: Col·lectiu "Concurso de Primavera". Comunitat de Madrid

Selecció del XIX Concurs de Primavera de 2015

https://www.concursoprimavera.es/#concurso

Febrer 1: Quants punts (x, y) amb coordenades enteres té la corba $y = \frac{4x+8}{x-4}$?

Solució: Tenim:

$$y = \frac{4x+8}{x-4} = 4 + \frac{24}{x-4}$$

Per a que y siga enter deu complir-se que x – 4 siga divisor de 24. Com els divisors de 24 són: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±8, ±12 i ±24, tenim que existeixen 16 coordenades enteres en la gràfica de la corba proporcionada.

Febrer 2-3: Un club de muntanya organitza en quatre dissabtes consecutius quatre excursions tenint totes la mateixa taxa de participació, el 80% dels membres del club. ¿Quin és el menor percentatge possible de socis que van participar en totes les excursions?

Solució: Suposem que el club té 100 socis. Com busquem el percentatge més baix possible, fem que els participants repeteixin el menys possible. El primer dia van 80, el segon repeteixen 60 (i els altres 20 que no van ser el primer dia), el tercer repeteixen 40 (més 40 dels quals han faltat algun dia) i el quart repeteixen 20. Així que el menor percentatge de socis que han participat en les 4 excursions és del 20%.

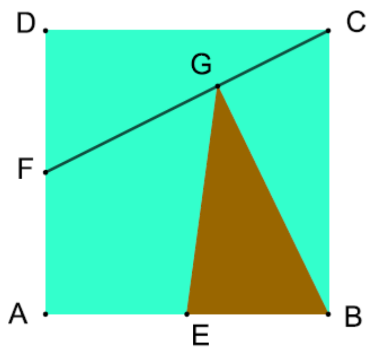
Febrer 4: Hi ha alguna col·lecció de naturals consecutius tal que la proporció de nombres imparells en ella siga de 9/20?

Solució: Si la col·lecció té un nombre parell de naturals consecutius hi ha tants parells com senars, per tant en aquest cas la proporció d'imparells és ½ > 9/20. Si la col·lecció té un nombre imparell, 2n+1, de naturals consecutius, el nombre de imparells és n+1 (si la col·lecció comença per imparell) o n (si la col·lecció comença per parell). Si hi ha n+1 imparells la proporció és: $\frac{n+1}{2n+1}$ que en major que ½ que, a la seua vegada, es major que 9/20. Si hi ha n imparells i exigim que haja una proporció de 9/20 tenim

$$\frac{n}{2n+1} = \frac{9}{20} \quad \Rightarrow \quad 2n = 18n + 9$$

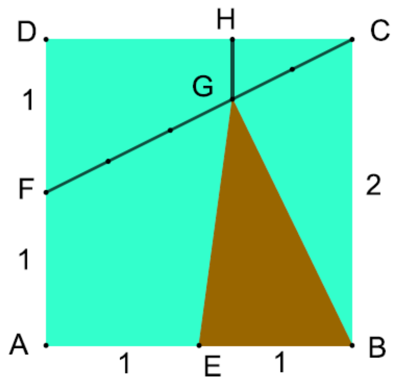
L'última igualtat pot llegir-se parell = imparell (= parell + imparell), que es un absurd. Per tant no hi ha cap col·lecció de naturals consecutius amb proporció de imparells 9/20.

Febrer 5-6:



En un quadrat ABCD, E i F són els punts mitjans dels costats AB i AD respectivament. Es pren el punt G de CF de tal manera que 3·CG = 2·GF. Si el costat del quadrat és 2, quin és l'àrea del triangle ΔBEG?

Solució:



Tracem per G la perpendicular GH al costat DC. Llavors, òbviament, $\Delta FDC \approx \Delta GHC$ (ja que estan en posició de Tales). D'aquí:

$$\frac{1}{\mathrm{GH}} = \frac{5}{2} \Rightarrow \mathrm{GH} = \frac{2}{5}$$

I l'altura del ΔGEB per G és:

$$2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$$

Per últim:

$$\mathrm{A}_{\Delta\mathrm{EGB}} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{1 \cdot \frac{8}{5}}{2} = \frac{4}{5}$$

Febrer 7: Trobar el nombre natural n tal que la suma de tots els naturals menors o iguals a n dóna un nombre de tres xifres iguals.

