SOLUCIONS MARÇ 2019

Problemes per a la preparació de l'OME (RSEM). Autor: Rafael Martínez Calafat (professor jubilat)

<u>Març 1-2:</u>

Si x i y són nombres reals, trobar el mínim valor de l'expressió:

$$\sqrt{\mathbf{x^2+4}}+\sqrt{\mathbf{(x-7)^2+(y-2)^2}}+\sqrt{\mathbf{9+(y+1)^2}}$$

Resoldre en $\mathbb{R}$: $\mathbf{x^5 - 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x + 12 = 0}$

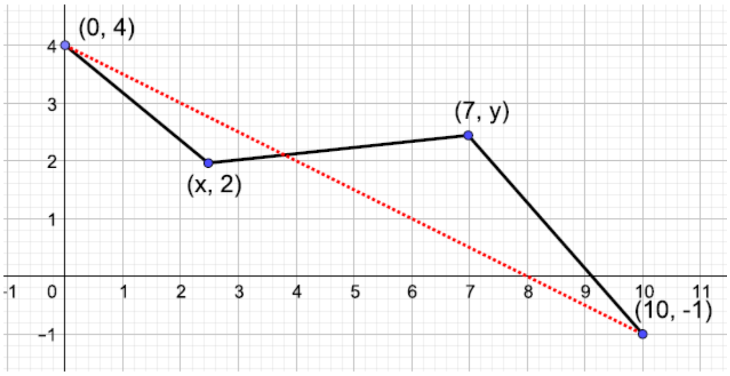
<u>Solució:</u> Per a la primera part: Considerem un sistema de coordenades cartesianes. Llavors:

$$\sqrt{x^2+4} = d\big((0,4);\ (x,2)\big)$$

$$\sqrt{(x-7)^2+(y-2)^2} = d\big((x,2);\ (7,y)\big)$$

$$\sqrt{9+(y+1)^2} = d\big((7,y);\ (10,-1)\big)$$

L'esquema següent, aclareix la situació:



La suma dels tres radicals és la longitud de la poligonal. La longitud de la poligonal serà mínima quan els punts (x, 2) i (7, y) estiguin sobre la recta que uneix (0, 4) i (10, - 1). En el dibuix ja s'observa que x = 2 e y = ½

L'equació de la recta que passa per (0, 4) i (10, – 1) és:

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

Si (x, 2) està sobre aquesta recta

$$2 = -\frac{1}{2}x + 4 \ \Rightarrow\ x = 4$$

Si (7, y) està sobre aquesta recta

$$y = -\frac{1}{2}7 + 4 \ \Rightarrow\ y = \frac{1}{2}$$

Per a aquestos valors de x i y l'expressió de l'enunciat es mínima i el seu valor és

$$d\big((0,4);\ (10,-1)\big) = \sqrt{10^2+5^2} = 5\sqrt{5}$$

Per a la segona part de l'enunciat, tenim: Busquem factoritzar el polinomi expressant-lo com a producte de polinomis de grau 0, de grau 1 i de grau 2 amb el discriminant negatiu. Primer intentem buscar les arrels racionals (recordem que les possibles arrels racionals són les fraccions a/b on a (b) són els divisors del terme independent (principal)). Com en aquest cas el terme principal es 1 apareixeran les arrels enteres. Busquem entre els divisors del terme independent (12), es dir entre ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12. L'únic que quadra és 3 ja que:

	1	-2	-3	-2	2	12
3		3	3	0	-6	-12
	1	1	0	-2	-4	0

Per tant:

$$x^5 - 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x + 12 = (x-3)(x^4 + x^3 - 2x - 4)$$

Ara deuríem intentar factoritzar el polinomi de grau 4. La tècnica descrita anteriorment (factorització per Ruffini) no dona resultats. Intentem factoritzar el polinomi de grau 4 en dos polinomis de grau 2:

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 - 2x - 4 &= (x^2 + Ax + B)\cdot(x^2 + Cx + D) \\ &= x^4 + (A+C)x^3 + (B + AC + D)x^2 + (B + AD)x + BD \end{aligned}$$

Identificant coeficients tenim el sistema:

$$\left.\begin{array}{c} A + C = 1 \\ B + AC + D = 0 \\ B + AD = -2 \\ BD = -4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} C = 1 - A \\ B + A(1-A) + D = 0 \\ B + AD = -2 \\ BD = -4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} B + A - A^2 + D = 0 \\ A = -\dfrac{2+B}{D} \\ BD = -4 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} B - \dfrac{2+B}{D} - \dfrac{4 + 4B + B^2}{D^2} + D = 0 \\ BD = -4 \end{array}\right\} BD^2 - 2D - BD - 4 - 4B - B^2 + D^3 = 0$$

$$-4D - 2D + 4 - 4 - 4B - B^2 + D^3 = 0$$

Ja que BD = - 4. A més:

$$-6D - 4B - B^2 + D^3 = 0 \quad \Rightarrow \left(B = -\frac{4}{D}\right) - 6D + \frac{16}{D} - \frac{16}{D^2} + D^3 = 0$$

$$D^5 - 6D^3 + 16D - 16 = 0$$

	1	0	-6	0	16	-16
2		2	4	-4	-8	16
	1	2	-2	-4	8	0

No necessitem resoldre el sistema sinó sols obtenir una solució particular. Per tant, ens quedem amb D = 2, amb el que B = - 2, A = 0, C = 1, i així:

$$\begin{aligned} x^5 - 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x + 12 &= (x-3)(x^4 + x^3 - 2x - 4) \\ &= (x-3)\cdot(x^2-2)\cdot(x^2+x+2) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2} \end{array}\right. \end{aligned}$$

<u>**Solució de Ignacio Larrosa (@ilarrosac):**</u>

$$x^5 - 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x + 12 = (x-3)(x^4 + x^3 - 2x - 4)$$

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 - 2x - 4 &= x(x^2 - 2) + (x^4 - 4) = x(x^2-2) + (x^2-2)\cdot(x^2+2) \\ &= (x^2-2)(x^2+x+2) \end{aligned}$$

Març 3: Trobar els enters positius n, k i p tals que:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{n^2} &= \mathbf{2k+1} \\ \mathbf{n^3} &= \mathbf{3p+2} \end{aligned}\right\}$$

Solució: Trobarem les solucions de la primera equació i després veurem quines d'aquestes compleixen la segona equació. Ja que les equacions parlen de divisibilitat per 2 i per 3, estudiarem les congruències mòdul 6

$$n = 0(6) \;\Rightarrow\; n^2 = 0(6) \;\Rightarrow n^2 = 0(2)$$

$$n = 1(6) \;\Rightarrow\; n^2 = 1(6) \;\Rightarrow n^2 = 1(2)$$

$$n = 2(6) \;\Rightarrow\; n^2 = 4(6) \;\Rightarrow n^2 = 0(2)$$

$$n = 3(6) \;\Rightarrow\; n^2 = 3(6) \;\Rightarrow n^2 = 1(2)$$

$$n = 4(6) \;\Rightarrow\; n^2 = 4(6) \;\Rightarrow n^2 = 0(2)$$

$$n = 5(6) \;\Rightarrow\; n^2 = 1(6) \;\Rightarrow n^2 = 1(2)$$

Abans de detallar les solucions per k de la primera equació, vegem quins dels valors trobats per a n, que són solucions de la primera equació, són solucions de la segona

$$n = 1(6) \;\Rightarrow\; n^3 = 1(6) \;\Rightarrow n^2 = 1(3) \quad \text{no són solucions}$$

$$n = 3(6) \;\Rightarrow\; n^3 = 3(6) \;\Rightarrow n^2 = 0(3) \quad \text{no són solucions}$$

$$n = 5(6) \;\Rightarrow\; n^3 = 5(6) \;\Rightarrow n^2 = 2(3) \quad \text{són solucions}$$

