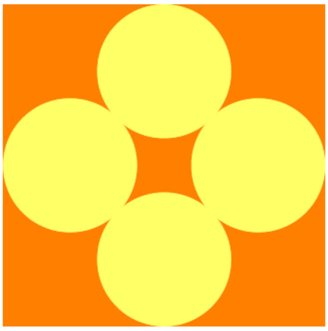
SOLUCIONS ABRIL 2019

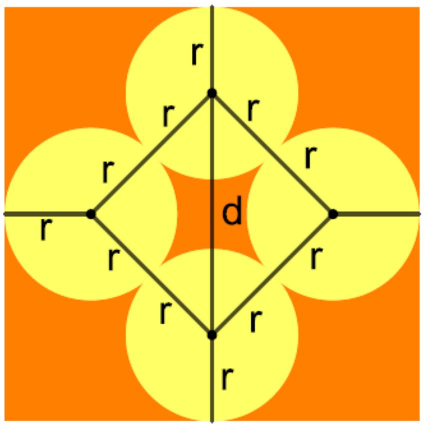
Col·lecció per a preparar la Olimpíada de Matemàtiques de Secundaria (FESPM) de segon cicle de l'ESO en 2002 (Autor: José Colón Lacalle. Professor jubilat)

Abril 1-2:



Un tovalló de 15 cm de costat té dibuixats 4 cercles iguals i tangents entre si i tangents als costats. Si l'atzar, un escuradents cau de punta a sobre, quina és la probabilitat que caigui sobre algun cercle?

Solució:



De la figura tenim:

$$d = \sqrt{4r^2 + 4r^2} = 2r\sqrt{2}$$

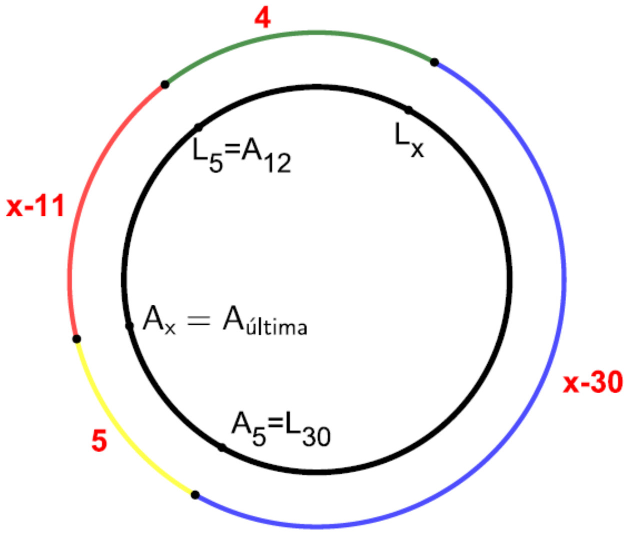
$$15 = 2r + d = 2r\left(\sqrt{2} + 1\right) \Rightarrow r = \frac{15}{2\left(\sqrt{2} + 1\right)}$$

$$\text{Àrea cercles} = 4\pi r^2 = \frac{15^2\pi}{3 + 2\sqrt{2}}$$

$$\text{Probabilitat} = \frac{\frac{15^2\pi}{3 + 2\sqrt{2}}}{15^2} = \frac{\pi}{3 + 2\sqrt{2}} \approx 0{,}5390$$

Abril 3-4: Al voltant d'una plaça hi ha cases. Laia i Aitana donen una volta a la plaça en el mateix sentit i conten les cases. Com que no comencen a comptar a la mateixa casa, la cinquena casa de la Laia és la dotzena d'Aitana i la cinquena casa d'Aitana és la trentena de la Laia. Quantes cases hi ha al voltant de la plaça?