Solució: La suma dels n primers naturals és $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ que deu ser 111·k. D'aquí tindrem:

$$n \cdot (n+1) = k \cdot 111 \cdot 2 = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot k$$

D'aquí obtenim que al ser n i (n+1) naturals consecutius un deu ser múltiple de 6 i l'altre múltiple de 37. Sols és possible n = 36 i n+1 = 37. (La suma de los 36 primers naturals és 666).

Febrer 8-9: La suma de dos naturals, no necessàriament diferents, és vint-i-sis. Si afegim altres dos, la suma passa a ser quaranta-u i, si finalment, afegim altres dos als quatre existents, la suma passa a ser cinquanta-set. Quin és el mínim nombre de naturals parells que hi ha entre aquests sis naturals?

Solució: Si a i b són els dos naturals inicials, tenim que a + b = 26, aquestos dos nombres podrien ser els dos imparells. Com a + b + c + d = 41, tenim que c + d = 15, d'aquestos dos un ha de ser parell i l'altre imparell. Com a + b + c + d + e + f = 57 deu ser e + f = 16 i també poden ser els dos imparells. Per tant, d'entre els sis, al menys un, deu ser parell.

Febrer 10: En sumar els naturals de l'1 al n, hi ha hagut un que, per error, hem sumat dues vegades. Si la suma obtinguda ha estat 857, quin és el nombre que hem repetit?

Solució: Si k (≤ n) és el natural repetit en la suma deu complir-se:

$$\frac{n(n+1)}{2} + k = 857 \quad \equiv \quad n(n+1) + 2k = 1714 \quad \equiv \quad n^2 + n - 1714 + 2k = 0 \quad \equiv \quad n = \frac{-1 \pm \sqrt{6857 - 8k}}{2}$$

Com n deu ser natural menyspreem la solució negativa. Com $\sqrt{6857} = 82{,}80\ldots$ i $\sqrt{6857 - 8k}$ deu ser imparell (per a que al restar-li 1 siga divisible per 2 y així n siga natural) (*), el valor major que pot agafar el discriminant de l'equació de segon grau és 81^2. Amb això:

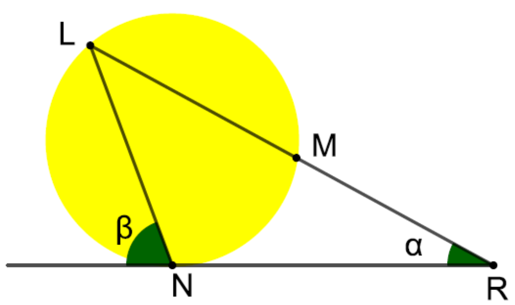
$$6857 - 8k = 81^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{6857 - 81^2}{8} = k = 37 \text{ y } n = \frac{-1 + 81}{2} = 40$$

I se compleix n ≥ k.

Són possibles altres valors per al discriminant de l'equació de segon grau. De fet, tots els quadrats de imparells menors o iguals a 81, proporcionen valors enters per a n i k però sols 81 proporciona valors a n i k que compleixen n ≥ k. Per exemple, el valor 79^2 del discriminant proporciona

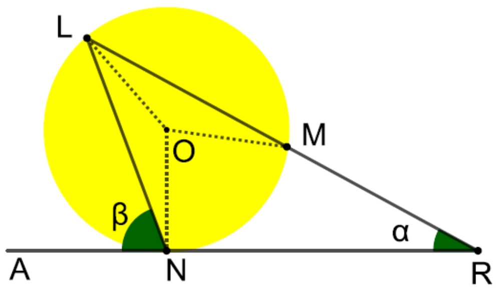
$$6857 - 8k = 79^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{6857 - 79^2}{8} = k = 77 \text{ y } n = \frac{-1 + 79}{2} = 39 \ngeq k = 77$$

Febrer 11-12:



La circumferència de la figura és tangent a NR en N. Les cordes LN i LM tenen la mateixa longitud. Trobar 3β - α