Per tant les soluciones per a n de les dues equacions són n = 5(6), es dir n = 6t + 5 amb t∈N. Ara trobem els valors de k que compleixen la primera i els valors de p que compleixen la segona

$$n^2 = 2k+1 \;\Rightarrow k = \frac{n^2-1}{2} = \frac{(6t+5)^2-1}{2} = 18t^2+30t+12$$

$$n^3 = 3p+2 \;\Rightarrow p = \frac{n^3-2}{3} = \frac{(6t+5)^3-2}{3} = 72t^3+180t^2+150t+41$$

Es dir, les solucions del sistema són:

$$\begin{gathered} t \in \mathbb{N} \\ n = 6t+5 \\ k = 18t^2+30t+12 \\ p = 72t^3+180t^2+150t+41 \end{gathered}$$

Març 4: Considerem N **=12345678...210720182019**. Trobar el residu de dividir N entre 40

Solució: Tenim 40 = 8·5

Com que un nombre és divisible per 8 sii ho és el nombre format per les tres últimes xifres de l'original, tindrem N = 3 (8). A més, N = 4 (5) (N és múltiple de 5 sii acaba en 0 o 5). Amb això:

$$N = 8k+3 = 8(k-1)+11 = 8(k-2)+19 = 8(k-2)+15+4$$

Com $N - 4 = 8(k - 2) + 15$ i N – 4 y 15 són múltiples de 5, tindrem que 8(k – 2) és múltiple de 5, es dir: 8(k – 2) =8·5·p. I per últim N = 40·p + 19 ⇒ N = 19(40).

De forma alternativa tenim:

$$N = 5q + 4 = 5(q - 1) + 9 = 5(q - 2) + 14 = 5(q - 3) + 16 + 3$$

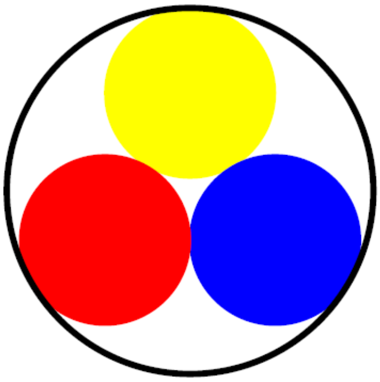
Amb el que: $N - 3 = 5(q - 3) + 16$, com N – 3 i 16 són múltiples de 8, tindrem que 5(q – 3) és múltiple de 8, es dir: 5(q – 3) = 5·8·k = 40k. I per últim N = 40k + 19 ⇒ N = 19(40).

Solució 2: Com 40 = 5·8 i el caràcter de divisible per 5 i per 8 depèn de l'última i de les tres últimes xifres tindrem

$$2019 - 19 = 2000 \text{ és múltiple de } 5 \text{ i de } 8 \Rightarrow N - 19 = 123 \ldots \ldots 20182000 \text{ és múltiple de } 40$$

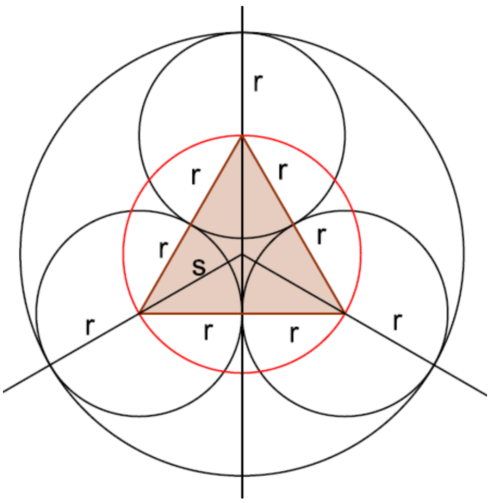
D'axó: N – 19 = 40t ⇒ N = 19(40)

Març 5:



Es tenen tres cercles iguals de radi r tangents exteriors dos a dos. Calcular el radi del cercle que els circumscriu

Solució:



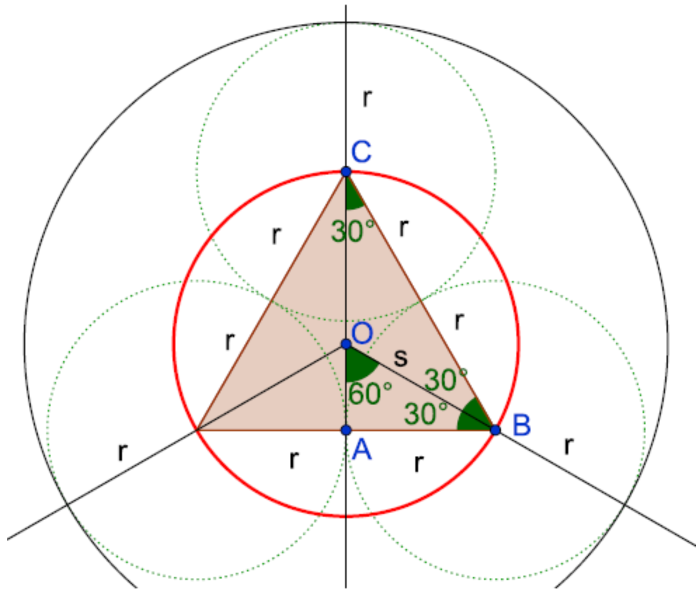
Siga r (R) el radi de les circumferències interiors (exterior). Tindrem que a l'interior de la circumferència de radi s (= R - r) i mateix centre que la circumferència exterior, està inscrit un triangle de costat 2r i llavors:

$$s = \frac{2}{3}\left\{\begin{matrix}\text{altura del} \\ \text{triangle equilàter} \\ \text{de costat } 2r\end{matrix}\right\} = \frac{2}{3} r\sqrt{3}$$

D'on:

$$R = r + \frac{2}{3} r\sqrt{3} = r\left(\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}\right)$$

Solució 2: Amb la mateixa nomenclatura anterior, tenim:



Tenim que $\Delta CAB \approx \Delta OAB$ ja que els dos són triangles 30°-60°-90° i els seus costats estan en la proporció1:$\sqrt{3}$:2 i d'aquí:

$$\frac{2r}{\sqrt{3}r} = \frac{s}{r} \Rightarrow s = \frac{2}{\sqrt{3}}r$$

I, per últim:

$$R = s + r = \frac{2}{\sqrt{3}}r + r$$
$$= \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}r$$

<u>Març 6:</u> Trobar els enters positius que compleixen:

$$x^2+y^2+z^2 = 2xyz$$

<u>Solució:</u> Per la desigualtat entre mitja quadràtica i mitja geomètrica tenim:

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \sqrt{xyz}$$

Elevant al quadrat (ja que r = t^2 es creixent en [0, +∞[)

$$x^2+y^2+z^2 \geq 3xyz > 2xyz$$

Per tant no pot haver solucions positives.

