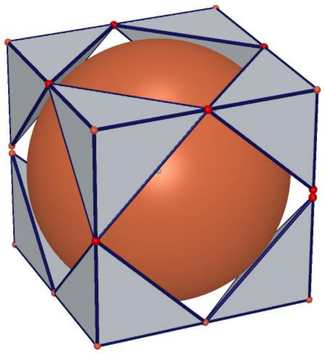
SOLUCIONS MAIG 2019

Problemes de Geometria (per a utilitzar programes de geometria: Cabri, Geogebra,...).
Autor: Ricard Peiró i Estruch (IES “Abastos”. València)

Maig 1-2:



Un petjapapers està fet amb un cub de vidre de costat 2 unitats truncat en huit cantonades tetraèdriques que es toquen en els punts mitjans de les arestes del cub. La resta del nucli interior del cub es descarta i és reemplaçat per una esfera. Les huit peces de les cantonades que estan ara són tangents a una esfera.

Quin és el diàmetre de l'esfera?

Solució:
La diagonal del cub és:

$$D=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}\,.$$

Hem de calcular l'altura h de la cantonada tetraèdrica sobre la base que és un triangle equilàter. El volum del tetraedre és:

$$V=\frac{1}{3}\frac{1}{2}1^2\cdot 1=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{2}\right)^2 h\,.$$

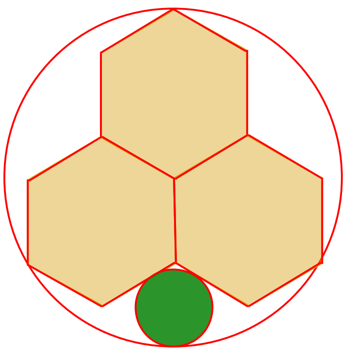
Resolent l’equació:

$$h=\frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

El diàmetre de l’esfera és:

$$d=D-2h=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\sqrt{3}=\frac{4}{3}\sqrt{3}\,.$$

Maig 3-4:



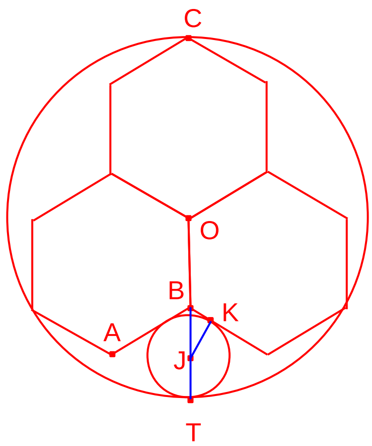
A l'interior d'una circumferència de ràdio R hi ha 3 hexàgons regulars iguals i una circumferència tangent a la circumferència de ràdio R i tangent al costat de dos hexàgons.

Determineu el radi de la circumferència ombrejada

Solució: Siga T el punt de tangència de les dues circumferències.

Siga O el centre de la circumferència exterior i $\overline{OC} = \overline{OT} = R$ el radi.

Siga $\overline{AB} = \overline{BO}$ costats del hexàgon regular.



$$\overline{AB} = \overline{BO} = \frac{1}{2}\overline{OC} = \frac{1}{2}R.$$

$$\overline{BT} = \frac{1}{2}R.$$

Siga J el centre de la circumferència xicoteta.

Siga $\overline{JT} = \overline{JK} = r$.

$$\angle JBK = 60^{o}.$$

El triangle $\overset{\Delta}{BKJ}$ és rectangle 30°-60°-90°.

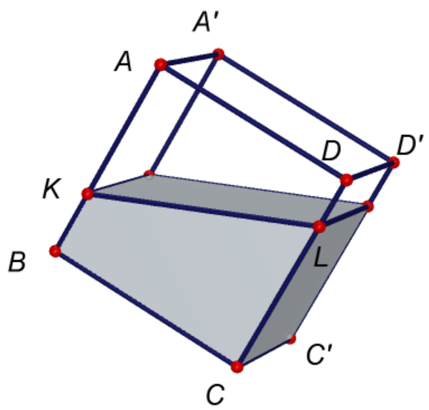
$$\overline{BJ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r.$$

$$\overline{BT} = \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)r.$$

Aleshores, $\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)r = \frac{1}{2}R$. Resolent l'equació:

$$r = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2}R.$$

Maig 5-12:



Un cub ABCDA'B'C'D' d'aresta 12 està ple de líquid les 5/8 parts. El cub s'ha decantat sobre una aresta CC'. El diagrama mostra l'envàs i el líquid en ell. Atés que el segment LC és el doble del segment KB. Trobar la longitud del segment LC.

Solució: Siguen $\overline{BK} = x$, $\overline{CL} = 2x$.

El volum del cub ABCDA'B'C'D' és:

$$V_{cub} = 12^3.$$

El volum que ocupa l'aigua és:

$$V_{aigua} = \frac{5}{8} V_{cub} = \frac{5}{8} 12^3 = 1080 .$$

$$V_{aigua} = S_{BCLK} \cdot \overline{CC'} .$$

$$V_{aigua} = \frac{2x + x}{2} 12 \cdot 12 = 216x .$$

Igualant els volums:

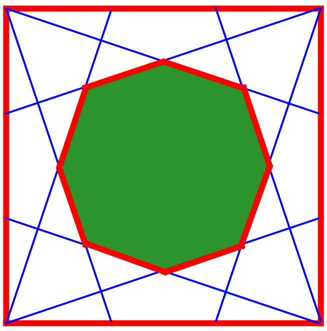
$$216x = 1080 .$$

Resolent l'equació:

$$x = 5 .$$

$$\overline{CL} = 2x = 10 .$$

Maig 6-13:



Els costats d'un quadrat s'han dividit en tres parts iguals i s'han unit amb els vèrtexs amb 8 segments formant a l'interior un octògon. Determinar la proporció entre les àrees del octògon i el quadrat.

Solució: Siga ABCD el quadrat exterior. Siga $JD_2KC_2LB_2MA_2$ l'octògon interior. Considerem el quadrat $A_1B_1C_1D_1$ format per la intersecció de les rectes:

AU i DW, AU i BS, BS i CQ, CQ i DW.

