# SOLUCIONES SEPTIEMBRE 2019

Problemas para primero y segundo de la E.S.O. Autores: “Colectivo Concurso de Primavera”. Comunidad de Madrid. XX Concurso de Primavera. 2016.

[https://www.concursoprimavera.es/#concurso](https://www.concursoprimavera.es/#concurso)

**<u>Septiembre 1-8:</u>** Completa los huecos para que la multiplicación esté bien hecha.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 5 | 8 |
| | | x | 4 | |
| | 2 | | 0 | 6 |
| 1 | | 3 | 2 | |
| 1 | | | 2 | 6 |

**<u>Solución:</u>** Buscamos las unidades del segundo factor preguntándonos que cifra multiplicada por 8 da un número con unidades la cifra 6. Nos salen dos candidatos: 8 x 2 = 16 y 8 x 7 = 56. La cifra 2 no puede ser, pues colocada en la multiplicación proporcionada hace aparecer 58 x 2 = 116 ≠ z06. Luego deben de ser 7 las unidades del segundo factor. Con ello

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 5 | 8 |
| | | x | 4 | 7 |
| | 2 | | 0 | 6 |
| 1 | | 3 | 2 | |
| 1 | | | 2 | 6 |

Después de multiplicar el 7 por 5 llevamos 4. Buscamos ahora una cifra z que cumpla 7·z + 4 = veinte y pico. Por tanteo obtenemos que el único valor posible es z = 3. Y ahora sólo queda obtener el resto de las cifras:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 3 | 5 | 8 |
| | | x | 4 | 7 |
| | 2 | 5 | 0 | 6 |
| 1 | 4 | 3 | 2 | |
| 1 | 6 | 8 | 2 | 6 |

**<u>Septiembre 2-3:</u>** En cada una de las caras de un dado aparece uno y solo uno de los números -3, -2, -1, 0, 1, 2 sin faltar ni repetir ninguno. Si lo lanzamos dos veces y multiplicamos los números que aparecen en la cara superior, ¿cuál es la probabilidad de que el producto sea negativo?

**Solución:** La matriz de resultados posibles del experimento es:

| | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -3 | 9 | 6 | 3 | 0 | -3 | -6 |
| -2 | 6 | 4 | 2 | 0 | -2 | -4 |
| -1 | 3 | 2 | 1 | 0 | -1 | -2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | -6 | -4 | -2 | 0 | 2 | 4 |

Cada celda tiene las mismas posibilidades de verificarse. Como hay doce celdas que dan resultado negativo, tendremos que la probabilidad solicitada es:

$$\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

**Septiembre 4:** Hoy cumplen años Dani y su tía Amparo: Dani cumple 13 años y Amparo 31. ¿Cuántos años han de pasar, para que, por tercera vez, las dos mismas cifras indiquen sus años?

**Solución:**

Sea x los años que han de pasar. Entonces si $\overline{yz}$ es la edad de Dani y $\overline{zy}$ la de Amparo, debe cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} 13 + x = 10y + z \\ 31 + x = 10z + y \end{array}\right\}$$

Restando la primera de la segunda obtenemos:

$$18 = 9z - 9y = 9 \cdot (z - y) \quad \Rightarrow \quad z - y = 2$$

| z | y = z – 2 | Edad Dani: $\overline{yz}$ | Edad Amparo: $\overline{zy}$ | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 2 | 20 | |
| 3 | 1 | 13 | 31 | Primera vez |
| 4 | 2 | 24 | 42 | Segunda vez |
| 5 | 3 | 35 | 53 | Tercera vez |
| 6 | 4 | 46 | 64 | |
| 7 | 5 | 57 | 75 | |
| 8 | 6 | 68 | 86 | |
| 9 | 7 | 79 | 97 | |

Cada 11 años permutan las cifras. Han de pasar (35 – 13 =) 22 años para que, por tercera vez, las dos mismas cifras indiquen sus años

**Septiembre 5-6:** Dani y Aitana han decidido ahorrar. Dani ahorra 30 céntimos cada día y Aitana decide ahorrar 1 céntimo el primer día, 2 céntimos el segundo día, 3 céntimos el tercer día y así sucesivamente. ¿Cuántos días han de pasar para que lo ahorrado por Aitana sea doble de lo ahorrado por Dani?