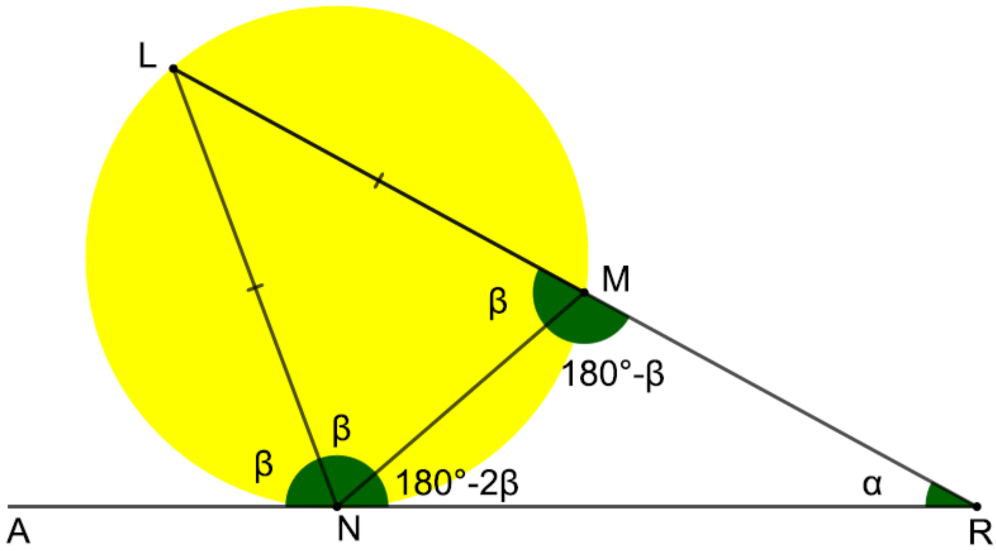
Solució:



Al ser LM = LN, si O es el centre de la circumferència, resulta que els triangles ΔOLN i ΔOLM són iguals. Per altra part $\angle ONA = 90°$, per el que $\angle ONL = 90°-\beta = \angle OLN$ i $\angle NLM = 2\cdot(90°-\beta) = 180° - 2\beta$. Dons, els tres angles del triangle ΔLNR mesuren $180° - 2\beta$, $180° - \beta$ i α. Per tant:

$$360° - 3\beta + \alpha = 180° \Rightarrow 3\beta - \alpha = 180°$$

<u>Solució de Ignacio Larrosa (@ilarrosac):</u>



En primer lloc $\angle LMN = \angle LNA \Rightarrow \angle LMN = \beta$ (*)

En segon lloc ΔLNM es isòsceles (ja que LN = LM) $\Rightarrow \angle LNM = \beta$ (**)

De (*) $\angle NMR = 180° - \beta$. De (**) $\angle MNR = 180° - 2\beta$.

Per últim, en ΔNMR la suma dels tres angles d'un triangle dona 180°

$$180° = 180° - \beta + 180° - 2\beta + \alpha \Rightarrow 3\beta - \alpha = 180°$$

<u>Febrer 13:</u> Quantes llistes de zeros i uns, de longitud 20, tenen tots els zeros consecutius o tots els uns consecutius o ambdues coses alhora?

<u>Solució:</u> Tenim:

Llistes de 20 zeros $\Rightarrow$ una única llista.

Llistes de 19 zeros i un un $\Rightarrow$ 20 llistes (l'1 en qualsevol de las 20 posicions possibles).

Llistes de 18 zeros i dos uns $\Rightarrow$ (19 + 1 =) 20 llistes (els uns junts en qualsevol de les 19 posicions possibles més els uns separats i entre ells els zeros junts).

Llistes de 17 zeros i tres uns $\Rightarrow$ (18 + 2 =) 20 llistes.

…….

Llistes de 2 zeros i 18 uns $\Rightarrow$ (1 + 19=) 20 llistes

Llistes de 1 zero i 19 uns $\Rightarrow$ 20 llistes.

Llistes de 20 uns $\Rightarrow$ una única llista.

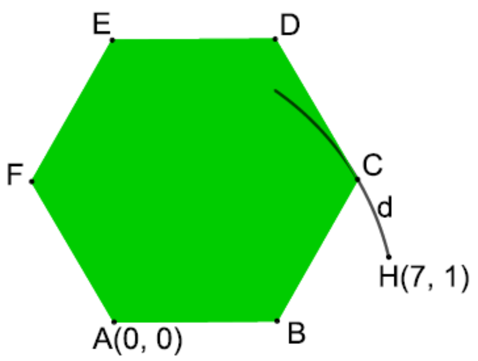
En total (1 + 19·20 + 1 =) 382 llistes.