Considerem el quadrat A'B'C'D'

$$\left(\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A'B'}} \right)^2 = \frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{A'B'C'D'}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} .$$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{A'B'C'D'}} = \frac{S_{A'B'C'D'} - 4S_{AD'D}}{16} = \frac{16-6}{16} = \frac{5}{8} .$$

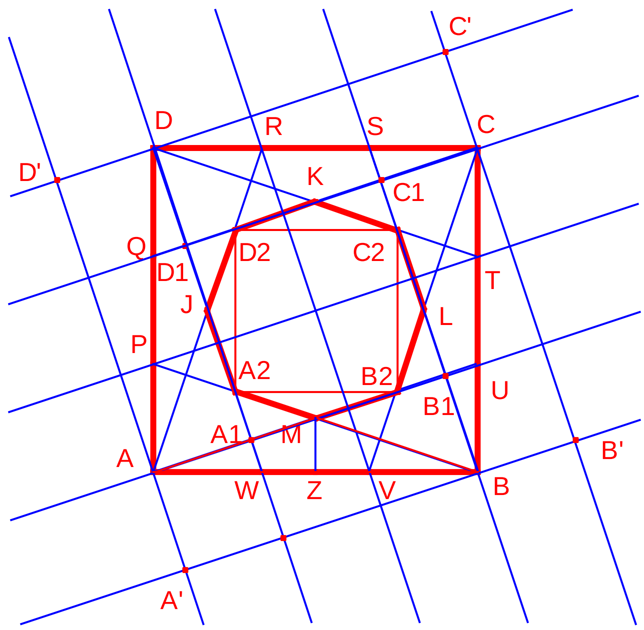
Aleshores:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} = \frac{2}{5} .$$

Notem que $\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{1}{3}$.

Aleshores,

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1B_2}} = \frac{1}{3} .$$



A més, $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2}$.

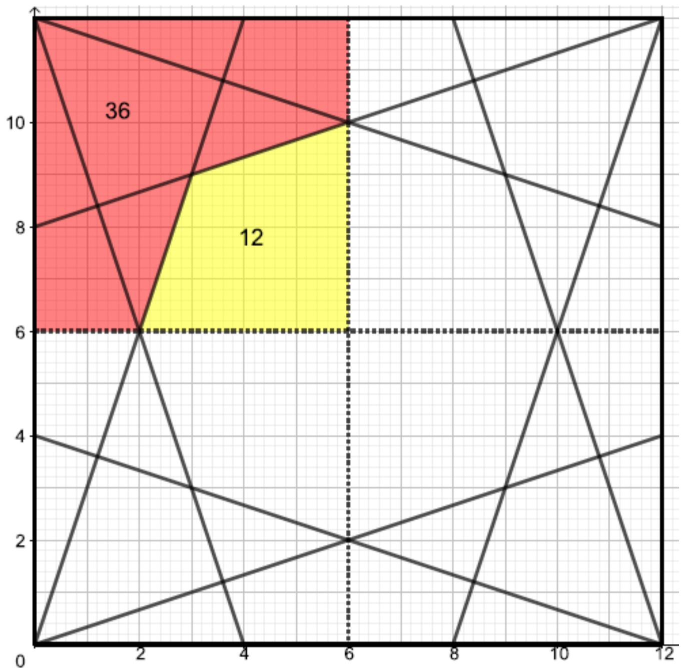
$$\frac{\overline{A_2B_2}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{\left(\frac{3}{4}\overline{A_1B_1}\right)^2}{\left(\frac{3}{4}\overline{A'B'}\right)^2} = \frac{\overline{A_1B_1}^2}{\overline{A'B'}^2} = \frac{1}{4}.$$

$$S_{ABP} = \frac{1}{6}S_{ABCD}, \text{ aleshores, } S_{ZMB} = \frac{1}{4}S_{ABP} = \frac{1}{24}S_{ABCD}.\ S_{ABM} = 2S_{ZMB} = \frac{1}{12}S_{ABCD}.$$

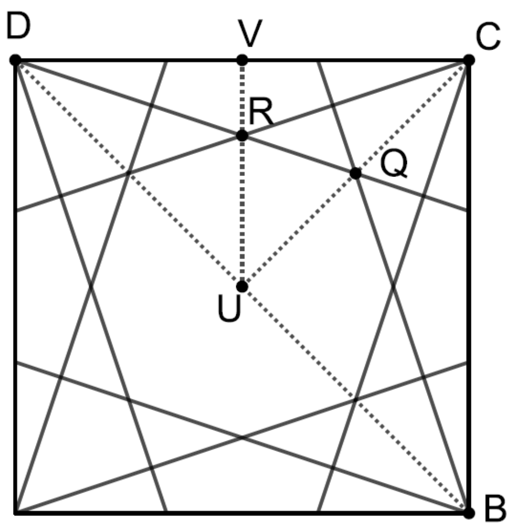
$\frac{S_{A_2B_2M}}{S_{ABM}} = \left(\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{AB}}\right) = \frac{1}{4}$. Aleshores: $S_{A_2B_2M} = \frac{1}{4}S_{ABM} = \frac{1}{48}S_{ABCD}$.

$$S_{\text{octògon}} = S_{A_2B_2C_2D_2} + 4\cdot S_{A_2B_2M} = \frac{1}{4}S_{ABCD} + 4\frac{1}{144}S_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.$$

Solució gràfica de Nèstor Abad (@nabadvin)



Solució Ignacio Larrosa Cañestro (@ilarrosac)



Si $\mathcal{B}(A, B, \ldots; p, q, \ldots)$ es el baricentre de A, B,… amb pesos p, q, …. Tenim:

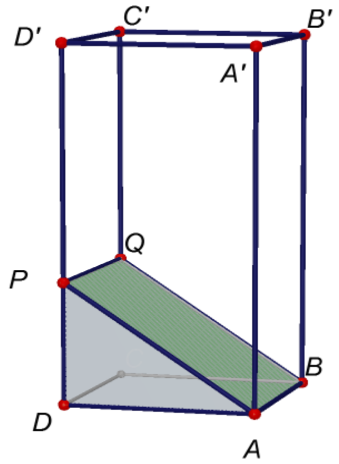
$$Q = \mathcal{B}(D, B, C; 1,1,2) = \mathcal{B}(U, C; 2,2)$$
$$\Rightarrow \quad UQ = \frac{1}{2}UC$$

$$R = \mathcal{B}(D, U, C; 1,1,1) = \mathcal{B}(U, V; 1,2)$$
$$\Rightarrow \quad UR = \frac{2}{3}UV$$

D'on:

$$A_{\Delta UQR} = \frac{1}{3}A_{\Delta UCV} \quad \Rightarrow \quad A_{oct} = \frac{1}{3}A_{quad}$$

<u>Maig 7-8:</u>



Siga el prisma recte regular quadrangular ABCDA'B'C'D' que AB = 10, AA' = 20. Siguen els punts P de l'aresta DD' i Q de l'aresta CC' que DP = CQ = x. El pla que passa per a, B, P i Q divideix el prisma en dos poliedres.