Solució:



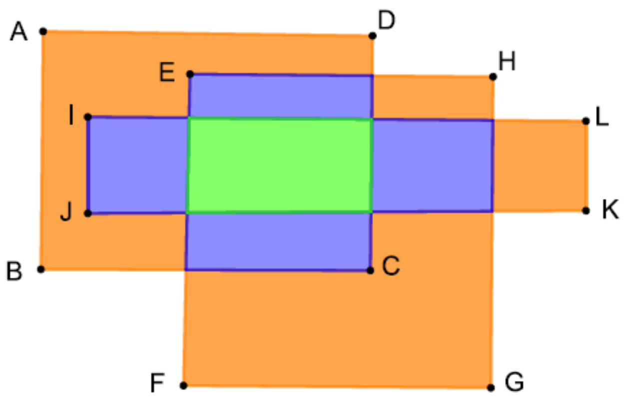
Siga x el nombre de cases de la plaça. Tenim el següent diagrama de l'esquerra. D'ell:

$$x - 11 + 5 + x - 30 + 4 = x$$

Es dir, x = 32

Abril 5-6: Tres alumnes resolen cada un d'ells exactament seixanta problemes d'una llista de cent. Tots els problemes van ser resolts per almenys un dels tres. Direm que un problema és fàcil si els tres ho resolen i que és difícil si només un dels tres ho resol. Si d és la quantitat de problemes difícils i f la de fàcils, trobar d – f

Solució:



Utilitzem el següent diagrama de Venn. Els quadrilàters ABCD, EFGH i IJKL representen els problemes resolts per cada un dels alumnes. La zona de color taronja serà els problemes considerats difícils (d'àrea d) (els problemes resolts únicament per un alumne).

La zona de color blau serà els problemes considerats semidifícils (d'àrea s) (els problemes resolts exactament per dos alumnes). I la zona verda serà els problemes fàcils (d'àrea f) (els resolts pels tres alumnes). tindrem:

$$\left.\begin{array}{r} f + d + s = 100 \\ 2s + d + 3f = 60 \cdot 3 \end{array}\right\}$$

Restant la primera equació a la segona, tenim

$$\left.\begin{array}{r} f + d + s = 100 \\ s + 2f = 80 \end{array}\right\}$$

I restant a la segona equació la primera: $d - f = 20$

Abril 7-14: Laia va tots els dies a la feina amb bicicleta per un camí paral·lel a la via del tren. Porta una velocitat de 6 km / h i tots els dies coincideix en una cruïlla amb un tren que porta el seu sentit. Un dia es va retardar 50 minuts de manera que el tren la va aconseguir a sis km de l'encreuament. Calcular el temps que triga el tren a arribar a l'encreuament després de sobrepassar a la Laia

Solució de Petar P, en aquells temps alumna de tercer d'ESO en el IES "Almadraba" de Tarifa (Cádiz): Quan el tren arriba a 6 km abans de la cruïlla, el podem parar 50 minuts, perquè així la Laia avança el que s'ha adormit. Així en els 50 minuts justos Laia va estar 10 minuts (1 km) abans de la cruïlla. Posem una altra vegada en marxa el tren que l'aconsegueix a la cruïlla en aquests 10 minuts.

Abril 8-15: Per obtenir l'ordre d'exposició d'un treball a tota la classe es prepara una bossa amb dues boles negres i una bola blanca. Tres alumnes van traient, per ordre, una bola que no tornen, qui tregui la bola blanca comença. Qui té més probabilitat de començar l'exposició?

Solució: Tenim:

P (guanye el primer) = P (extraure bola blanca) = $\frac{1}{3}$

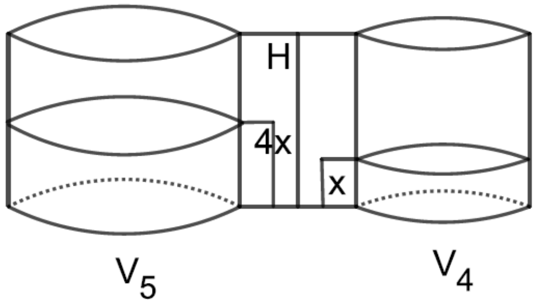
P (guanye el segon) = P (el primer extraga bola negra i el segon bola blanca) = $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

P (guanye el tercer) = P (el primer extraga bola negra i el segon bola blanca) = $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

Per tant el procediment es equitatiu.