**Solución:** Después de x días, Dani tendrá ahorrado 30·x y Aitana tendrá ahorrado:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + \mathrm{x} = \frac{(\mathrm{x}+1)\cdot \mathrm{x}}{2}$$

Puesto que lo ahorrado por Aitana ha de ser doble de lo ahorrado por Dani, debe cumplirse:

$$\frac{(\mathrm{x}+1)\cdot \mathrm{x}}{2} = 60\mathrm{x}$$

Resolviendo esta ecuación llegamos a x = 119 días.

**Septiembre 7:** Si tres cuartos de a es igual a cinco octavos de b, ¿cuánto vale la razón entre a y b?

**Solución:** Tendremos, de lo exigido en el enunciado y suponiendo que b $\neq$ 0 (Si b = 0 necesariamente a = 0 y no tiene sentido la razón entre a y b)):

$$\frac{3}{4}\mathrm{a} = \frac{5}{8}\mathrm{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{5\cdot 4}{3\cdot 8} = \frac{5}{6}$$

**Septiembre 9:** Si 6 perros y 4 gatos comen lo mismo que 7 perros y dos gatos, ¿es cierto que 6 perros y 4 gatos comen lo mismo que 5 perros y 6 gatos?

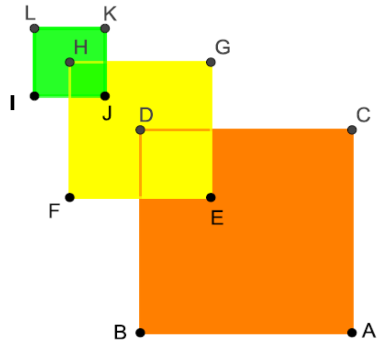
**Solución:** Si representamos por p lo que come un perro y por g lo que come un gato, tendremos:

6p + 4g = 7p +2g (y quitando de cada miembro lo que consumen 6 perros) 4g = 1p + 2g (y quitando de cada miembro lo que consumen 2 gatos) 2g = 1p

Ahora: 6p + 4g = 5p + 1p + 4g = 5p + 2g + 4g = 5p + 6g

Luego 6 perros y 4 gatos consumen lo mismo que 5 perros y 6 gatos.

**Septiembre 10-11:** Laia tiene 3 cuadrados, uno de 2 cm de lado, otro de 4 cm de lado y el tercero de 6 cm de lado. Los ha colocado con los lados paralelos y los vértices de los grandes en los centros de los pequeños, como se ve en la figura. ¿Cuál es el área de la figura que ha formado?




**Solución:** Sumando las áreas de los tres cuadrados obtenemos ($2^2 + 4^2 + 6^2 =$) 56 cm$^2$. Pero así hemos sumado dos veces el área de los cuadrados en los que se solapan los cuadrados iniciales. Debemos, pues, restar ($1^2 + 2^2 =$) 5 cm$^2$. El área de la figura es: (56 – 5 =) 51 cm$^2$.

**Septiembre 12:** El producto de 3 naturales consecutivos es $2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13$, ¿cuánto vale la suma de los 3 números?

**Solución:** Puesto que en tres naturales consecutivos sólo uno es múltiplo de tres, aparece como un candidato del trio el número ($3^3 =$) 27, Como ($2 \cdot 13 =$) 26 ya tenemos otro candidato. Finalmente queda $2^2 \cdot 7$, que es 28 y completamos los tres naturales consecutivos. Por tanto, la solución al problema es: 26 + 27 + 28 = 81

**Septiembre 13-14:** En un gran banquete se han servido el doble de platos de pollo que de pavo. Dos tercios de los platos de pollo eran de muslos y el resto de pechugas. En cambio, de los platos de pavo sólo un cuarto fue de muslos y el resto de pechugas. ¿Qué fracción de los platos de pechugas eran de pavo?