<u>Març 7:</u> Demostreu que si m i n no són múltiples de tres llavors $n^4 + m^4$ no és múltiple de sis

<u>Solució:</u> Si n no és múltiple de 3 llavors n no dóna residu 3 al ser dividit per 6, ni és múltiple de sis, ja que si fos múltiple de 6 ho seria de 3, i si n = 3 (6) llavors n = 6p +3 = 3 (2p + 1), és a dir és múltiple de 3. per tant, si n i m no són múltiples de 3, donen residu 1, 2, 4, 5 en ser dividits per 6.

Per últim, tenim

n\m	1(6)	2(6)	4(6)	5(6)
1(6)	2(6)	5(6)	5(6)	2(6)
2(6)	5(6)	2(6)	2(6)	2(6)
4(6)	5(6)	2(6)	2(6)	5(6)
5(6)	2(6)	2(6)	5(6)	2(6)

On, en cada cel·la s'ha escrit el resultat de l'operació $n^4 + m^4$. Per tant, $n^4 + m^4$ no és múltiple de 6

<u>Març 8:</u> Resoldre en els reals:

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{x^2+y^2+xy=1}\\ \mathbf{y^2+z^2+zy=1}\\ \mathbf{x^2+z^2+zx=2}\end{array}\right\}$$

<u>Solució de Ignacio Larrosa (@ilarrosac):</u> Restant les dues primeres equacions, tenim:

$$x^2-z^2+xy-zy=0 \;\Rightarrow\; (x+y+z)(x-z)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x+y+z=0\\ x=z\end{cases}$$

Si $x+y+z=0$ aleshores $y=-(x+z)$ i de la primera equació:

$$1=x^2+y^2+xy=x^2+(x+z)^2-x(x+z)=x^2+z^2+xz=\begin{Bmatrix}\text{tercera}\\ \text{equació}\end{Bmatrix}=2$$

que es un absurd.

Si x = z, la primera i la segona equació coincideixen i ens queda el sistema de dues equacions amb dues incògnites:

$$\left.\begin{array}{r}x^2+y^2+xy=1\\ x^2+x^2+x^2=2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}x^2+y^2+xy=1\\ x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}\end{array}\right\}$$

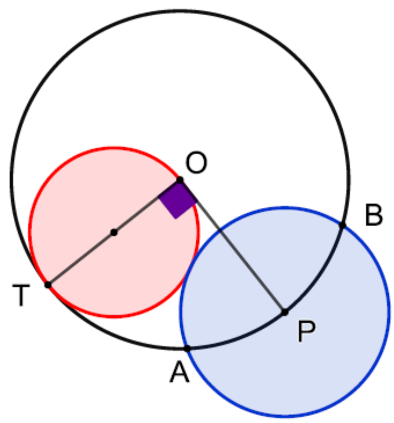
Si $z=x=\sqrt{\frac{2}{3}}$, aleshores:

$$\frac{2}{3}+y^2+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y=1 \;\Rightarrow\; 3y^2+\sqrt{6}y-1=0 \;\Rightarrow\; y=-\frac{1\pm\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$$

Si $z=x=-\sqrt{\frac{2}{3}}$, aleshores:

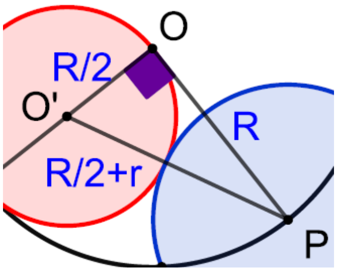
$$\frac{2}{3}+y^2-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y=1 \;\Rightarrow\; 3y^2-\sqrt{6}y-1=0 \;\Rightarrow\; y=\frac{1\pm\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$$

<u>Març 9-10:</u>



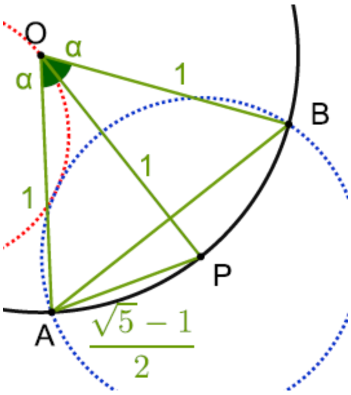
Siga una circumferència de centre O i radi R. Es dibuixa la circumferència tangent interior a la primera amb diàmetre R. Es dibuixa un radi OP perpendicular a l'OT. Amb centre en P es dibuixa una circumferència tangent exterior a la segona. Siguin A i B els talls de la primera i tercera circumferències. Calcular el radi de la tercera circumferència i demostrar que el costat del pentàgon regular inscrit a la primera circumferència és AB

Solució:



Siga O’ el centre de la segona circumferència. Queda format el triangle ΔO’OP rectangle en O. Aplicant Pitàgores tenim:

$$\sqrt{\frac{R^2}{4}+R^2}=\frac{R}{2}+r \quad \Rightarrow \quad r=R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$



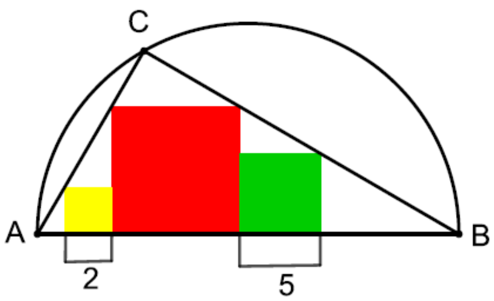
Agafem R = 1. Aplicant el teorema dels cosinus al triangle ΔOPA, tenim:

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2=1^2+1^2-2\cdot 1\cdot 1\cdot \cos\alpha$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha=36^\circ \quad \Rightarrow \quad 2\alpha=72^\circ$$

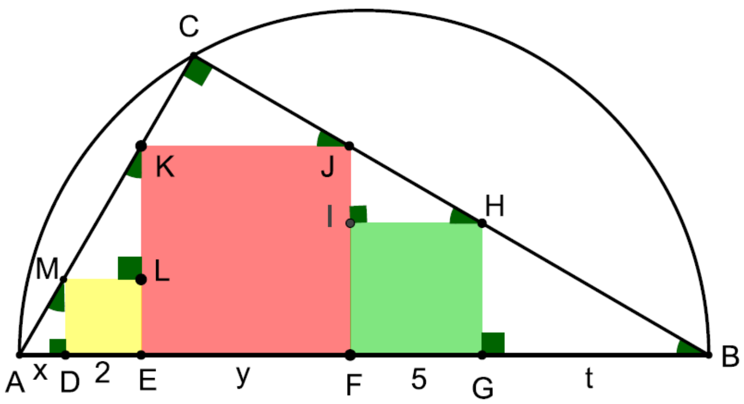
Per tant, AB és el costat d’un pentàgon regular

Març 11-12:



Sigui AB un arc de circumferència de diàmetre AB. S'agafa C sobre l'arc i es construeix el triangle ΔABC. S'inscriuen dins del triangle 3 quadrats, els dos més petits de costats 5 i 2 (mirar figura). Trobar el perímetre i àrea del triangle ΔABC

Solució: En primer lloc, el triangle ΔABC és rectangle en C. En segon lloc, tots els triangles dibuixats sobre els catets AC i CB són semblants ja que tots tenen un angle recte i l'angle marcat en la figura



Siga x = AD, y = EF i t = GB, Tindrem de la semblança de triangles que

$$\frac{x}{2}=\frac{2}{y-2}=\frac{y-5}{5}=\frac{5}{t}$$

De la igualtat central, tenim:

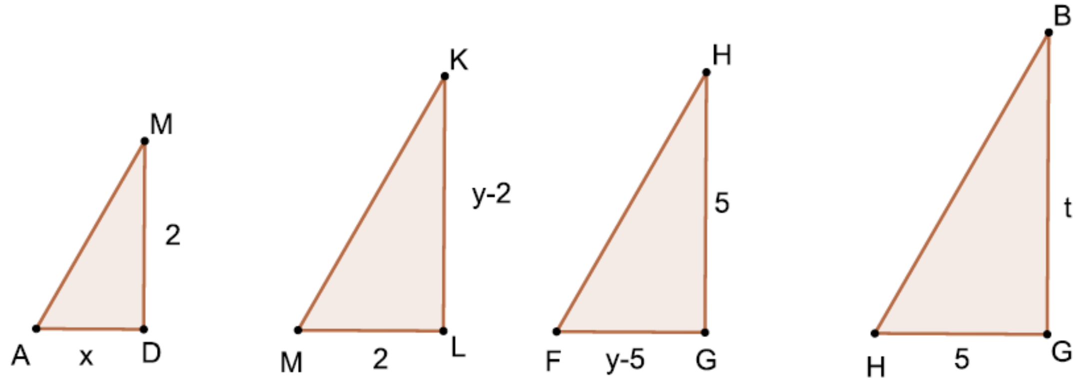
$$10 = (y-5)(y-2) \quad \Rightarrow \quad y = 0 \text{ (No) } y = 7$$

De la primera igualtat:

$$\frac{x}{2} = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{5}$$

De l'última igualtat:

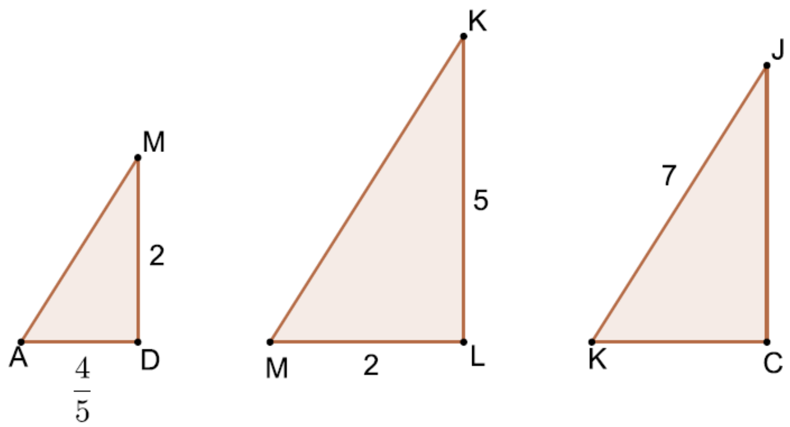
$$\frac{2}{5} = \frac{5}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{25}{2}$$



Per tant:

$$AB = \frac{4}{5} + 2 + 7 + 5 + \frac{25}{2} = \frac{273}{10} = 27{,}3$$

Per al catet AC tenim:



$$AM = \sqrt{4 + \frac{16}{25}} = \frac{2\sqrt{29}}{5}; \qquad MK = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

De la semblança dels dos últims triangles

$$\frac{KC}{2} = \frac{7}{\sqrt{29}} \quad \Rightarrow \quad KC = \frac{14\sqrt{29}}{29}$$

$$AC = AM + MK + KC = \frac{2\sqrt{29}}{5} + \sqrt{29} + \frac{14\sqrt{29}}{29} = \frac{273\sqrt{29}}{145}$$

Per al catet CB tenim:

En el ΔCKJ

$$\mathrm{CJ} = \sqrt{49 - \frac{14^2 \cdot 29}{29^2}} = \frac{35 \cdot \sqrt{29}}{29}$$

En el ΔGHB

$$\mathrm{HB} = \sqrt{25 + \frac{25^2}{4}} = \frac{5\sqrt{29}}{2}$$

$$\mathrm{CB} = \mathrm{CJ} + \mathrm{JH} + \mathrm{HB} = \frac{35 \cdot \sqrt{29}}{29} + \sqrt{29} + \frac{5\sqrt{29}}{2} = \frac{273\sqrt{29}}{58}$$

Por tant:

$$\text{Perímetre} = \frac{273}{10} + \frac{273\sqrt{29}}{145} + \frac{273\sqrt{29}}{58} = \frac{7917 + 1911\sqrt{29}}{290}$$

$$\text{Àrea} = \frac{\mathrm{AC} \cdot \mathrm{CB}}{2} = \frac{\frac{273\sqrt{29}}{145} \cdot \frac{273\sqrt{29}}{58}}{2} = \frac{74529}{580}$$

Març 13: Trobar els enters positius n, k i p tals que:

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{n^2 = 5k + 4} \\ \mathbf{n^3 = 5p + 3} \end{matrix}\right\}$$

Solució: Trobarem les solucions de la primera equació i després exigirem que es complisca la segona equació. Ja que les equacions parlen de divisibilitat per 5 considerarem congruències mòdul 5. Tindrem:

$$\mathrm{n} = 0(5) \;\Rightarrow\; \mathrm{n}^2 = 0(5)$$

$$\mathrm{n} = 1(5) \;\Rightarrow\; \mathrm{n}^2 = 1(5)$$

$$\mathrm{n} = 2(5) \;\Rightarrow\; \mathrm{n}^2 = 4(5)$$

$$\mathrm{n} = 3(5) \;\Rightarrow\; \mathrm{n}^2 = 4(5)$$

$$\mathrm{n} = 4(5) \;\Rightarrow\; \mathrm{n}^2 = 1(5)$$

Per tant, les solucions de la primera equació són:

$$\mathrm{n} = 5\mathrm{t} + 2, \qquad \mathrm{k} = \left(\frac{\mathrm{n}^2 - 4}{5} = \right) 5\mathrm{t}^2 + 4\mathrm{t}, \quad \mathrm{t} \in \mathbb{N}$$

$$\mathrm{n} = 5\mathrm{t} + 3, \qquad \mathrm{k} = \left(\frac{\mathrm{n}^2 - 4}{5} = \right) 5\mathrm{t}^2 + 6\mathrm{t} + 1, \qquad \mathrm{t} \in \mathbb{N}$$

I ara veiam quins d'aquestos valors compleixen la segona equació:

Si n = 5t +2

$$\mathrm{p} = \frac{\mathrm{n}^3 - 3}{5} = \frac{(5\mathrm{t} + 2)^3 - 3}{5} = 25\mathrm{t}^3 + 30\mathrm{t}^2 + 12\mathrm{t} + 1$$

Si n = 5t + 3

$$p=\frac{n^3-3}{5}=\frac{(5t+3)^3-3}{5}=25t^3+45t^2+27t+\frac{24}{5},\qquad \text{No sol.}$$

Per tant, les solucions del sistema considerat són:

$$n=5t+2,\qquad k=5t^2+4t,\qquad p=25t^3+30t^2+12t+1,\qquad t\in\mathbb{N}$$

<u>Març 14:</u> Trobar els enters positius x, y i z tals que:

$$\mathbf{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1}$$

<u>Solució:</u> Si x = y = z aleshores

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{z}=1\ \Rightarrow\ x=y=z=3$$

Si dos incògnites, fiquem x i z, són iguales, tindrem

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1\ \Rightarrow\frac{1}{y}=\frac{x-2}{x}\ \Rightarrow\ x=y(x-2)\ \Rightarrow\ 2y=x(y-1)$$