Abril 9-10: Ahir a la nit, mentre estudiava, es va anar la llum. Immediatament vaig encendre dos ciris i vaig seguir treballant fins que van arreglar l'avaria. L'endemà vaig voler esbrinar quant va durar l'apagada, però no sabia quan va començar, ni quan va acabar. Només recordo que el primer ciri durava cinc hores i el segon quatre. Quant va durar l'apagada si el primer ciri s'havia quedat quatre vegades més llarg que el segon?

Solució:



La funció que dóna l'altura del ciri després de t hores és:

$$V_5 = H\left(\frac{5-t}{5}\right);\quad V_4 = H\left(\frac{4-t}{4}\right)$$

Quan acaba l'apagada l'altura de la V_5 és quatre vegades l'altura del ciri V_4, és a dir:

$$V_5 = 4V_4 \;\Rightarrow\; H\left(\frac{5-t}{5}\right) = 4H\left(\frac{4-t}{4}\right) \;\Rightarrow\; (5-t) = 5(4-t) \;\Rightarrow\; t = 3{,}75\text{ h} = 3\text{h }45\text{m}$$

Abril 11-12: Una quadrilla de pintors havia de pintar dues parets, una de doble superfície que l'altra. Tota la quadrilla va estar pintant la paret gran durant quatre hores. Després la meitat de la quadrilla pinto a la paret petita i l'altra meitat a la paret gran durant quatre hores. En finalitzar la jornada només els va quedar una mica per pintar de la paret petita, per a la qual només va ser necessari un pintor durant vuit hores. Quantes persones componen la quadrilla?

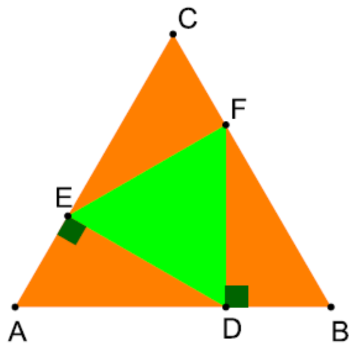
Solució: Siga x el nombre de pintors de la quadrilla, S_1 (S_2) la superfície de la paret gran (petita). Tenim: $S_1 = 2 \cdot S_2$ (*).

D'altra banda, la paret gran necessita x pintors durant 4 hores més x/2 pintors durant altres 4 hores, fent un total de 6x hores. La paret petita necessita x/2 pintors durant 4 hores més 1 pintor durant 8 hores, fent un total de 2x + 8 hores.

Recordant (*), tenim:

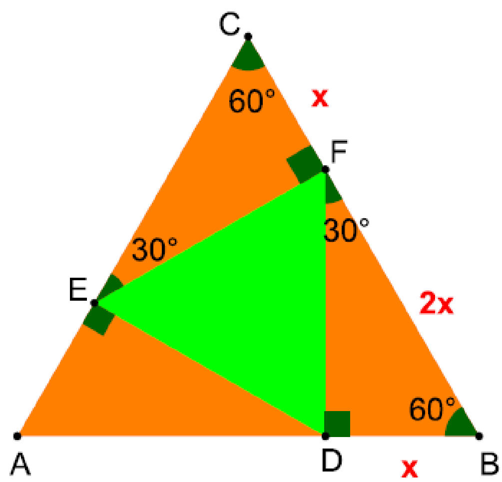
$$6x = 2 \cdot (2x + 8) \quad \Rightarrow \quad x = 8$$

Abril 13-20:



Tenim un triangle equilàter ΔABC de costat 6 cm. Inscrivim en ell un nou triangle equilàter ΔDEF de manera que DE és perpendicular a AC, EF és perpendicular a BC i FD és perpendicular a AB. Trobar la longitud del costat del triangle ΔDEF

Solució:



Els angles en A, B i C són de 60°. Per tant, l'angle en F (en ΔFDB) és de 30° i l'angle a E (a ΔCEF) és de 30°. Per tant, ΔCEF i ΔFDB són iguals (EF = FD) i són triangles 30°-60°-90°, d'on el catet petit és la meitat de la hipotenusa. D'aquí:

$$x + 2x = 3x = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

Aplicant Pitàgores al ΔDFB, tenim:

$$\text{costat} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Abril 16-17: Un orador va parlar durant seixanta minuts a un auditori ple. El 20% de l'audiència va escoltar tot el discurs i el 10% es va adormir durant tot el discurs. La meitat dels oients restants va sentir la tercera part del discurs i l'altra meitat dels oients restants va sentir les dues terceres parts del discurs. Quin és el nombre mitjà de minuts del discurs que els membres de l'audiència van sentir?