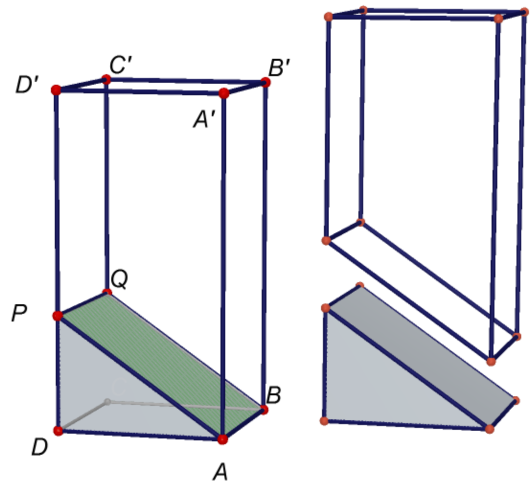
a) Determinar la funció proporció entre els volums del poliedre inferior i el superior.

b) Si la proporció dels volums és 1/2, calcula el valor de x.

<u>Solució:</u>

a) El volum del prisma ABCDA’B’C’D’ és:

$$V_{ABCDA'B'C'D'} = 10^2 \cdot 20 = 2000 \ .$$



ABCDPQ és un prisma triangular de base el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADP}$. El volum del prisma ABCDPQ és:

$$V_{ABCDPQ} = \frac{1}{2} 10^2 \cdot x = 50x \, .$$

El volum del poliedre ABQPA’B’C’D’ és:

$$V_{ABQPA'B'C'D'} = V_{ABCDA'B'C'D'} - V_{ABCDPQ} \, .$$

$$V_{ABQPA'B'C'D'} = 2000 - 50x \, .$$

La proporció entre els volums dels dos poliedres és:

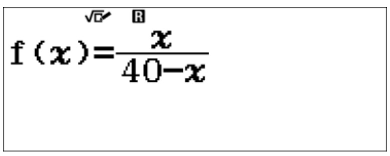
$$P(x) = \frac{50x}{2000 - 50x}, \ x \in [0, 20] .$$

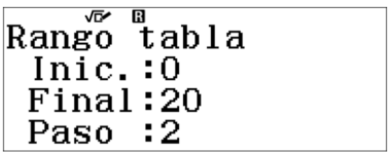
$$P(x) = \frac{x}{40 - x} .$$

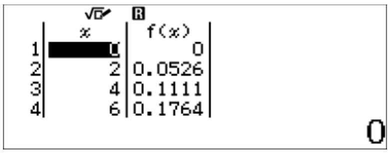
$$P(x) = -1 + \frac{-40}{40 - x} .$$

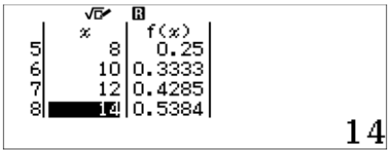
La funció és una hipèrbola.

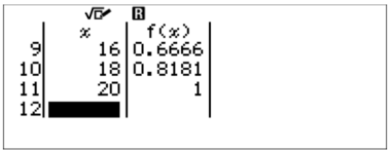
Per a construir la taula utilitzarem el menú TABLA de la calculadora:



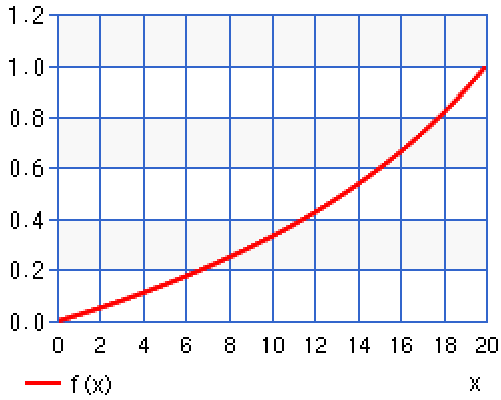








$$P(2) = \frac{1}{19} \approx 0.0526 \,.$$



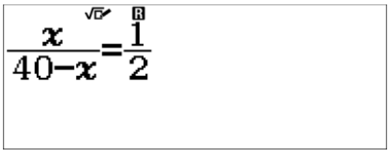
Per a representar la funció utilitzarem el codi QR de la calculadora:

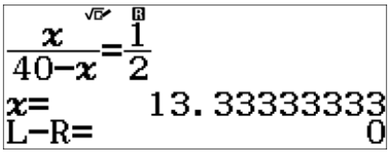
1/1

b) Per a calcular el valor x tal que la proporció dels volums és $\frac{1}{2}$, resoldrem l'equació:

$$P(x) = \frac{1}{2}, \ \frac{x}{40 - x} = \frac{1}{2} \,.$$

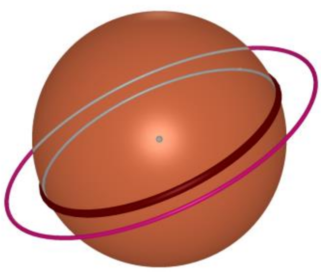
Per a resoldre l'equació utilitzarem la funció SOLVE de la calculadora:





La proporció dels volums és $\frac{1}{2}$ quan $x = \frac{40}{3} \approx 13.33$.

Maig 9-10:



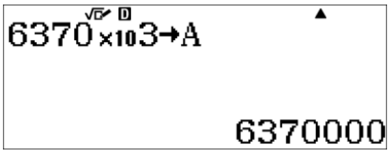
Imaginem una corda que envolta una esfera de la grandària de la Terra per l'equador

A.- Quan s'hauria d'allargar la corda per a arribar al fet que la distància entre la corda i la superfície de l'esfera siga d'1 metre.