Per la unicitat de la descomposició factorial en primers tenim tres possibilitats

$$\begin{cases} x=1\ \Rightarrow\ 2y=y-1\ \Rightarrow y=-1 \text{ que no és enter positiu}\\ x=2\ \Rightarrow\ y=y-1\ \Rightarrow\ -1=0\ \text{ que és un absurde}\\ x=2y\ \Rightarrow\ y-1=1\ \Rightarrow\ y=2,\qquad x=z=4\end{cases}$$

Suposem, per finalitzar que z ≠ x ≠ y ≠ z i ja que cap dels tres denominadors pot ser 1 podem suposar

$$1<x<y<z\ \Rightarrow\ \frac{1}{x}>\frac{1}{y}>\frac{1}{z}$$

D'aquí:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x}>\left(\frac{1}{x}>\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y}+\frac{1}{x}>\left(\frac{1}{y}>\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z}+\frac{1}{x}>\left(\frac{1}{x}>\frac{1}{y}\right)\frac{1}{z}+\frac{1}{y}$$

i de nou

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{x}>\left(\frac{2}{x}>\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}>\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}>\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}>\left(\frac{1}{x}>\frac{1}{y}\right)\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=1$$

D'aquí:

$$\frac{3}{x}>1\ \Rightarrow\ 3>x$$

I com x > 1 sols queda la possibilitat de que x = 2. Per tant:

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$$

Com

$$\frac{1}{y} > \frac{1}{z} \;\Rightarrow \left(\frac{1}{y} > \frac{1}{z}\right)\; \frac{2}{y} > \frac{1}{z} + \frac{1}{y} \;\Rightarrow\; 4 > y$$

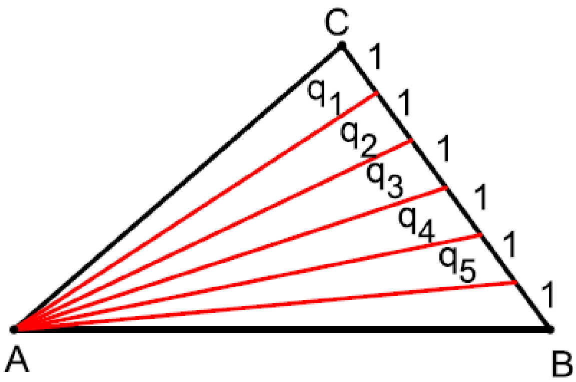
que junt amb (1 < x < y < z) x = 2 < y porta a que y = 3, que porta a:

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}\right)\; \frac{1}{3} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; z = 6$$

En resum, les soluciones de l'equació plantejada són:

(x, y, z)
$\in \{(3,3,3);\ (4,4,2);\ (2,4,4);\ (4,2,4);\ (2,3,6);\ (2,6,3);\ (3,2,6);\ (3,6,2);\ (6,2,3);\ (6,3,2)\}$

Març 15-16:



En el triangle ΔABC tenim AB = 7, BC = 6 i AC = 5. Al costat CB escollim cinc punts equidistants entre ells i dibuixem els segments q_j tal com indica la figura. calcular:

$$\mathbf{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 + q_5^2}$$

Solució: Apliquem reiteradament el teorema del cosinus agafant com angle, l'angle ∠ACB = θ. Tenim:

$$49 = 25 + 36 - 60 \cdot \cos\theta \;\Rightarrow\; \cos\theta = \frac{25 + 36 - 49}{60} = \frac{1}{5}$$

$$q_1^2 = 25 + 1 - 10 \cdot \cos\theta = 25 + 1 - 10 \cdot \frac{1}{5} = 24$$

$$q_2^2 = 25 + 4 - 20 \cdot \cos\theta = 25 + 4 - 20 \cdot \frac{1}{5} = 25$$

$$q_3^2 = 25 + 9 - 30 \cdot \cos\theta = 25 + 9 - 30 \cdot \frac{1}{5} = 28$$

$$q_4^2 = 25 + 16 - 40 \cdot \cos\theta = 25 + 16 - 40 \cdot \frac{1}{5} = 33$$

$$q_5^2 = 25 + 25 - 50 \cdot \cos\theta = 25 + 25 - 50 \cdot \frac{1}{5} = 40$$

I, per últim, sumant:

$$\sum_{i=1}^{5} q_i^2 = 150$$

Març 17: Quants naturals són menors que el primer número amb únicament dos vuits que és primer?

Solució: Els números amb només dos vuits ordenats de menor a major són:

88, 808, 818, ⋯⋯, 878, 880, 881, 882, 883, ⋯⋯

De tots ells, els de color morat acaben en xifra parell i per tant no són primers. Com 881 no és divisible pels primers menors o iguals que $\sqrt{881}$ (= 29,68….) tenim que 881 és primer. Per tant hi ha 880 naturals menors o iguals que el primer nombre primer amb únicament dos vuits.

Març 18: Demostreu que si m i n no són múltiples de 3 llavors **$n^4 + m^4 + 1$** és múltiple de 3

Solució: Si n no és múltiple de 3, tenim:

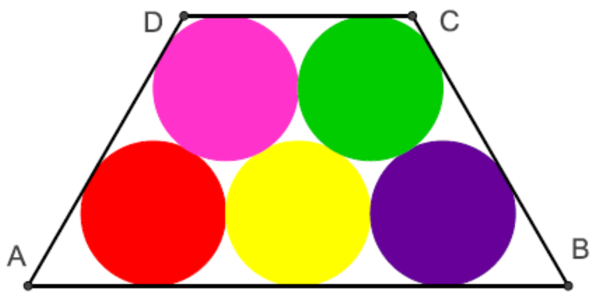
$$n = 1(3) \Rightarrow n^2 = 1(3) \Rightarrow n^4 = 1(3)$$

$$n = 2(3) \Rightarrow n^2 = 1(3) \Rightarrow n^4 = 1(3)$$

Per tant:

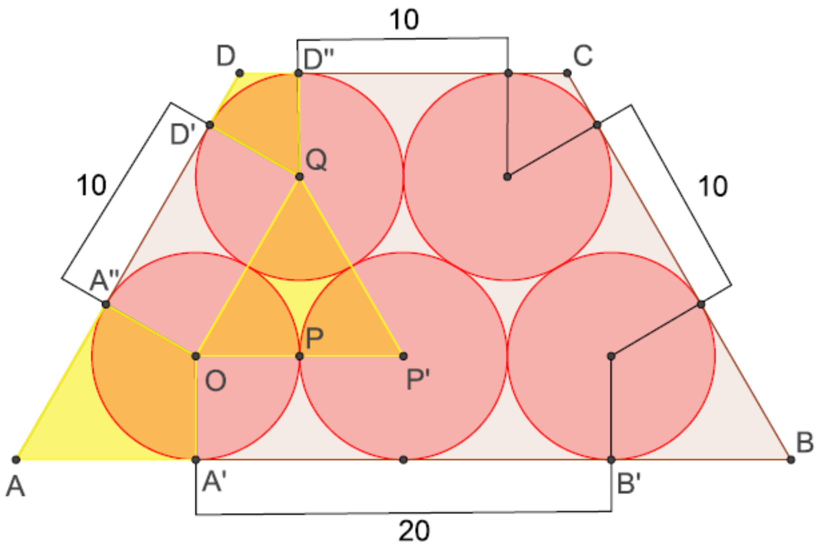
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r} n = 1(3) \\ m = 1(3)\end{array}\right\} \Rightarrow n^4 + m^4 = 2(3) \\ \left.\begin{array}{r} n = 1(3) \\ m = 2(3)\end{array}\right\} \Rightarrow n^4 + m^4 = 2(3) \\ \left.\begin{array}{r} n = 2(3) \\ m = 2(3)\end{array}\right\} \Rightarrow n^4 + m^4 = 2(3)\end{array}\right\} \Rightarrow n^4 + m^4 + 1 = 0(3)$$