**Solución:**

Iremos rellenando la tabla de doble entrada adjunta con la información proporcionada en el enunciado

| | muslos | pechugas | |
|---|---|---|---|
| pollo | | | |
| pavo | | | |
| | | | |

| | muslos | pechugas | |
|---|---|---|---|
| pollo | | | 2x |
| pavo | | | x |
| | | | 3x |

se han servido el doble de platos de pollo que de pavo dos tercios de los platos de pollo eran de muslos y el resto de pechugas

| | muslos | pechugas | |
|---|---|---|---|
| pollo | $\frac{2}{3} \cdot 2x$ | $\frac{1}{3} \cdot 2x$ | 2x |
| pavo | | | x |
| | | | 3x |

| | muslos | pechugas | |
|---|---|---|---|
| pollo | $\frac{2}{3} \cdot 2x$ | $\frac{1}{3} \cdot 2x$ | 2x |
| pavo | $\frac{x}{4}$ | $\frac{3}{4} \cdot x$ | x |
| | | | 3x |

de los platos de pavo sólo un cuarto fue de muslos y el resto de pechugas

Por último, tenemos:

| | muslos | pechugas | |
|---|---|---|---|
| pollo | $\frac{2}{3} \cdot 2x$ | $\frac{1}{3} \cdot 2x$ | 2x |
| pavo | $\frac{x}{4}$ | $\frac{3}{4} \cdot x$ | x |
| | $\frac{19x}{12}$ | $\frac{17x}{12}$ | 3x |

Y para concluir:

$$\frac{\frac{3x}{4}}{\frac{17x}{12}} = \frac{9}{17}$$

**<u>Septiembre 15:</u>** En una bolsa hay 60 bolas, algunas rojas, otras verdes y otras azules. Si saco una bola al azar, la probabilidad de que sea roja es ½, y de que sea azul, 3/10. ¿Cuántas bolas verdes hay?

**<u>Solución:</u>** El número de bolas verdes se obtendrá restando del total de bolas , las bolas rojas y las azules.

De color rojo hay ((1/2)·60 =) 30. De color azul hay ((3/10)·60 =) 18. Luego de color verde hay (60 – 30 – 18 =) 12

**<u>Septiembre 16-17:</u>** Con cubitos idénticos he construido un gran bloque en forma de ladrillo. Luego he decidido quitar los 65 cubitos exteriores de una de las caras del bloque y luego he quitado los 30 cubitos exteriores de otra de las caras. ¿Cuántos cubitos quedan ahora en el bloque?

**Solución:** Supongamos que las dimensiones del ladrillo son: a x b x c, donde a es la altura, b la longitud y c la profundidad. Si la primera capa que quitamos es la superior tendremos que c x b = 65 = 65·1 = 13·5, que proporciona (por la unicidad de la descomposición factorial en primos) dos posibles soluciones:

c = 65 y b = 1

c = 13 y b = 5

Si suponemos ahora, que la segunda capa que quitamos es la delantera, la primera solución aporta (a – 1)·1 = 30 $\Rightarrow$ a =31. Luego una solución es: 31 x 1 x 65.

La segunda solución aporta (a – 1)·5 = 30 $\Rightarrow$ a = 7. Luego la segunda solución es: 7 x 5 x 13

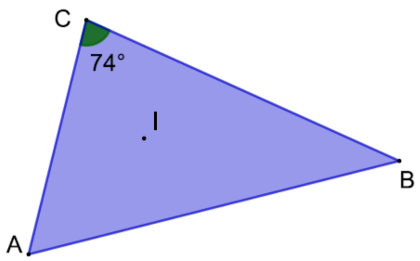
Para la primera solución quedan (31·1·65 – 65 – 30 =) 1920 cubitos

Para la segunda solución quedan (7·5·13 – 65 – 30 =) 360 cubitos

**Septiembre 18:** ¿Cuántos números del 1 al 1000 cumplen que la suma de sus cifras es igual a 4?

**Solución:** De una cifra está sólo el 4. De dos cifras están el 13, el 22, el 31 y el 40. De tres cifras están el 112 ( y sus permutaciones, el 121 y el 211) , el 130 (y sus permutaciones, el 103, el 301 y el 310), el 220 (y sus permutaciones, el 202) y el 400. En total (1 + 4 + 10 =) 15 números

**Septiembre 19-20:** El incentro, I, es el punto en que se intersectan las bisectrices interiores de un triángulo $\Delta$ABC. Si $\angle$ACB=74°, ¿cuánto mide el ángulo $\angle$AIB?