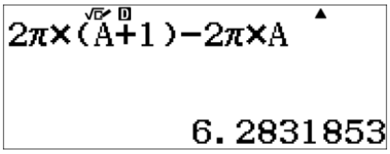
B.- Quan augmentaria l'àrea del nou cercle.

C.- Si envoltarem l'esfera inicial amb una nova esfera a la distància d'1 metre, quan augmentaria el volum de l'esfera. Radi de la Terra 6370 km

Solució:

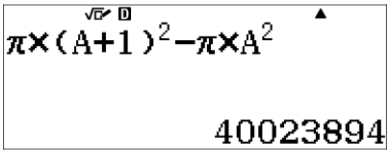


Calculem l’augment de la longitud:



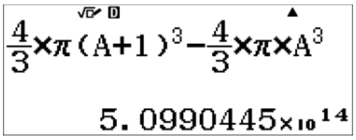
La corda augmenta aproximadament $6.28\,\text{m}$.

Calculem l’augment de l’àrea del cercle:



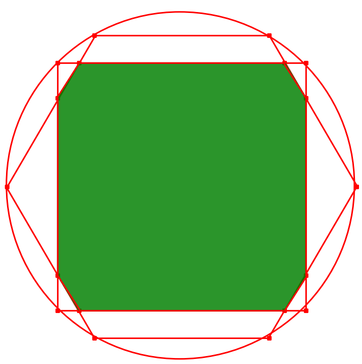
L’àrea augmenta aproximadament $40023894\ \text{cm}^2$, es dir, $4002\ \text{m}^2$.

Calculem l’augment del volum. Volum de l’esfera $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.



L’augment del volum és $5.1\cdot 10^{14}\ \text{cm}^3$, es dir, $5.1\cdot 10^{8}\ \text{m}^3$.

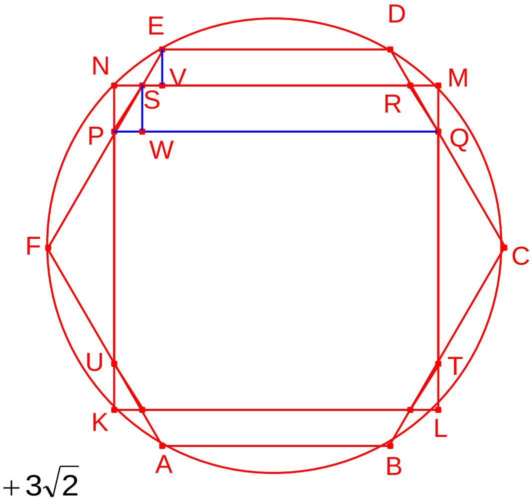
Maig 11-18:



En una circumferència de radi 6 hi ha inscrit un hexàgon regular i un quadrat. Un costat del quadrat és paral·lel a un costat de l'hexàgon regular.

Calcula l'àrea de la intersecció de l'hexàgon regular i el quadrat.

Solució: Siga ABCDEF l’hexàgon regular i $\overline{AB}=6$. Siga KLMN el quadrat de costat $\overline{KL}=\overline{TU}=\overline{KN}=6\sqrt{2}$.



$$\overline{AE} = 6\sqrt{3}.$$

$$\overline{EV} = \frac{\overline{AE} - \overline{KN}}{2} = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}.$$

$\dfrac{\overline{SV}}{\overline{EV}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, aleshores, $\overline{SV} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right) = 3 - \sqrt{6}$.

$$\overline{SR} = \overline{DE} + 2\overline{SV} = 6 + 2\left(3 - \sqrt{6}\right) = 12 - 2\sqrt{6}.$$

$$\overline{PW} = \frac{\overline{PQ} - \overline{SR}}{2} \frac{6\sqrt{2} - 12 + 2\sqrt{6}}{2} = 3\sqrt{2} - 6 + \sqrt{6}.$$

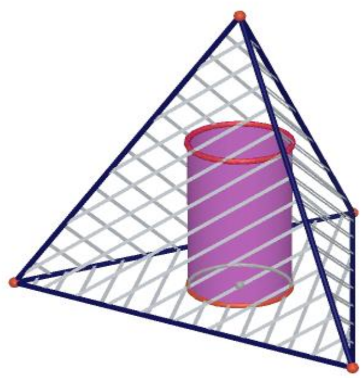
$\dfrac{\overline{SW}}{\overline{PW}} = \sqrt{3}$, aleshores, $\overline{SW} = \sqrt{3}\left(3\sqrt{2} - 6 + \sqrt{6}\right) = 3\sqrt{6} - 6\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$

$$\overline{PT} = \overline{KN} - 2\overline{SW} = 6\sqrt{2} - 2\left(3\sqrt{6} - 6\sqrt{3} + 3\sqrt{2}\right) = -6\sqrt{6} + 12\sqrt{3}.$$

L'àrea de la intersecció del quadrat i l'hexàgon regular és igual al doble de l'àrea del trapezi PQRS més l'àrea del rectangle TUQP:

$$S_{\text{ombrejada}} = 2\frac{6\sqrt{2} + 12 - 2\sqrt{6}}{2}\left(3\sqrt{6} - 6\sqrt{3} + 3\sqrt{2}\right) + 6\sqrt{2}\left(-6\sqrt{6} + 12\sqrt{3}\right) = 72\sqrt{2} + 72\sqrt{6} - 120\sqrt{3} \approx 70.3405$$

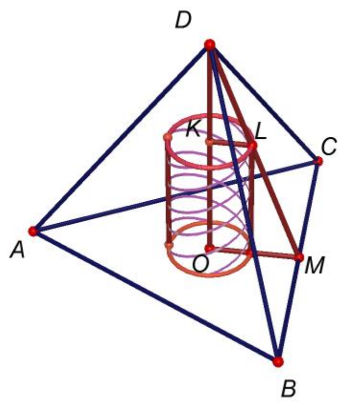
Maig 14-21:



En un tetraedre regular d'aresta 1 s'ha inscrit un cilindre que té una base en una cara i l'altra base és tangent a les altres cares.

De tots els cilindres inscrits determinar les dimensions i el volum d'aquell que té volum màxim.