Març 19-20:



Cinc cercles de ràdio cinc són tangents externs dos a dos, com indica la figura. Calcular el perímetre i àrea del quadrilàter ABCD

Solució: En primer lloc (per simetria) tindrem que el quadrilàter és un trapezi isòsceles. A més:

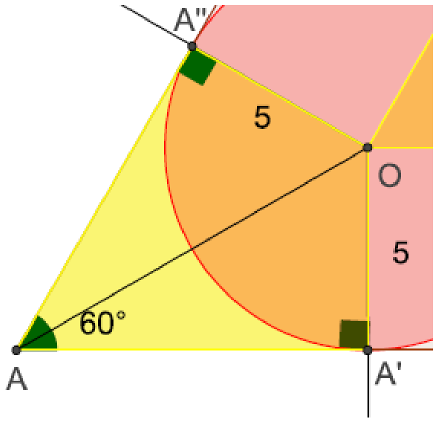


El triangle ΔOQP' és equilàter de costat (2·5 =) 10, d'on:

OQ = 10

OP = 5

QP = $\sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$

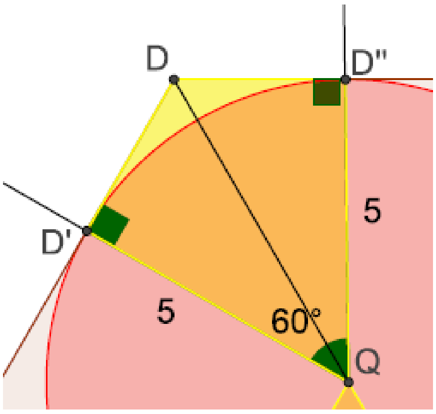


Ja que A''A//OQ y AA'//OP' i ∠QOP' =60° tindrem que ∠A''AA' = 60°

El segment OA és la bisectriu ja que la distancia d'O a la recta AA'' coincideix amb la distancia entre O i la recta AA'. Per tant ∠AOA' = 60° i ΔAA'O és un triangle 30°-60°-90°. D'on:

AO = (2·5 =) 10

AA' = AA'' = $5\sqrt{3}$



Ja que ∠A''AA' = 60° i ABCD és un trapezi isòsceles, tindrem que ∠D'DD'' =120° ⇒ ∠D'QD'' = 60°.

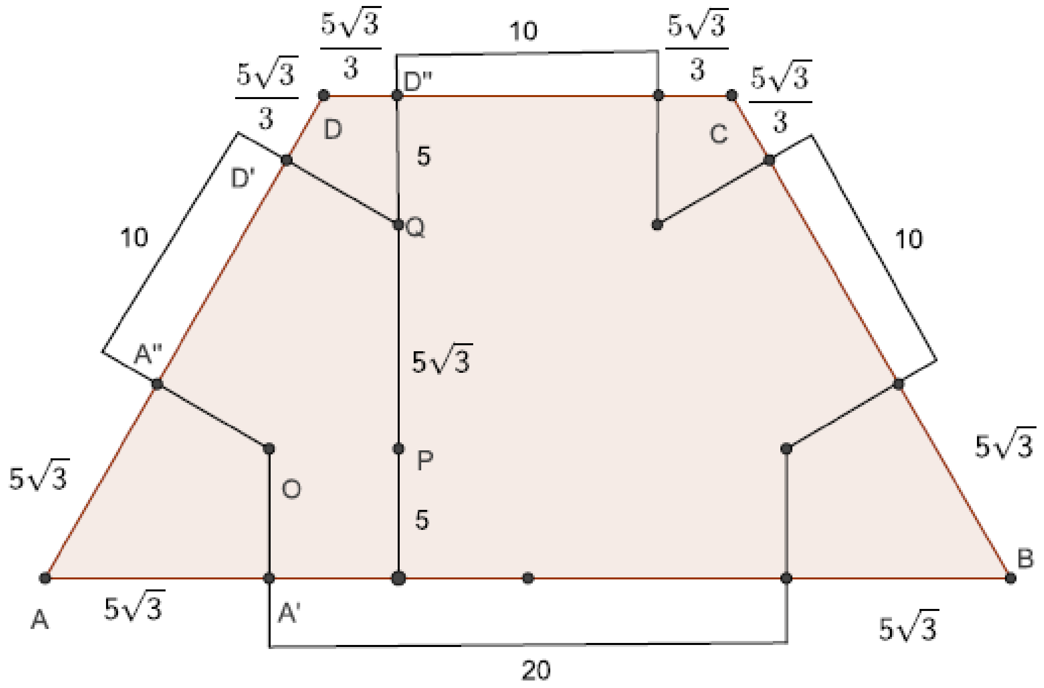
A més, DD' = DD'' ja que els segments que delimiten les dues tangents a una circumferència per un mateix punt exterior (D) mesuren el mateix. Per tant DQ és la bisectriu de l'angle ∠D'QD'' = 60°. Per tant ΔDD'Q és un triangle 30°-60°-90°. Per tant, ΔDD'Q ≈ ΔAA'O, d'on:

$$\frac{DQ}{10} = \frac{D'D}{5} = \frac{D'Q}{5\sqrt{3}}$$

Per tant:

$$D'D = DD'' = \frac{5\sqrt{3}}{3}, \qquad DQ = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

Per últim:



Amb el que:

$$\text{Perímetre} = 2\frac{20\sqrt{3}+30}{3} + \frac{30+10\sqrt{3}}{3} + 20 + 10\sqrt{3} = \frac{80\sqrt{3}+150}{3} = 96{,}18802..$$

$$\text{Àrea} = \frac{20+10\sqrt{3}+\frac{30+10\sqrt{3}}{3}}{2}\cdot\left(10+5\sqrt{3}\right) = \frac{1500+850\sqrt{3}}{6} = 495{,}3738\,\ldots$$

Març 21: Trobar els enters positius que compleixen:

$$\mathbf{a^2 - b = b^2 - a + 2018}$$

Solució: Tenim:

$$a^2 - b^2 = b - a + 2018 \;\;\Rightarrow\;\; (a+b)(a-b) + (a-b) = 2\cdot 1009$$

$$(a+b+1)(a-b) = 2\cdot 1009$$

De la unicitat de la descomposició factorial en nombres primers i ja que

$$a - b < a + b + 1$$

tenim dues possibilitats:

$$\left.\begin{array}{r} a-b=1 \\ a+b+1=2018 \end{array}\right\} \Rightarrow\;\; b=1008, a=1009$$

