NOVIEMBRE 2019

LUNES | MARTES | MIÉRCOLES | JUEVES | VIERNES | SÁBADO | DOMINGO

1

Factorizar en los reales:

$$x^4 - 11x^2 + 49$$

2

Dada una circunferencia escogemos aleatoriamente 50 puntos en su interior de manera que dos o mas cualesquiera de ellos no están en el mismo diámetro de la circunferencia. Demostrar que siempre hay un diámetro que deja 25 puntos en cada lado.

3

4

Sea s(n) la suma de los dígitos de n. Hallar:

$$\sum_{k=1}^{2019} s(n) = s(1) + \cdots + s(2019)$$

5

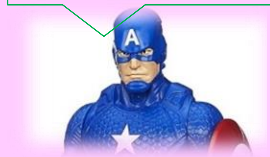
6

Supongamos que disponemos de 12 triángulos equiláteros y 6 cuadrados. Con ellos formamos polígonos convexos. ¿Cuál es el mayor número de lados de los polígonos convexos que podemos formar sin tener solapamientos?

7

Calcular:

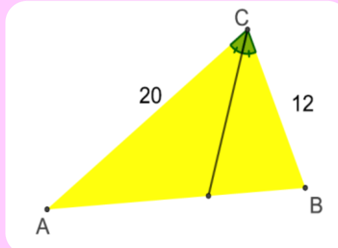
$$\sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{3 - \sqrt{3 + \cdots\cdots}}}}$$



8

9

De un triángulo acutángulo ΔABC se sabe que BC = 12 cm y CA = 20 cm. Además, la bisectriz del ángulo C determina un segmento de longitud 15 en lado AB. Calcular la longitud del lado AB.



10

Hallar los enteros que cumplen:

$n(n^3-5n^2-11) \geq -3(3n^2+2)$

11

12

Sea ΔABC un triángulo equilátero y P un punto arbitrario de su interior. Las perpendiculares PD, PE y PF se dibujan a los tres lados del triángulo. Probar que:

$$\frac{PD + PE + PF}{AB + BC + CA} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

13

Hallar el valor de x que hace mínima la expresión:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (x^3-10)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (x^3-4)^2}$$

14

15

Sea f una función con las siguientes propiedades:

1.- f(n) está definido $\forall n$, entero positivo
2.- f(n) es un entero $\forall n$, entero positivo
3.- f(2) = 2
4.- $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ $\forall m, n$ enteros positivos
5.- Si m > n entonces f(m) > f(n)

Probar que f(n) = n $\forall n$, entero positivo

16

Demostrar que:

$$\sqrt{c+1} - \sqrt{c} < \sqrt{c} - \sqrt{c-1}$$

para cualquier $c \geq 1$

17

Hallar los enteros a, b y c que cumplen

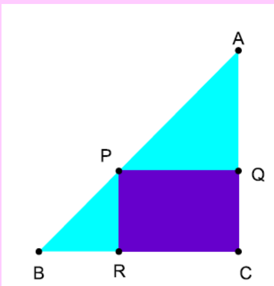
$$a^2 + b^2 - 8c = 6$$

18

Hallar:

$$\sum_{k=1}^{n} (k \cdot k!)$$

19



20

Sea ΔABC un triángulo rectángulo isósceles con catetos de longitud 1. Sea P un punto cualquiera de la hipotenusa. Sean Q y R los pies de las perpendiculares a los catetos por P. Consideremos las áreas de los triángulos ΔAPQ y ΔPBR y el área del rectángulo QCRP. Probar que, no importa donde se escoja el punto P, la mayor de estas áreas es, al menos, 2/9

21

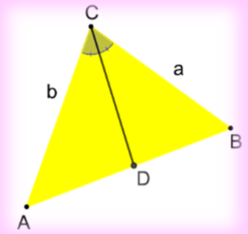
Probar que para cualquier cuadrilátero inscrito en un círculo de radio 1, la longitud del lado más corto es menor o igual a $\sqrt{2}$

22

23

Sea ΔABC un triángulo con lados de longitudes a, b y c. La bisectriz por C corta al lado AB en D. Probar que la longitud de la bisectriz CD es:

$$\frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$$



24

Sea n el menor natural tal que la suma de sus dígitos es el mayor natural de dos cifras con suma de dígitos igual a 9. ¿Cuántos divisores tiene n+1?

25

26

A partir de los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 formamos números de nueve cifras sin repetir ninguna. ¿Cuál es la probabilidad de que el número resultante sea múltiplo de 11?

27

Sea dada la ecuación:

$x^3 + 4x^2 - 4x + a = 0$

Hallar a para que las tres raíces x_1, x_2 y x_3 cumplan

$x_3 = x_1 \cdot x_2$

28

29

Probar que si $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ y p_1, p_2 y p_3 no son todos nulos, entonces:

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \frac{p_1a_1^n + p_2a_2^n + p_3a_3^n}{p_1b_1^n + p_2b_2^n + p_3b_3^n}$$

para todo entero positivo n

30

Sea c la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos a y b. Probar $a + b \leq \sqrt{2}c$. ¿Cuándo se da la igualdad?