Solució: Calcularem la proporció de subjectes de cada grup i el temps que van estar escoltant l'orador cada grup. Segons l'enunciat:

El 20% van escoltar tot el discurs $\Rightarrow\ \mathrm{p}_1 = 0{,}2;\ \ \mathrm{t}_1 = 60\ \mathrm{m}$

El 10% es van adormir durant tot el discurs $\Rightarrow\ \mathrm{p}_2 = 0{,}1;\ \ \mathrm{t}_2 = 0\ \mathrm{m}$

El 35% van escoltar una tercera part del discurs $\Rightarrow\ \mathrm{p}_3 = 0{,}35;\ \ \mathrm{t}_3 = \left(\frac{1}{3}\cdot 60 =\right) 20\ \mathrm{m}$

El 35% van escoltar dues terceres parts del discurs $\Rightarrow\ \mathrm{p}_4 = 0{,}35;\ \ t_4 = \left(\frac{2}{3}\cdot 60 =\right) 40\ \mathrm{m}$

Per tant, la mitjana resultant és:

$$\mathrm{mitjana} = 0{,}2\cdot 60 + 0{,}1\cdot 0 + 0{,}35\cdot 20 + 0{,}35\cdot 40 = 33\ \mathrm{minuts}$$

Abril 18-19: Quatre gots, prou grans, contenen el mateix volum de líquid. El primer got conté cafè sol i els altres tres només llet. S'aboca la quarta part del contingut del primer got en el segon. Es fa la barreja homogènia i, a continuació, s'aboca la quarta part del contingut del segon al tercer. Es fa la barreja homogènia i s'aboca la quarta part del contingut en l'últim got. Quina és la raó entre els volums de cafè i llet en aquest quart got?

Solució: Prenem com a unitat de volum, el volum de líquid de cada un dels quatre gots. En fer el transvasament entre el primer i el segon got tenim que el volum del segon got passa a ser de $\frac{5}{4}$ sent $\frac{1}{4}$ de cafè i 1 de llet. Un quart d'aquesta barreja de contindrà $\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} =\right)\frac{1}{16}$ de cafè i $\left(\frac{1}{4}\cdot 1 =\right)\frac{1}{4}$ de llet. Al transvasar aquesta quantitat de líquid al tercer got tindrem que el tercer got contindrà un volum de $\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16} =\right)\frac{21}{16}$ unitats de volum, dels quals $\frac{1}{16}$ és de cafè i el resto $\left(\frac{5}{4}\right)$ de llet. Un quart d’aquesta barreja contindrà $\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16} =\right)\frac{1}{64}$ de cafè i $\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{4} =\right)\frac{5}{16}$ de llet. Al transvasar aquesta quantitat de barreja al quart got tindrem que el quart got contindrà un volum de $\left(1+\frac{5}{16}+\frac{1}{64} =\right)\frac{85}{64}$ dels quals $\frac{1}{64}$ són de cafè i $\left(1+\frac{5}{16} =\right)\frac{21}{16}$ són de llet. Per tant, la raó entre els volums de cafè i llet en aquest quart got és:

$$\frac{\text{volum de cafè}}{\text{volum de llet}} = \frac{\frac{1}{64}}{\frac{21}{16}} = \frac{1}{84}$$

És dir, hi ha una part de cafè per cada 84 parts de llet.

Abril 21-28: Un condemnat quedarà en llibertat quan arribi al final d'una escala de 100 graons. Però no pot avançar al seu capritx, ja que està obligat a pujar un graó cada dia dels mesos imparells i a baixar un esglaó cada dia dels mesos parells. Comença l'1 de gener de 2001. Quin dia quedarà en llibertat?