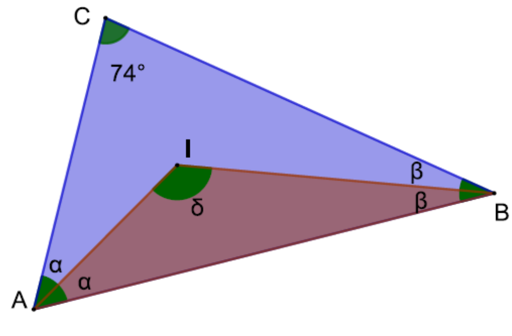



**Solución:** En el triángulo $\Delta$ABC tenemos:

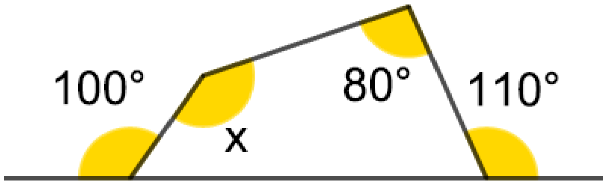
$2\alpha + 2\beta + 74° = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 53°$

En el triángulo $\Delta$AIB tenemos:

$\alpha + \beta + \delta = 180° \Rightarrow \delta = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 53° = 127°$

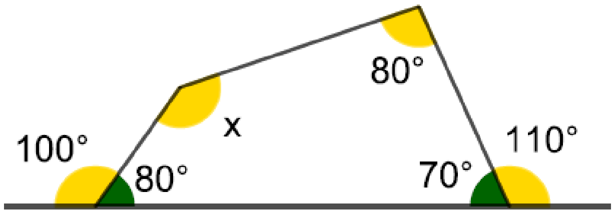


**<u>Septiembre 21:</u>** ¿Cuánto vale el ángulo x?




**<u>Solución:</u>** Tendremos (mirar figura) que la suma de ángulos interiores del cuadrilátero suma (2·180 =) 360°. Por tanto:

x = 360° - (80° + 80° +70°) = 130°




**<u>Septiembre 22:</u>** Si 7 sandías y 1 melón pesan lo mismo que 3 sandías y 7 melones, ¿cuántas sandías pesan lo mismo que 9 melones?

**<u>Solución:</u>** Si representamos por Δ (el peso de) una sandia y por □ (el peso de un) melón tenemos la siguiente sucesión de balanzas equilibradas:

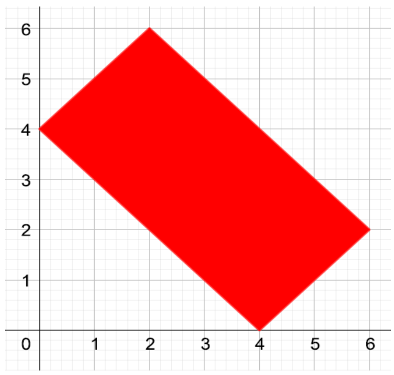
7Δ + 1□ = 3Δ + 7□ ⇒ (quitando de cada plato un melón) 7Δ = 3Δ + 6□ ⇒ (quitando de cada plato de la balanza 3 sandías) 4Δ = 6□ ⇒ 2Δ = 3□ ⇒ 6Δ = 9□

Es decir 9 melones pesan lo mismo que 6 sandías.

También podemos plantear una proporción:

$$\frac{4 \text{ sandías}}{6 \text{ melones}} = \frac{\text{x sandías}}{9 \text{ melones}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4 \cdot 9}{6} \text{sandías}$$

**<u>Septiembre 23:</u>** ¿Qué fracción del cuadrado está coloreada de rojo?




**<u>Solución:</u>** Para calcular el área del rectángulo rojo, al área del cuadrado grande de lado 6 le restaremos el área de los dos triángulos rectángulos isósceles de catetos 2 unidades y el área de los dos triángulos rectángulos isósceles de catetos 4 unidades:

$$\text{Área} = 6^2 - 2\cdot 2 - 4\cdot 4 = 16.$$

La proporción solicitada es:

$$\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

**<u>Septiembre 24:</u>** Dividimos un cuadrado en cinco rectángulos iguales y cada uno de ellos tiene 72 cm de perímetro, ¿cuántos cm mide el lado del cuadrado?