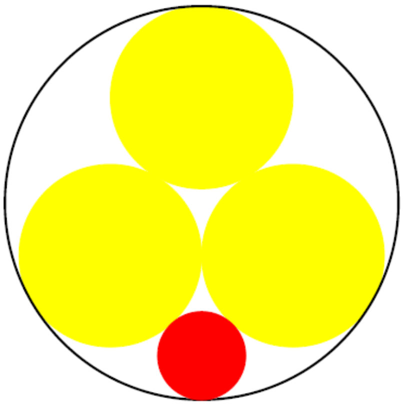
$$\left.\begin{array}{r} a-b=2 \\ a+b+1=1009 \end{array}\right\} \Rightarrow\;\; b=503, a=505$$

Març 22: Proveu que si n no és múltiple de cinc llavors n^4+4 és múltiple de cinc

Solució: Ja que es parla de divisibilitat per 5 estudiem congruències mòdul 5. Tenim:

$$\left.\begin{array}{l} n = 1(5) \Rightarrow n^4 = 1(5) \\ n = 2(5) \Rightarrow n^4 = 1(5) \\ n = 3(5) \Rightarrow n^4 = 1(5) \\ n = 4(5) \Rightarrow n^4 = 1(5) \end{array}\right\} \Rightarrow n^4 + 4 = 0(5)$$

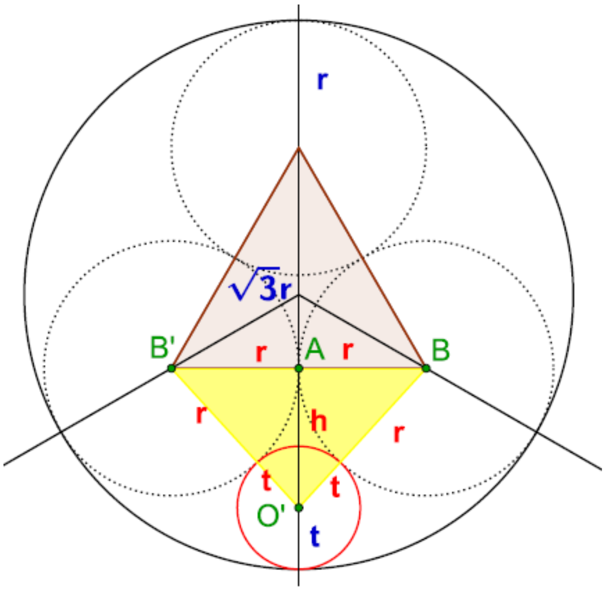
Març 23-24:



Es tenen tres cercles iguals de radi r tangents exteriors dos a dos (mirar figura). Sigui R el radi de la circumferència que els circumscriu i t el radi de la circumferència tangent exterior a dos dels tres cercles iguals i tangent a la circumferència exterior. Trobar t

Solució: La relació existent entre R i r és (vorer problema de 5 de març)

$$R = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} r$$



Considerem el triangle rectangle (ja que ΔBB'O' es isòsceles al ser O'B' = O'B = r + t y B'B = 2r) ΔO'AB (rectangle en A). Com:

$$2R = r + \sqrt{3}r + h + t$$

Tindrem:

$$2\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} r = (1+\sqrt{3})r + h + t$$

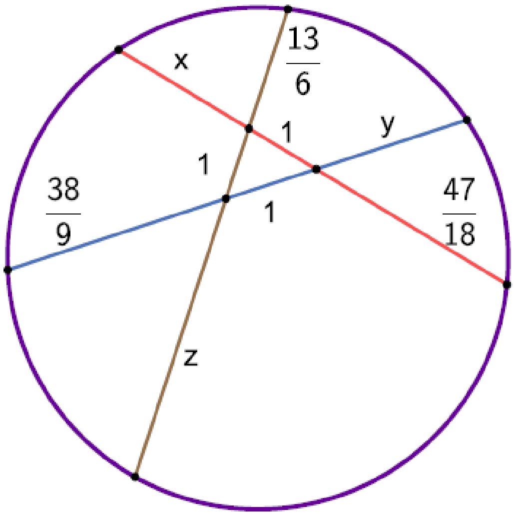
I al operar:

$$\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} r - t = h$$

També podem aplicar Pitàgores en ΔAO'B, i aleshores:

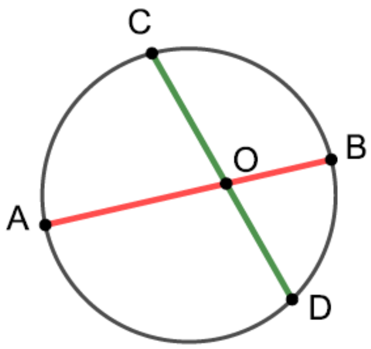
$$h^2 + r^2 = (r+t)^2 \Rightarrow \left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} r - t\right)^2 + r^2 = (r+t)^2 \Rightarrow t = \frac{4\sqrt{3}+6}{6+12\sqrt{3}} r$$
$$= \frac{9+4\sqrt{3}}{33} r$$

<u>Març 25-26:</u>



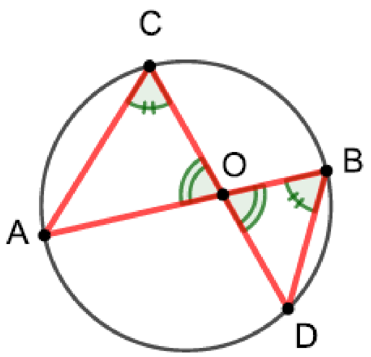
Tres cordes d'una circumferència es tallen formant els segments les longituds dels quals es detallen a la figura. Calcular les longituds x, y i z

<u>Solució:</u> Aplicarem el anomenat teorema de les cordes concurrents



Lema: Si dues cordes, AB i CD, d'una mateixa circumferència es tallen en O, es compleix AO · OB = CO · OD

La demostració és bastant ximple. Al traçar els segments AC i DB queden formats dos triangles (ΔCAO i ΔODB) que són semblants



Ja que els angles en O són iguals per ser oposats pel vèrtex i els angles en C i B també són iguals (al abraçar els dos el mateix arc: AD). Per tant:

$$\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OD}} \Rightarrow \mathrm{CO} \cdot \mathrm{OD} = \mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB}$$

Aplicant aquest resultat a cada punt del triangle que generen les tres cordes concurrents tenim:

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{38}{9}(1+y) & = & z\left(\frac{13}{6}+1\right) \\ (x+1)\frac{47}{18} & = & \left(1+\frac{38}{9}\right)y \\ \frac{13}{6}(z+1) & = & x\left(\frac{47}{18}+1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} 152+152y & = & 114z \\ 47x+47 & = & 94y \\ 39z+39 & = & 65x \end{array}\right\} \Rightarrow x = 3;\ y = 2;\ z = 4$$

<u>Març 27:</u> Considerem les col·leccions de enters a_1, a_2, ..., a_k que compleixen les condicions: l'últim coincideix amb 2018, entre dos termes consecutius ha d'haver menys de 125 unitats i el primer és un enter entre -25 i 25. Quants múltiples de 4 conté la col·lecció que minimitza la suma de tots ells?