Solució de Mohamed Blanca, en aquells temps alumne de 4 ESO en el I.E.S. "Ausiàs March" (Manises-València): Analitzem mes a mes el primer any:

mes	graons	total
gener	+ 31	+31
febrer	-28	3
març	+31	34
abril	-30	5
maig	+31	35
juny	-30	5
juliol	+31	36
agost	-31	5
setembre	+30	35
octubre	-31	4
novembre	+30	34
desembre	-31	3

Y el mateix ocorrerà en cada any no de traspàs, cada any no de traspàs pujarà en total 3 esglaons, arribant a un màxim de 36 al juliol. En els anys de traspàs pujarà un esglaó menys totalitzant 2 en total i aconseguint un màxim de 35 al juliol. Per tant tindrem:

període	graons	total
2001-2004	+11	11
2005-2008	+11	22
2009-2012	+11	33
2013-2016	+11	44
2017-2020	+11	55
2021-2024	+11	66

Analitzem amb detall que passa en l'últim període, ja que si en algun dia d'aquest període s'arriba a tenir 64 graons pot (al afegir-se el màxim anual: 36) arribar al graó 100

any	graons	total
2021	+3	58
2022	+3	61
2023	+3	64

A l'any següent, 2024, que és de traspàs no s'assoleixen els 100 graons ja que en els anys de traspàs el màxim que s'aconsegueix és 35, amb el que s'arribaria al graó 99. Per tant, arribarà al final de l'escala al següent any a l'aconseguir per primera vegada un total de 34. El pres aconseguirà la seva llibertat el 31 de març de 2025.

Abril 22-23: Si s'escriu l'edat de Laia i a continuació l'edat d'Aitana s'obté un número de quatre xifres que és un quadrat perfecte. Si es fera el mateix dins d'onze anys, es tindria de nou un quadrat perfecte de quatre xifres. Calcular les edats actuals de Laia i Aitana.

Solució de Nèstor Abad (@nabadvin): Siga $\overline{\mathrm{ab}} = 10\mathrm{a} + \mathrm{b}$ l'edat de Laia y $\overline{\mathrm{cd}} = 10\mathrm{c} + \mathrm{d}$ l'edat d'Aitana. Les edats, concatenades, són un quadrat perfecte, és a dir:

$$\overline{\mathrm{abcd}} = 1000\mathrm{a} + 100\mathrm{b} + 10\mathrm{c} + \mathrm{d} = \mathrm{n}^2$$

Segons l'enunciat, dins d'11 anys ocorrerà el mateix, és a dir:

$$100(10\mathrm{a} + \mathrm{b} + 11) + 10\mathrm{c} + \mathrm{d} + 11 = \mathrm{m}^2$$

$$1000\mathrm{a} + 100\mathrm{b} + 1100 + 10\mathrm{c} + \mathrm{d} + 11 = 1000\mathrm{a} + 100\mathrm{b} + 10\mathrm{c} + \mathrm{d} + 1111 = \mathrm{m}^2$$

D'on:

$$1111 = \mathrm{m}^2 - \mathrm{n}^2 = (\mathrm{m} + \mathrm{n}) \cdot (\mathrm{m} - \mathrm{n}) = 11 \cdot 101$$

Per la unicitat de la descomposició factorial en nombres primers i ja que, també, m + n > m – n, deu complir-se:

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{m} - \mathrm{n} = 11 \\ \mathrm{m} + \mathrm{n} = 101 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathrm{m} = 56, \mathrm{n} = 45$$

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{m} - \mathrm{n} = 1 \\ \mathrm{m} + \mathrm{n} = 1111 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathrm{m} = 556, \mathrm{n} = 555, \qquad \text{no solució}$$

Per tant l'edat de Laia és 20 i l'edat d'Aitana és 25 ja que $45^2 = 2025$

Abril 24-25: Aitana, Laia, Carles, Dani, Clara i Ferran són col·leccionistes de quadres i dos d'ells són germans. Un dia van anar plegats a una exposició i van comprar de la següent forma: Aitana va comprar un quadre, Laia dos, Carles tres, Dani quatre, Clara cinc i Ferran sis. Els dos germans van pagar igual quantitat de diners per cadascun dels quadres que van comprar. Els altres del grup van pagar el doble per cada quadre dels quals van pagar els germans. En total van pagar cent mil euros. El preu de cada quadre és un nombre enter d'euros. Qui són germans?