Solució: Siga el tetraedre regular ABCD d'aresta 1. Siga O el centre de la cara ABC. Siga M el punt mitjà de l'aresta $\overline{BC}$. Siga K el centre de la base superior del cilindre. Siga L el punt de tangència del cilindre i la cara BCD. Siga $\overline{KL} = R$ el radi del cilindre i $\overline{OK} = h$ l'altura del cilindre. L pertany al segment $\overline{DM}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMD}$:

$$\overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

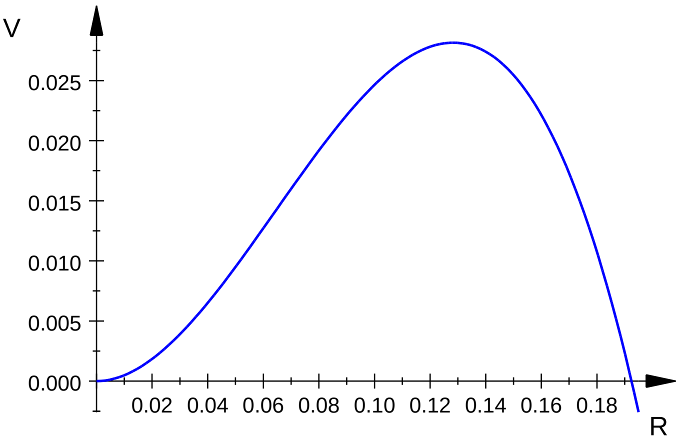
Aplicant la propietat del baricentre al punt O: $\overline{OM} = \dfrac{1}{3}\overline{DM} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DOM}$: $\overline{OD} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DOM}$, $\overset{\Delta}{DKL}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{3} - h}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \dfrac{R}{\frac{\sqrt{3}}{6}}$. Simplificant: $h = \frac{\sqrt{6}}{3} - 2\sqrt{2} \cdot R$. El volum del cilindre és:

$$V = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{\sqrt{6}}{3} R^2 - 2\sqrt{2}\, R^3\right).$$



Derivant la funció respecte de R:

$$V' = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{2\sqrt{6}}{3} R - 6\sqrt{2}\, R^2\right).$$

$V' = 0$. Resolent l'equació: $R = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

En aquest cas l'altura del cilindre és $h = \frac{\sqrt{6}}{9}$.

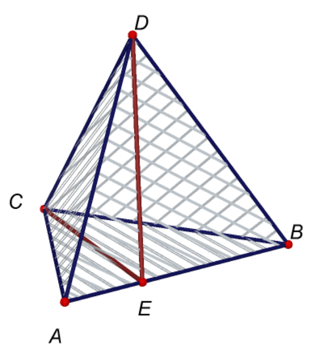
Calculant la segona derivada:

$$V'' = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{2\sqrt{6}}{3} - 12\sqrt{2}\, R^2\right). \quad V''\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right) = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{-2\sqrt{6}}{3}\right) < 0.$$

Aleshores, en $R = \frac{\sqrt{3}}{9}$ s'aconsegueix el màxim del volum.

El volum màxim és: $V\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right) = \pi \frac{\sqrt{6}}{243}$.

Maig 15-16:



Considerem el tetraedre regular ABCD. Siga E un punt de l'aresta AB. Determinar el màxim de l'angle $\angle CED$ quan E recorre l'aresta AB

<u>Solució:</u> Es té $\overline{AC} = \overline{AD}$, $\angle CAE = \angle DAE = 60^{o}$. Els triangles $\overset{\Delta}{CAE}$, $\overset{\Delta}{DAC}$ són iguals.

Aleshores, $\overline{CE} = \overline{DE}$. El triangle $\overset{\Delta}{CED}$ és isòsceles. El major angle $\angle CED$ s'aconsegueix en el menor valor per als costats CE i ED. És a dir, en la mínima distància de D a l'aresta $\overline{AB}$ es dir, quan E és el punt mitjà.

L'angle màxim és igual a l'angle dièdric del tetraedre regular. En aquest cas $\overline{CE} = \overline{DE} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculem l'angle dièdric. Siga $\alpha = \angle CED$. Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CED}$:

$$\cos\alpha = \frac{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{3}.\ \alpha = \arccos\frac{1}{3}.$$

<u>Solució 2:</u>

$\overline{AC} = \overline{AD}$, $\angle CAE = \angle DAE = 60^{o}$. Els triangles $\overset{\Delta}{CAE}$, $\overset{\Delta}{DAC}$ són iguals. Aleshores, $\overline{CE} = \overline{DE}$. Siga $\overline{AE} = x$. Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AED}$:

$$\overline{DE}^2 = 1^2 + x^2 - 2\cdot 1\cdot x\cdot\cos 60^{o} = x^2 - x + 1.$$

Si $\alpha = \angle CED$. Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CED}$:

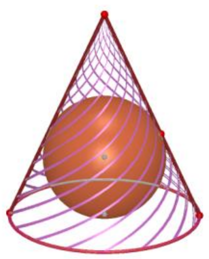
$$\cos\alpha = \frac{2x^2 - 2x + 1}{2(x^2 - x + 1)}.$$

Com la funció $f(x) = \cos x$ es decreixent en $[0, \pi]$.El valor màxim de l'angle s'aconsegueix en el valor mínim de la funció $g(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{2(x^2 - x + 1)}$.

$$g'(x) = \frac{2x - 1}{2(x^2 - x + 1)^2}.\ g'(x) = 0\text{, quan } x = \frac{1}{2}.$$

$g''\left(\frac{1}{2}\right) > 0$. Aleshores, $x = \frac{1}{2}$ es un mínim de la funció g(x) i, per tant, el valor on s'aconsegueix el màxim de l'angle. $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$.

<u>Maig 17:</u>

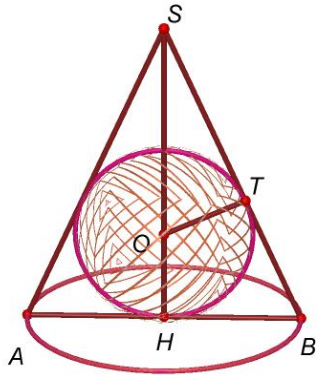


En un con recte, l'angle entre l'altura i la generatriu és α. Calcular la raó entre els volums de l'esfera inscrita i el con

Solució: Siga el con recte de diàmetre de la base $\overline{AB} = 2R$ i altura $\overline{AH} = h$.