**<u>Solución:</u>** La única manera de que cinco rectángulos iguales formen un cuadrado es que los rectángulos estén uno al lado de otro, es decir si un rectángulo tiene por dimensiones a x b, debe de cumplirse que $5\cdot a = b$. Con ello queda generado el sistema:

$$\left.\begin{array}{c} 2a + 2b = 72 \\ 5a = b \end{array}\right\}$$

que tiene por solución: a = 6 y b = 30. Con ello el lado del cuadrado es de 30 cm.

**<u>Septiembre 25:</u>** Halla todos los números de dos cifras de manera que son iguales al cuádruple de la suma de sus cifras.

**<u>Solución:</u>** Sean $\overline{ab} = 10\cdot a + b$, los números buscados. Del enunciado tendremos:

$$10\cdot a + b = 4\cdot(a + b) \Rightarrow 6\cdot a = 3\cdot b \Rightarrow 2a = b$$

Y dando valores a a tenemos:

| a | b = 2a | $10\cdot a + b = \overline{ab}$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 12 |
| 2 | 4 | 24 |
| 3 | 6 | 36 |
| 4 | 8 | 48 |

**<u>Septiembre 26:</u>** La diferencia entre el ángulo mayor y el mediano de un triángulo es 23°, y entre el mayor y el pequeño es 31°, ¿cuánto miden sus ángulos?
**<u>Solución:</u>** Si $\alpha$ designa la medida del ángulo mayor, $\alpha$ - 23 será la medida del ángulo mediano y $\alpha$ - 31 será la medida del ángulo pequeño. Puesto que la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo da 180°, tendremos:

$$\alpha + \alpha - 23 + \alpha - 31 = 180 \Rightarrow \alpha = 78°$$

Los ángulos miden pues: 78°, 55° y 47°

**<u>Septiembre 27-28:</u>** Entre dos impresoras se deben imprimir 440 carteles. En un minuto, la rápida imprime 7 carteles y la lenta sólo 6. Comienzan juntas a funcionar y al cabo de un rato la rápida se queda sin papel por lo que la lenta sigue trabajando 17 minutos más. ¿Cuántos carteles imprimió la rápida?

**Solución:** Primero trabajan ambas m minutos, en este tiempo la rápida imprimió 7m carteles y la lenta imprimió 6m carteles, en total 13 m carteles. Luego la lenta trabajó 17 minutos más, produciendo (17·6 =) 102 carteles. Tendremos, entonces:

$$13m + 102 = 440 \Rightarrow m = 26$$

La rápida imprimió (26·7 =) 182 carteles.

**Septiembre 29:** ¿Cuántos números capicúas de cinco cifras hay que cumplan la condición de que cuatro de ellas sean iguales y la otra diferente?

**Solución:** Al trabajar con capicúas de cinco cifras está claro que la cifra diferente ha de ser la central y las otras cuatro, iguales.

Si la cifra central es 0, las otras cuatro pueden ser unos, doses, treses, ··· , nueves. Es decir, hay 9 capicúas de los considerados con cifra central 0.

Si la cifra central es x (con $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$) hay 8 números capicúas de los considerados. Por ejemplo, si x = 3, los capicúas son: 11311, 22322, 44344, 55355, 66366, 77377, 88388 y 99399.

En total hay (9 + 9·8 =) 81 capicúas con las condiciones requeridas.

**Septiembre 30:** Si en un cajón caben 7 kilos de arroz, ¿cuántos kilos caben en otro cuyas aristas son el doble de las del primer cajón?

**Solución:** Si las dimensiones del primer cajón son a x b x c, las dimensiones del segundo cajón son 2a x 2 b x 2c. Por tanto, si el volumen del primer cajón es V, el volumen del segundo cajón es 8V. De aquí, que, si en el primer cajón caben 7 kilos de arroz, en el segundo caben (7·8 =) 56 kilos de arroz