Solució: Siga y = nombre total de quadres comprats pels dos germans, z = nombre total de quadres comprats pels altres i x = preu de cada quadre comprat pels dos germans. Llavors, de l'enunciat:

$$\left.\begin{array}{c} xy + 2xz = 100000 \\ y + z = 21 \end{array}\right\}$$

perquè 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21. De la segona equació tenim dues conseqüències: la primera: com (1 +2 =) $3 \leq y \leq 11$ (= 5 + 6), tenim que $10 \leq z \leq 18$. La segona que y = 21 – z. I tenint en compte això últim en la primera equació:

$$x(21 - z) + 2xz = 100000; \;\; x(21 + z) = 100000$$

Per tant, 21 + z es un divisor de 100000. En resum: $10 \leq z \leq 18$ i 21 + z es un divisor de 100000.

Si z = 10, tenim que 21 + z = 31 que no es un divisor de 100000. Per tant $z \neq 10$.

Si z = 11, tenim que 21 + z = 32 = 2^5 que es un divisor de 100000. En aquest cas:

$$x = \frac{100000}{21 + z} = \frac{100000}{32} = 3125 \; y = 21 - z = 21 - 11 = 10$$

i com y és suma de dos números de 1, 2, 3, 4, 5, 6 només hi ha la possibilitat y = 10 = 6 + 4. Per tant Ferran i Dani són els germans.

Si z = 12, tenim que 21 + z = 33 que no és un divisor de 100000. Per tant $z \neq 12$.

Si z = 13, tenim que 21 + z = 34 que no és un divisor de 100000. Per tant $z \neq 13$.

Si z = 14, tenim que 21 + z = 35 = 5·7 que és un divisor de 100000. Però en aquest cas:

$$100000 = (21 + z)x$$

I com (21 + x) conté al factor 7, 100000 deu contenir el factor 7 que constitueix un absurd. Per tant z = 14 no és solució.

Si z = 15, tenim que 21 + z = 36 que no és un divisor de 100000. Per tant $z \neq 15$.

Si z = 16, tenim que 21 + z = 37 que no és un divisor de 100000. Per tant $z \neq 16$.

Si z = 17, tenim que 21 + z = 38 que no és un divisor de 100000. Per tant $z \neq 17$.

Si z = 18, tenim que 21 + z = 39 que no és un divisor de 100000. Per tant $z \neq 18$.

Abril 26-27: La torre Eiffel té 300 metres d'altura i està construïda enterament de ferro, el seu pes total és de huit milions de quilo. Desitge encarregar una reproducció exacta i que pese només un quilo. Quina altura tindrà?

Solució: Siga M i V (m i v) la massa i el volum la torre Eiffel (de la seua reproducció). Ja que ambdues estan fetes del mateix material (estan fetes amb material de la mateixa densitat) tindrem:

$$\frac{M}{V} = d = \frac{m}{v} \Rightarrow \frac{8 \cdot 10^6}{V} = \frac{1}{v} \Rightarrow 8 \cdot 10^6 \cdot v = V$$

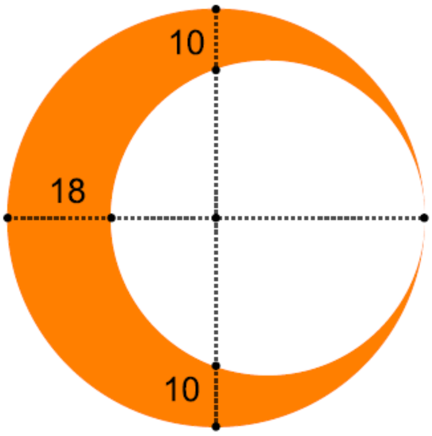
És a dir, la raó de proporcionalitat entre volums és $8 \cdot 10^6$. Per tant, la raó de proporcionalitat entre longituds serà:

$$\sqrt[3]{8 \cdot 10^6} = 2 \cdot 100$$

És a dir, si L (l) és l'altura de la torre Eiffel (de la seua reproducció), tindrem:

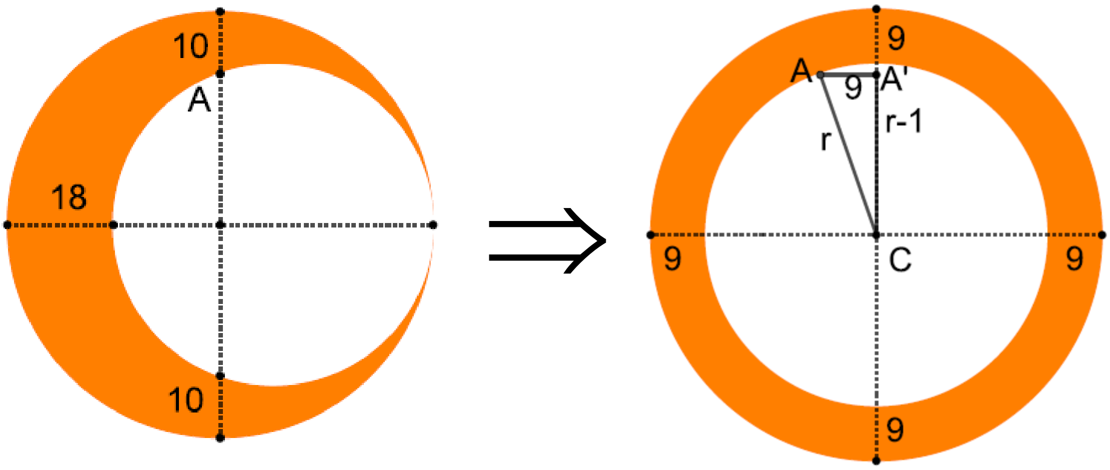
$$2 \cdot 100 \cdot l = L \Rightarrow l = \frac{L}{200} = \frac{300}{200} = 1{,}5 \text{ m}$$

Abril 29-30:



Dos cercles són tangents interiors com a mostra la il·lustració. Calcular l'àrea de la zona compresa entre els dos cercles

Solució: Desplacem el cercle interior a l'esquerra 9 cm, llavors els centres dels dos cercles coincidiran:



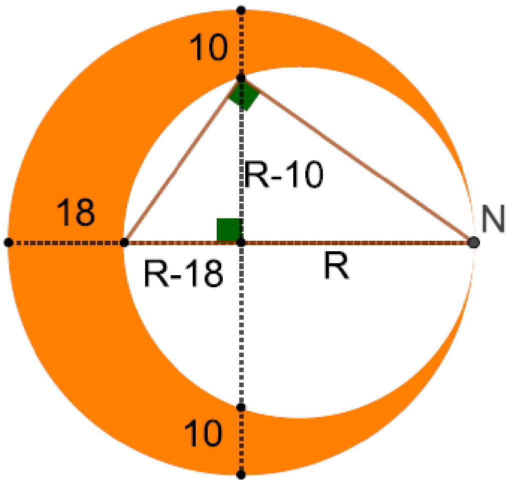
Queda format el triangle ΔAA'C, que és rectangle en A'. En aplicar Pitàgores, tindrem:

$$(r-1)^2 + 9^2 = r^2 \Rightarrow 82 = 2r \Rightarrow r = 41$$

L'àrea de la corona circular coincideix amb l'àrea buscada. Per tant, l'àrea buscada és:

$$\pi(41+9)^2 - \pi 41^2 = \pi(50^2 - 41^2) = 819 \cdot \pi \cong 2572{,}96 \ldots$$

Solució de @asitnof:



Si R (r) és el radi de la circumferència gran (xicoteta) tenim:

$$\frac{R-10}{R-18} = \frac{R}{R-10} \quad \Rightarrow \quad R = 50$$

Per tant:

$$r = \frac{2 \cdot 50 - 18}{2} = 41$$

I, per últim:

$$A = \pi(50^2 - 41^2) = 819\pi$$