Siga $\alpha = \angle HSB$ l'angle que forma l'altura i la generatriu.

Siga l'esfera inscrita en el con de centre O i radi $\overline{OT} = \overline{OH} = r$.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SHB}$:

$$R = h \cdot \mathrm{tg}\alpha .$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{STO}$:

$$\frac{r}{h - r} = \sin\alpha .$$

$$r = \frac{\sin\alpha}{1 + \sin\alpha} h .$$

El volum de l'esfera és:

$$V_e = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sin\alpha}{1 + \sin\alpha}\right)^3 h^3 .$$

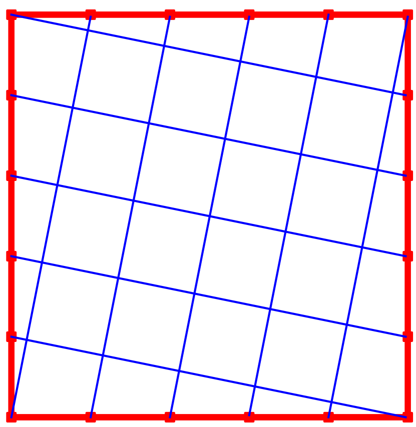
El volum del con és:

$$V_c = \frac{1}{3}\pi(h \cdot \mathrm{tg}\alpha)^2 h .$$

La proporció entre els dos volums és:

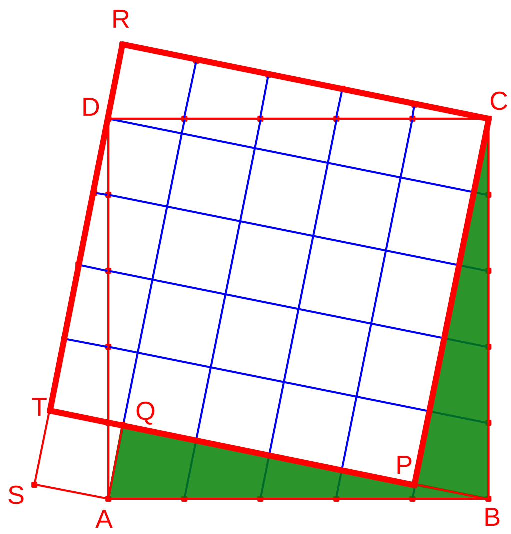
$$\frac{V_e}{V_c} = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sin\alpha}{1 + \sin\alpha}\right)^3 h^3}{\frac{1}{3}\pi(h \cdot \mathrm{tg}\alpha)^2 h} = \frac{4\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha}{(1 + \sin\alpha)^3} .$$

Maig 19-26:



Cada costat d'un quadrat es divideix en n parts iguals. Els punts de costats oposats estan connectats d'una manera desplaçada com a mostra la figura (en la figura es representa el cas n = 5). Demostrar que és possible obtindre n^2+1 quadrats iguals.

Solució:



Siga el quadrat inicial ABCD.

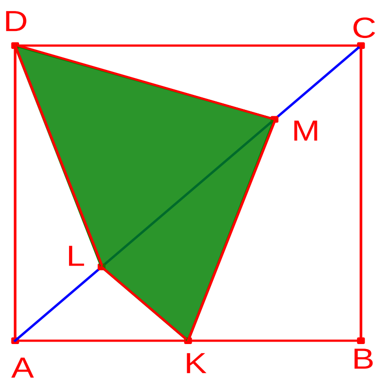
El triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCP}$ el girem 270º amb centre C, donant lloc al triangle $\overset{\Delta}{DCR}$.

El triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABQ}$ el girem 90º amb centre A, donant lloc al triangle $\overset{\Delta}{ADS}$.

L'àrea del quadrat ABCD és igual l'àrea del quadrat PCRT més l'àrea del quadrat AQTS.

L'àrea del quadrat PCRT més l'àrea del quadrat AQTS és n^2+1.

<u>Maig 20-27:</u>



Siga ABCD un quadrat de diagonals AC = BD = 68. Els punts L i M en la diagonal AC són tals que AL = MC = 17, i K és el punt mitjà d'AB. Calcular la proporció entre les àrees del quadrilàter KLDM i el quadrat ABCD

<u>Solució:</u> Siga P el punt mitjà de la diagonal $\overline{AC}$ (mirar figura de baix).

$$\overline{LM}=34\,.$$

$$\overline{AL}:\overline{AC}=1:4\,.$$

Aplicant el teorema invers de Tales:

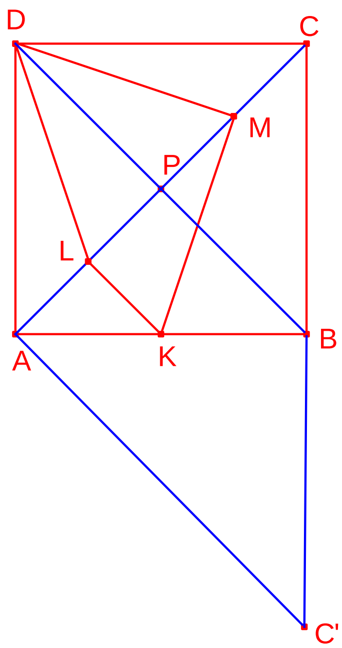
$\overline{KL}$ és paral·lela a $\overline{BP}$ i $\overline{LK}=\frac{1}{2}\overline{BP}=\frac{1}{2}34=17$.

$$S_{KLDM}=S_{LMD}+S_{LMK}=\frac{1}{2}\overline{LM}\cdot\overline{DP}+\frac{1}{2}\overline{LM}\cdot\overline{LK}=\frac{1}{2}34\cdot 34+\frac{1}{2}34\cdot 17=867\,.$$

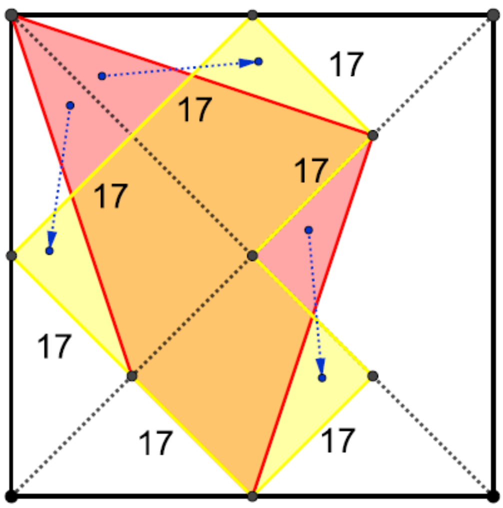
Siga C' el simètric de C respecte de B.