Febrer 14-15: Llancem un dau no carregat amb les cares numerades des de l'u al sis, tres vegades consecutives i resulta que el resultat del tercer llançament coincideix amb la suma de resultats del primer i segon llançament. Quina és la probabilitat que el número dos no hagi aparegut en cap dels tres llançaments?

Solució: Hi ha 15 casos en què el tercer llançament coincideix amb la suma del primer i segon llançament: (1, 1, 2); (1, 2, 3); (2, 1, 3); (1, 3, 4); (3, 1, 4); (2, 2, 4); (2, 3, 5); (3, 2, 5); (1, 4, 5); (4, 1, 5); (2, 4, 6); (4, 2, 6); (1, 5, 6), (5, 1, 6); (3, 3, 6).

En set d'ells no apareix el 2, després la probabilitat demanada és 7/15

Febrer 16:



Calcular l'àrea de l'hexàgon regular, sent d un arc de circumferència de centre A (0, 0)

Solució: Tenim:

$$\mathrm{AC} = \mathrm{d(A, C)} = \mathrm{d(A, H)} = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$$

Si x és el costat del hexàgon regular, tenim en aplicar el teorema dels cosinus al triangle ΔABC:

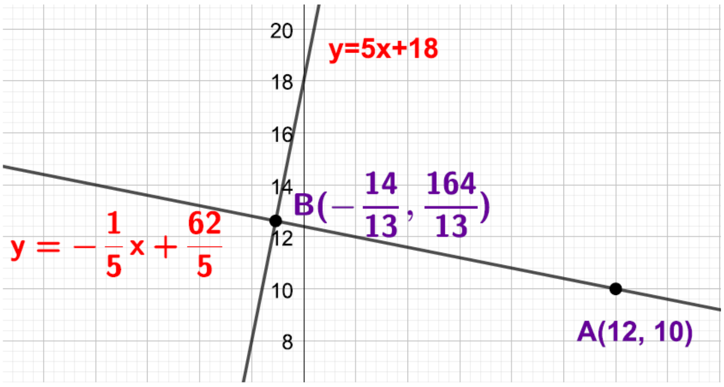
$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2 \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} \cdot \cos \mathrm{B} \quad \Rightarrow 50 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos(120°) = 3x^2 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{\frac{50}{3}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$$

D'aquí:

$$A_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{\frac{50}{3} \cdot \sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$$

Febrer 17: Trobar el punt de la recta y = 5x + 18 la distancia del qual al punt (12, 10) és mínima.

Solució:



En primer lloc (12, 10) no està en la recta y = 5x + 18, ja que:

$$10 \neq 5 \cdot 12 + 18 = 78$$

Calculem la recta $\perp$ a y = 5x + 18 que passa per (12, 10). Siga y =m x + n la recta buscada, aleshores:

$$(m' = 5)\ m \cdot m' = -1 \ \Rightarrow m = -\frac{1}{5}$$

Obligant a que la recta passe per A(12, 10):

$$10 = -\frac{1}{5} \cdot 12 + n \ \Rightarrow \ n = \frac{62}{5}$$

El punt de tall de les dues rectes és:

$$\left.\begin{array}{r} y = 5x + 18 \\ y = -\frac{1}{5}x + \frac{62}{5} \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ 5x + 18 = - -\frac{1}{5}x + \frac{62}{5} \ \Rightarrow \ x = -\frac{14}{13} \ \ y = \frac{164}{13}$$

La distància buscada és:

$$d(A,B) = \sqrt{\left(12 + \frac{14}{13}\right)^2 + \left(10 - \frac{164}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{28900}{169} + \frac{1156}{169}} = \frac{34\sqrt{26}}{13} \approx 13{,}33 \ldots ..$$

Febrer 18: La suma de díhuit naturals consecutius és un quadrat perfecte, quin és el menor valor possible per a aquesta suma?

Solució: Siguen a – 8, a – 7, a – 6,……, a, a + 1, a + 2, ……., a + 9 els díhuit naturals consecutius (a > 8). La seua suma és: 18·a + 9 = 9(2·a + 1) que segons l'enunciat es un quadrat perfecte. Com 9 ho és, també deu ser-ho (2·a + 1) i com a > 8, el menor quadrat possible és 25 (= 2·12 + 1). Per tant el menor valor possible buscat és 9·25 = 225.