Solució: Construirem la successió que minimitza la suma de tots els seus termes i després veurem quants múltiples de 4 conté. La col·lecció la construïm mitjançant el procés de "marxa enrere". Per pròpia exigència a_k = 2018, el terme anterior a de distar menys de 125 unitats. De tots els nombres que compleixen aquesta exigència el menor és a_{k-1} = (2018 – 124 =) 1894, 'anterior ha de distar menys de 125 unitats, d'entre tots ells el que aporta menor suma (el més petit) és (1894 - 124 =) 1770. Continuem d'aquesta manera construint la col·lecció. Com en dividir 2018 entre 124 dóna quocient 16 i resta 34, tindrem que hem construït una PA de 16 termes que comença amb 16 i acaba amb 2018 (de diferència 124). A aquesta col·lecció hem d'afegir-li el primer terme ja que els construïts fins ara no compleixen l'última condició. Com volem que la suma sigui mínima triem com a primer element a a_1 = – 24. La col·lecció queda:

– 24, 34, 158, 282, …….. , 1894, 2018

Amb suma

$$\sum = -24 + \frac{34 + 2018}{2} \cdot 16 = 16392$$

Vegem quants múltiples de 4 hi ha a la col·lecció. Per descomptat – 24 és múltiple de 4. Els altres termes obeeixen a la fórmula:

$$a_n = 34 + 124(n-1) = 124n - 90 = 2(2 \cdot 31n - 3^2 \cdot 5)$$

Si suposem que $2{\cdot}31n - 3^2{\cdot}5$ és múltiple de 2, tindrem que $3^2{\cdot}5$ és múltiple de 2, que es un absurd ja que el factor 2 no apareix en la seua factorització en primers. Es dir, la col·lecció a_2, a_3, ….. , a_{16} són parells, però no múltiples de 4.

En definitiva, en la col·lecció sols hi ha un múltiple de 4

Març 28-29: Donat un nombre de tres xifres, M, definim eli (M) com el nombre de dues xifres que resulta d'eliminar la xifra de les centenes de M (per exemple, si M = 347 eli (M) = 47). Trobar els enters de tres xifres de manera que el seu eli més deu vegades la xifra eliminada és igual al producte del seu eli per la xifra eliminada

Solució: Si N té a x com xifra de les centenes, a y com xifra de les desenes i a z com xifra de les unitats; tindrem que la informació de l'enunciat es transforma en:

$$10x + \mathrm{eli}(N) = x \cdot \mathrm{eli}(N); \;\; (\mathrm{eli}(N) = 10y + z) \Rightarrow 10x + 10y + z = x(10y + z)$$
$$\Rightarrow \;\; (x-1) \cdot (10y + z) = 2 \cdot 5 \cdot x$$

I ara, per la unicitat de la descomposició factorial en nombres primers, tenim:

$$x - 1 = 1 \;\Rightarrow\; x = 2 \;\Rightarrow 10y + z = 2 \cdot 5 \cdot 2 = 20 \;\Rightarrow\; y = 2, z = 0$$

$$x - 1 = 2 \;\Rightarrow\; x = 3 \;\Rightarrow 10y + z = 5 \cdot 3 = 15 \;\Rightarrow\; y = 1, z = 5$$

$$x - 1 = 5 \;\Rightarrow\; x = 6 \;\Rightarrow 10y + z = 2 \cdot 6 = 12 \;\Rightarrow\; y = 1, z = 2$$

$$x - 1 = 2x \;\Rightarrow\; x = -1 \;\Rightarrow \text{no solució}$$

$$x - 1 = 5x \;\Rightarrow\; 4x = -1 \;\Rightarrow \text{no solució}$$

$$x - 1 = 10x \;\Rightarrow\; 9\,x = 2 - 1 \;\Rightarrow \text{no solució}$$

Així, que, els nombres dels que parla l'enunciat són: 220, 315 i 612.

<u>Març 30:</u> Considerem el número N=12345......201720182019 que té, ordenats, tots els naturals des de l'1 al 2019. Calcular el residu de la divisió de N entre 24.

<u>Solució:</u> Com 24 = $3\cdot2^3 = 3\cdot8$, estudiarem la divisibilitat de N per 3 i per 8. Recordem que un nombre és divisible per 8 sii ho és el nombre format per les tres últimes xifres del nombre inicial. Com que:

$$123\ldots.20182019 = 123\ldots\ldots20182016 + 3 = 8\mathrm{k} + 3$$

Tenim que N = 3(8). Vegem que N és divisible per 3. Tenim

$$\sum_{123\ldots.20182019} = \frac{1+2019}{2}\cdot 2019 = 1010\cdot 2019 = 2\cdot 5\cdot 3\cdot 673$$

Per el que 123 ….. 20182019 és múltiple de 3. Per últim:

$$\mathrm{N} = 8\mathrm{k} + 3 = 8(\mathrm{k}-1) + 11 = 8(\mathrm{k}-2) + 19 = 8(\mathrm{k}-3) + 27$$

Com N és múltiple de 3 i 27 és múltiple de 3, tindrem que 8(k – 3) és múltiple de 3, és dir 8(k – 3) = 8·3·P' i aleshores:

$$\mathrm{N} = 8(\mathrm{k}-3) + 27 = 24\cdot \mathrm{P}' + 24 + 3 = 24(\mathrm{P}'+1) + 3$$

Es dir: N = 3(24).

<u>Març 31:</u> Trobar els enters positius que compleixen:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{m^2 = 8k}\\ \mathbf{m^3 = 8p}\end{array}\right\}$$

<u>Solució:</u> Trobarem els m, k que compleixen la primera equació i després exigirem que es compleixi la segona equació. Ja que les equacions parlen de múltiples de 8 utilitzarem congruències mòdul 8. Tenim:

$$\mathrm{m} = 0(8) \;\Rightarrow\; \mathrm{m}^2 = 0(8)$$
$$\mathrm{m} = 1(8) \;\Rightarrow\; \mathrm{m}^2 = 1(8)$$
$$\mathrm{m} = 2(8) \;\Rightarrow\; \mathrm{m}^2 = 4(8)$$
$$\mathrm{m} = 3(8) \;\Rightarrow\; \mathrm{m}^2 = 1(8)$$
$$\mathrm{m} = 4(8) \;\Rightarrow\; \mathrm{m}^2 = 0(8)$$
$$\mathrm{m} = 5(8) \;\Rightarrow\; \mathrm{m}^2 = 1(8)$$
$$\mathrm{m} = 6(8) \;\Rightarrow\; \mathrm{m}^2 = 4(8)$$
$$\mathrm{m} = 7(8) \;\Rightarrow\; \mathrm{m}^2 = 1(8)$$

Per tant les solucions de la primera equació són:

$$\mathrm{m} = 8\mathrm{t}, \mathrm{k} = 8\mathrm{t}^2, \mathrm{m} = 8\mathrm{t}+4, \mathrm{k} = 8\mathrm{t}^2 + 8\mathrm{t} + 2 \quad \text{con} \quad \mathrm{t} \in \mathbb{N}$$

I ara exigim que estes verifiquen la segona equació:

$$\text{Si } \mathrm{m} = 8\mathrm{t} \;\Rightarrow\; \mathrm{m}^3 = 8^3\mathrm{t}^3 = 8\cdot 64\mathrm{t}^3 = \{\mathrm{p} = 64\mathrm{t}^3\} = 8\mathrm{p}$$

$$\text{Si } m = 8t + 4 \quad \Rightarrow \quad m^3 = (8t+4)^3 = 512t^3 + 768t^2 + 384t + 64$$
$$= 8 \cdot (64t^3 + 96t^2 + 48t + 8) = 8p$$

Es dir, les solucions del sistema són:

$$m = 8t, k = 8t^2, p = 64t^3 \text{ o } \ m = 8t + 4, k = 8t^2 + 8t + 2, p$$
$$= 64t^3 + 96t^2 + 48t + 8 \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{N}$$