$$S_{ABCD} = S_{CAC'} = \frac{1}{2}68^2 = 2312 .$$

$$\frac{S_{KLDM}}{S_{aBCD}} = \frac{867}{2312} = \frac{3}{8} .$$



<u>Solució Ignacio Larrosa Cañestro (@ilarrosac):</u>



Tindrem:

$$A_{roja} = A_{groga} = \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot (34 + 17)$$
$$= 3 \cdot 17^2 = 867$$

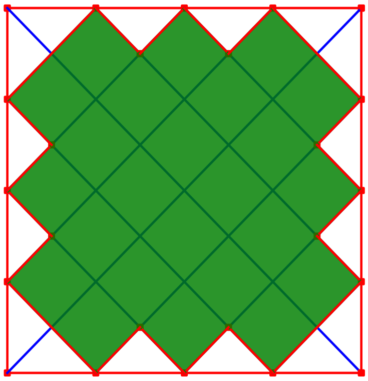
En el quadrat inicial de diagonal 68, tenim:

$$A = 4 \cdot \frac{\frac{68}{2} \cdot \frac{68}{2}}{2} = 2312$$

Per tant:

$$\frac{A_{roja}}{A} = \frac{867}{2312} = \frac{3}{8}$$

Maig 22-23:



Els costats d'un quadrat es divideixen en n parts iguals (en la figura n = 4). Els punts s'uneixen de la forma indicada, per a formar diversos quadrats més xicotets (24 en l'exemple de la figura) i alguns triangles. Quants quadrats es formen si n = 100?

Solució: Suposem que el costat del quadrat xicotet de la figura és 1.

Cadascuna de les diagonals del quadrat mesura $\sqrt{2}$.

El costat del quadrat exterior mesura:

$$n\sqrt{2}.$$

L'àrea del quadrat exterior és:

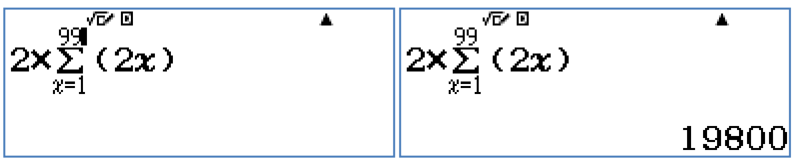
$$S_q = \left(n\sqrt{2}\right)^2 = 2n^2.$$

En la figura hi ha 4n triangles. Dos triangles formen un quadrat de costat 1. L'àrea de la figura ombrejada és:

$$S_o = S_q - 2n = 2n^2 - 2n.$$

Aleshores, en la figura ombrejada hi ha un total de $2n^2 - 2n$ quadrats. Si $n = 100$, el total de quadrats és 19800.

Solució 2: El total de quadrats és: $2\sum_{x=1}^{n-1} 2x$, ja que per abaix (dalt) d'una diagonal hi ha 2x quadrats. Amb la calculadora Classwiz:



Solució Ignacio Larrosa Cañestro (@ilarrosac):

Si els costats del quadrat inicial es divideixen en n partes iguals, el nombre de quadrats que es generen entre la mitat de les dues diagonals i un costat del quadrat inicial és:

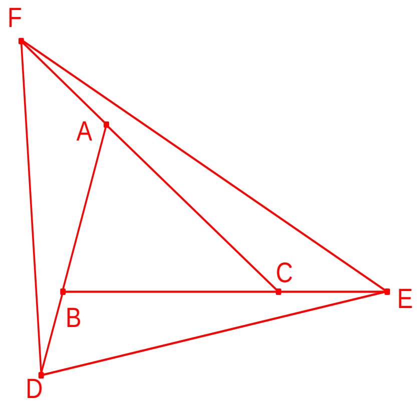
$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

Per tant el nombre de quadrats que es generen és:

$$C(n) = 4 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} = 2n \cdot (n-1)$$

En particular, per a n = 100 $\Rightarrow$ C(100) = 19800.

Maig 24-25:



Els costats del triangle ΔABC s'han prolongat com a mostra la figura de manera que BD = ½ AB, CE = ½ BC i AF = ½ CA. Determina la proporció entre les àrees del triangle ΔDEF i del triangle ΔABC.

Solució: Siga $S = S_{ABC}$.

Quan dos triangles tenen la mateixa altura tenen les àrees proporcionals a les bases.

$$S_{BDC} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{2} S.$$

$$S_{ECD} = \frac{1}{2} S_{BDC} = \frac{1}{4} S.$$

$$S_{ECA} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{2} S.$$

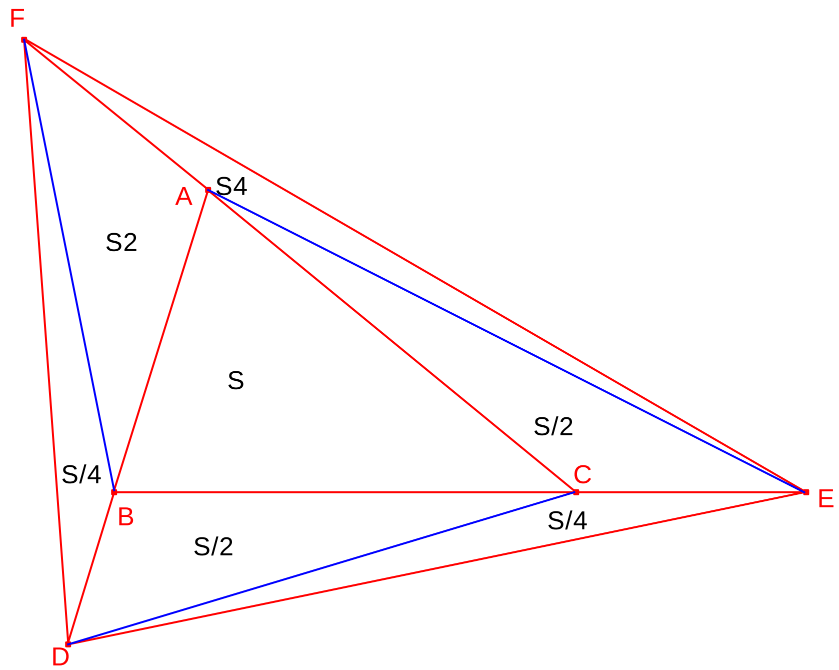
$$S_{EAF} = \frac{1}{2} S_{ECA} = \frac{1}{4} S.$$