(Els díhuit naturals consecutius són: (a = 12) 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21)

Febrer 19: Per a quants nombres reals x es verifica que

$$\sqrt{120 - \sqrt{x}}$$

és un nombre enter?

Solució: Busquem els valors de x que fan que $120 - \sqrt{x}$ siga un quadrat perfecte (menors que 120, naturalment). Com hi ha 11 quadrats perfectes menors que 120 (0, 1, 4, 9, ……., 100) hi ha 11 valors de x que fan que

$$\sqrt{\mathbf{120-\sqrt{x}}}$$

siga un enter. Aquestos 11 valores de x són:

$$120-\sqrt{x}=0 \;\Rightarrow\; x=120^2=14400$$
$$120-\sqrt{x}=1 \;\Rightarrow\; x=119^2=14161$$
$$120-\sqrt{x}=4 \;\Rightarrow\; x=116^2=13456$$
$$120-\sqrt{x}=9 \;\Rightarrow\; x=111^2=12321$$
$$120-\sqrt{x}=16 \;\Rightarrow\; x=104^2=10816$$
$$120-\sqrt{x}=25 \;\Rightarrow\; x=95^2=9025$$
$$120-\sqrt{x}=36 \;\Rightarrow\; x=84^2=7056$$
$$120-\sqrt{x}=49 \;\Rightarrow\; x=71^2=5041$$
$$120-\sqrt{x}=64 \;\Rightarrow\; x=56^2=3136$$
$$120-\sqrt{x}=81 \;\Rightarrow\; x=39^2=1521$$
$$120-\sqrt{x}=100 \;\Rightarrow\; x=20^2=400$$

Febrer 20-21: Quants nombres N de quatre xifres verifiquen que a l'esborrar a N la xifra de les unitats de miler s'obté un altre nombre de tres xifres que és un novè de N?

Solució: Si N = $\overline{\mathrm{abcd}}$, l'enunciat diu:

$$\overline{\mathrm{bcd}}=\frac{1}{9}\overline{\mathrm{abcd}} \;\Leftrightarrow\; 9\cdot\overline{\mathrm{bcd}}=\overline{\mathrm{abcd}} \;\Leftrightarrow\; 9(100\mathrm{b}+10\mathrm{c}+\mathrm{d})=1000\mathrm{a}+100\mathrm{b}+10\mathrm{c}+\mathrm{d}$$

I simplificant:

$$100\mathrm{b}+10\mathrm{c}+\mathrm{d}=125\mathrm{a}$$

Així doncs, la xifra a podrà prendre els valors 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7 donant lloc a set nombres diferents.

Febrer 22: Si cos x = 0, trobar el menor angle z tal que cos (x + z) = 0

Solució: Tenim:

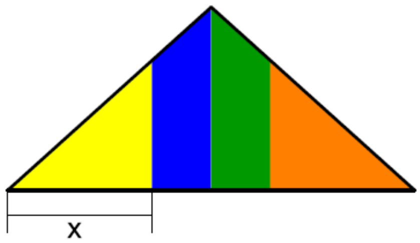
$$\cos x=0 \;\Leftrightarrow x=\pm k\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{N}) \;\Rightarrow\; \sin x=\pm 1$$

$$0=\cos(x+z)=\cos x\cdot\cos z-\sin x\cdot\sin z=-\sin x\cdot\sin z=\mp\sin z$$

$$\Rightarrow\quad z=0 \quad \mathrm{o} \quad z=\pm\frac{2k+1}{2}\pi\ \ (k\in\mathbb{N})$$

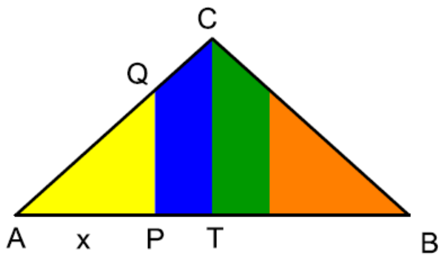
Per tant no existeix un menor angle z que complisca l'enunciat

Febrer 23-24:



En el triangle isòsceles de la figura el costat desigual és 12 i està dividit en quatre polígons d'igual àrea per segments perpendiculars al costat desigual. Trobar el valor de x

Solució:



Els triangles ΔAPQ i ΔATC són semblants ja que estan en posició de Tales i ja que l'àrea d'un és el doble de la de l'altre la raó de proporcionalitat de les àrees és 2, de manera que la raó de semblança de longituds és $\sqrt{2}$. Així que:

$$\frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{x}} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x} = \frac{\mathrm{AT}}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

Febrer 25: Per $\overline{\mathrm{xy}}$ designem al nombre de dues xifres que té x desenes i y unitats. Quants nombres $\overline{\mathrm{ab}}$ verifiquen

$$\mathbf{3 \cdot \overline{ab} < \overline{ba}?}$$

Solució: El que exigeix l'enunciat és equivalent a

$$3(10\mathrm{a} + \mathrm{b}) < 10\mathrm{b} + \mathrm{a} \quad \Leftrightarrow \quad 30\mathrm{a} + 3\mathrm{b} < 10\mathrm{b} + \mathrm{a} \quad \Leftrightarrow \quad 29\mathrm{a} < 7\mathrm{b}$$

Com 29·a < 7·9 = 63, deu complir-se:

$$\mathrm{a} < \frac{63}{29} = 2{,}17\ldots \quad \Rightarrow \quad \mathrm{a} = 1 \text{ o } \mathrm{a} = 2$$

Si a = 1

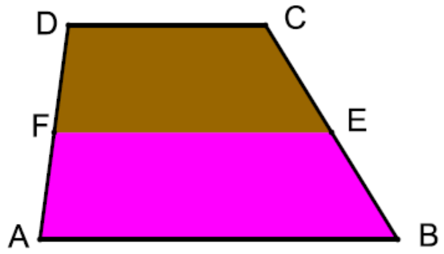
$$29 < 7\mathrm{b} \quad \Rightarrow \frac{29}{7} < \mathrm{b} \quad \Rightarrow \quad 4{,}1\ldots. < \mathrm{b} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{b} \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

Si a = 2

$$58 < 7\mathrm{b} \quad \Rightarrow \frac{58}{7} < \mathrm{b} \quad \Rightarrow \quad 8{,}28\ldots. < \mathrm{b} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{b} \in \{9\}$$

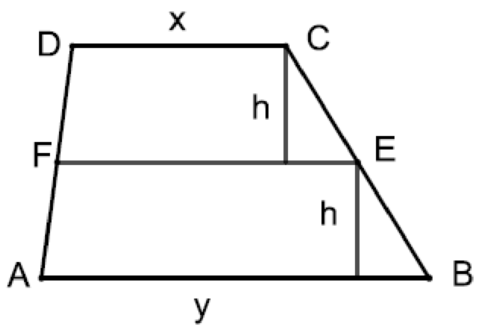
Els nombres buscats són: 15, 16, 17, 18, 19 y 29. En total sis números.

Febrer 26-27:



En el trapezi ABCD de bases AB i CD, E és el punt mitjà de BC i F és el punt mitjà d'AD. Si l'àrea del quadrilàter ABEF és el doble de l'àrea del quadrilàter FECD, trobar el quocient AB / DC

Solució:



En la figura tindrem, que els quadrilàters ABEF i FECD són trapezis en els que

$$FE = \frac{x+y}{2}$$

Així que:

$$\frac{y + \frac{x+y}{2}}{2} \cdot h = 2 \cdot \frac{x + \frac{x+y}{2}}{2} \cdot h$$

D'on:

$$y = 5x \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = \frac{AB}{DC} = 5$$

Febrer 28: Els naturals a, b i c verifiquen que a·b·c=240; a·c+b=46 y a+b·c=64; quin és el valor de a+b+c?

Solució Ignacio Larrosa (@ilarrosac): Tindrem:

$$\left.\begin{aligned} abc &= 240 \\ ac + b &= 46 \\ a + bc &= 64 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} & \\ &\underset{\cdot b}{\rightarrow} \\ &\underset{\cdot a}{\rightarrow} \end{aligned} \left.\begin{aligned} abc &= 240 \\ acb + b^2 &= 46b \\ a^2 + acb &= 64a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} b^2 - 46b + 240 &= 0 \\ a^2 - 64a + 240 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} b &= 40, \quad & b &= 6 \\ a &= 60, \quad & a &= 4 \end{aligned}$$

I per últim:

a	b	c	
40	60	$\frac{1}{10}$	no
40	4	$\frac{3}{2}$	no
6	60	$\frac{2}{3}$	no
6	4	10	si