$$S_{FAB} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{2} S.$$

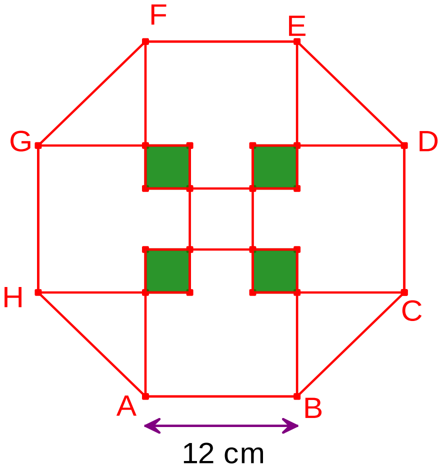
$$S_{FBD} = \frac{1}{2} S_{FAB} = \frac{1}{4} S.$$

$$S_{DEF} = S + 3\left(\frac{1}{2} S + \frac{1}{4} S\right) = \frac{13}{4} S.$$

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{13}{4}.$$



Maig 28-29:



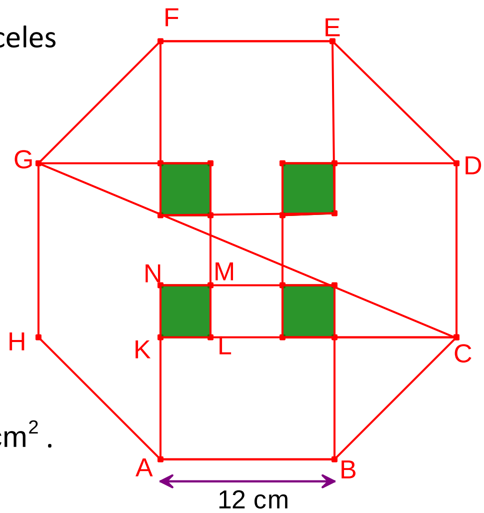
Donat el octògon regular ABCDEFGH de costat AB = 12 cm, es dibuixen 4 quadrats sobre els costats AB, CD, EF, GH. Calcula l'àrea de la zona ombrejada (veure figura).

<u>Solució:</u>

L'àrea ombrejada és igual a quatre vegades l'àrea del quadrat *KLMN.

$$\overline{AN} = \overline{AB} = 12\,.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{AKH}$:



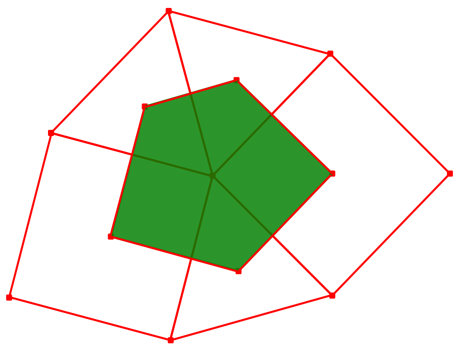
$$\overline{AK} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AB} = 6\sqrt{2}\,.$$

$$\overline{KN} = \overline{AN} - \overline{AK} = 12 - 6\sqrt{2}\,.$$

L'àrea de la zona ombrejada és:

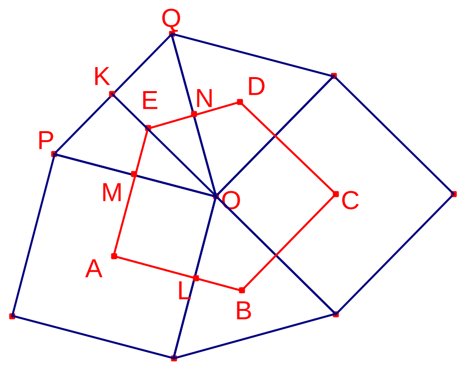
$$S_{\text{ombrejada}} = 4\cdot\overline{KN}^2 = 4\left(12-6\sqrt{2}\right)^2 = 864 - 576\sqrt{2} \approx 49.41\,\text{cm}^2\,.$$

<u>Maig 30-31:</u>



En la figura, estan dibuixats dos quadrats i 3 triangles equilàters de costats c. Amb els seus centres s'ha dibuixat un pentàgon. Determina l'àrea, el perímetre i els angles del pentàgon.

<u>Solució:</u> Siga ABCDE el pentàgon. $\overline{AE}$ és la mediatriu del costat $\overline{OP}$. $\overline{DE}$ és la mediatriu del costat $\overline{OQ}$.



$$\overline{OM} = \overline{AM} = \overline{AL} = \frac{c}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKP}$:

$$\overline{OK} = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

Aplicant la propietat del baricentre al triangle equilàter $\overset{\Delta}{OPQ}$:

$$\overline{KE} = \overline{ME} = \overline{EN} = \frac{1}{3}\overline{OK} = \frac{\sqrt{3}}{6}c.$$

a)

El perímetre del polígon ABCDE és:

$$P_{ABCDE} = 4\cdot\overline{AL} + 6\cdot\overline{ME} = \left(2+\sqrt{3}\right)c.$$

b)

L'àrea del quadrilàter OMEN és:

$$S_{OMEN} = \frac{1}{3}S_{OPQ} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}c^2.$$

L'àrea del polígon ABCDE és:

$$P_{ABCDE} = 2\cdot S_{ALOM} + 3\cdot S_{OMEN} = 2\cdot\frac{1}{4}c^2 + 3\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}c^2\right) = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)c^2.$$

c) Es té

$$\angle OME = \angle ONE = 90^{o},\ \angle NOM = 60^{o}.$$

$$\angle MEN = 360^{o} - \left(2\cdot\angle OME + \angle NOM\right) = 120^{o}.$$

Els angles del polígon ABCDE són:

$$A = C = 90^{o},\ B = D = E = 120^{o}.$$